

HEINRICH·HERTZ·INSTITUT FÜR SCHWINGUNGSFORSCHUNG
BERLIN·CHARLOTTENBURG

Technischer Bericht Nr. 8

Die Reduktion der Leitwertmatrix auf weniger Klemmenpaare

Dr.-Ing. WILHELM KLEIN

1 9 5 7

Technischer Bericht Nr. 8

Die Reduktion der Leitwertmatrix auf weniger Klemmenpaare

Zusammenfassung

Die Vierpolmatrizen komplizierter Schaltungen berechnet man zweckmässigerweise so, dass man zunächst nach der im Techn. Bericht Nr. 6 abgeleiteten Regel die Mehrpol-Leitwertmatrix der Schaltung hinschreibt und dann die Zahl der Klemmenpaare auf zwei reduziert. Für diese Reduktion der Zahl der Klemmenpaare wird hier ein allgemeines Verfahren abgeleitet und an Beispielen erläutert. Es erfordert lediglich die Berechnung gewisser Unterdeterminanten der Mehrpol-Leitwertmatrix und gestattet daher den Gebrauch von Rechenautomaten. Das Verfahren ermöglicht auch noch die Behandlung der Fälle, in denen die Stern-Vielecks-Umwandlung versagt.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

Der Bearbeiter

gez: Klein

(Dr.-Ing. Wilhelm Klein)

Der Abteilungsleiter

gez: Rothert

(Prof. Dr.-Ing. G. Rothert)

Der Institutsdirektor

gez: Rothert

(Prof. Dr.-Ing. G. Rothert)

Berlin-Charlottenburg, den 7.2.1957

Die Reduktion der Leitwertmatrix auf weniger Klemmenpaare

Um die Vierpoleigenschaften einer komplizierten Schaltung, wie z.B. eines Filters oder eines Verstärkers zu berechnen, geht man zweckmässigerweise so vor, dass man zunächst die Schaltung als Mehrpol auffasst, dessen sämtliche Knoten von aussen zugänglich sind. Für einen solchen Mehrpol lässt sich nach einer einfachen Regel, die im Technischen Bericht Nr. 6 abgeleitet wurde, die Leitwertmatrix aufschreiben. Tatsächlich sind aber gewöhnlich nicht sämtliche Knoten zugänglich; wenn man z.B. die Schaltung als Vierpol betrachten will, ist nur ein Eingangsklemmenpaar und ein Ausgangsklemmenpaar als von aussen zugänglich anzusehen.

Verringert man bei einer gegebenen Schaltung die Anzahl der zugänglichen Klemmenpaare, so erhält man einen neuen Mehrpol, dessen Eigenschaften sich aus den Eigenschaften (insbesondere der Leitwertmatrix) des ursprünglichen errechnen lassen. Man hat dazu lediglich gewisse Unterdeterminanten der Mehrpol-Leitwertmatrix zu berechnen. Das Verfahren hat also den geringstmöglichen Rechenaufwand und ist bei komplizierten Schaltungen für den Gebrauch von Rechenautomaten geeignet.

Berechnung der Widerstands- und Leitwertmatrix des reduzierten Mehrpols

Der ursprüngliche Mehrpol möge $(m+n)$ Klemmenpaare haben, der neue Mehrpol unterscheide sich nur insofern davon, dass die n Klemmenpaare unzugänglich sind, so dass er also noch m zugängliche Klemmenpaare hat.¹⁾ Wir können hier die Theorie der Mehrpole mit zwei Klemmenpaargruppen anwenden, wie sie im Techn. Bericht 2, Seite 7 ff. entwickelt wurde, nur haben wir diese beiden Gruppen jetzt nicht wie dort als Eingangsklemmenpaare und Ausgangsklemmenpaare anzusehen, sondern als zugängliche und unzugängliche Klemmenpaare.

An den n unzugänglichen Klemmenpaaren sind die Ströme gleich Null, es ist also die Spaltenmatrix $I_2 = 0$, während die

¹⁾ In dem am meisten interessierenden Fall der Reduktion auf einen Vierpol ist $m = 2$.

Spannungen an ihnen vorhanden sind ($U_2 \neq 0$). Der ursprüngliche Mehrpol sei durch seine Widerstandsmatrix W gegeben, dann ist nach Techn. Bericht Nr. 2, S. 8, Gl. (4) mit einer Aufteilung von W in 4 Teilmatrizen:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & I_1 \\ W_{21} & I_1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Aus der ersten Gleichung von (1) folgt, dass die Widerstandsmatrix des neuen Mehrpols

$$\tilde{W} = W_{11}^{-1}, \quad (2)$$

also gleich einer Teilmatrix des ursprünglichen ist, während die zweite Gleichung die Spannungen U_2 an den unzugänglichen Klemmenpaaren angibt, also hier nicht interessiert.

Für die Leitwertmatrix des neuen Mehrpols erhält man daher

$$\tilde{Y} = W_{11}^{-1}. \quad (3)$$

Ist die Leitwertmatrix Y des ursprünglichen Mehrpols durch ihre 4 Teilmatrizen gegeben, dann ergibt sich nach Techn. Bericht Nr. 2, S. 11, Gl. (4a) und (3) die neue Leitwertmatrix als Funktion der Teilmatrizen des alten Mehrpols:

$$\tilde{Y} = Y_{11} - Y_{12} Y_{22}^{-1} Y_{21}. \quad (4)$$

Y kann aber auch durch seine $(m+n)^2$ Elemente gegeben sein:

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1,(m+n)} \\ \vdots & & \\ y_{(m+n),1} & \dots & y_{(m+n),(m+n)} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Man erhält dann $\tilde{W} = W_{11}$ als Teilmatrix von $W = Y^{-1}$ nach der Regel zur Bildung einer reziproken Matrix:

$$\tilde{W} = \frac{1}{\det Y} \begin{pmatrix} +\det_{11} Y & -\det_{21} Y \dots (-1)^{m+1} \det_{m1} Y \\ -\det_{12} Y & +\det_{22} Y \\ \vdots & \\ (-1)^{m+1} \det_{1m} Y \dots & +\det_{mm} Y \end{pmatrix} \quad (6)$$

Darin bedeutet z.B. $\det_{21} Y$ die Unterdeterminante, die aus Y durch Streichen der 2. Zeile und der 1. Spalte entsteht. Diese beiden Formeln (4) und (6) bilden die Grundlage für die Reduktion der Zahl der Klemmenpaare eines Mehrpols.

1. Beispiel: Doppel-T-Schaltung

Als Anwendungsbeispiel der Beseitigung von 2 unzugänglichen Knoten nach Formel (4) behandeln wir die sog. Doppel-T-Schaltung²⁾ nach Abb. 1. Die Schaltung hat Filtereigenschaften, denn sie sperrt bei der Frequenz $\omega_0 = 1/RC$, und sie wird deshalb als

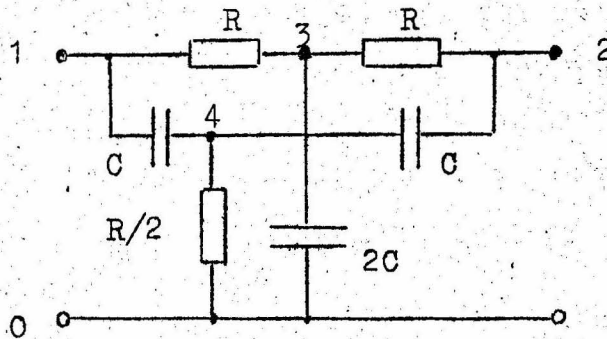


Abb. 1 Doppel-T-Schaltung

Gegenkopplungsnetzwerk für RC-Generatoren und Resonanzverstärker verwendet³⁾.

Wir lesen nach der Strukturregel des Techn. Berichtes Nr. 4 aus der Schaltung die Leitwertmatrix des erdunsymmetrischen Mehrpols 1234/0 ab ($p = j\omega$):

$$Y = \left(\begin{array}{cc|cc} 1/R+pC & 0 & -1/R & -pC \\ 0 & 1/R+pC & -1/R & -pC \\ \hline -1/R & -1/R & 2/R+2pC & 0 \\ -pC & -pC & 0 & 2/R+2pC \end{array} \right)$$

Als Leitwertmatrix des Vierpols 12/0 erhalten wir daraus nach (4):

-
- 2) Ein anderer Weg zur Behandlung dieser Schaltung wäre, sie als Parallelschaltung von zwei T-Schaltungen aufzufassen.
- 3) Vgl. z.B. Handbuch für Hochfrequenz- und Elektrotechniker, Bd. III, S. 264.

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 1/R+pC & 0 \\ 0 & 1/R+pC \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/R & -pC \\ -1/R & -pC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/R+2pC & 0 \\ 0 & 2/R+2pC \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1/R & -1/R \\ -pC & -pC \end{pmatrix}$$

und nach Ausrechnung:

$$\tilde{Y} = \frac{1}{2(1/R+pC)} \begin{pmatrix} 1/R^2+p^2C^2+4pC/R & -(1/R^2+p^2C^2) \\ -(1/R^2+p^2C^2) & 1/R^2+p^2C^2+4pC/R \end{pmatrix}$$

2. Beispiel: Stern-Vielecks-Umwandlung

Nach dem oben geschilderten Verfahren kann man die Zahl der Klemmenpaare in einem Schritt um n verringern. Wir haben eben für die Doppel-T-Schaltung den Fall $n = 2$ behandelt. Besonders wichtig ist aber der Fall $n = 1$, den wir jetzt erörtern wollen. Wir nehmen an, dass von dem zu beseitigenden Knoten nur Zweipole ausgehen, so dass ein Stern entsteht, wie es für 4 Zweipole Abb. 2 zeigt.

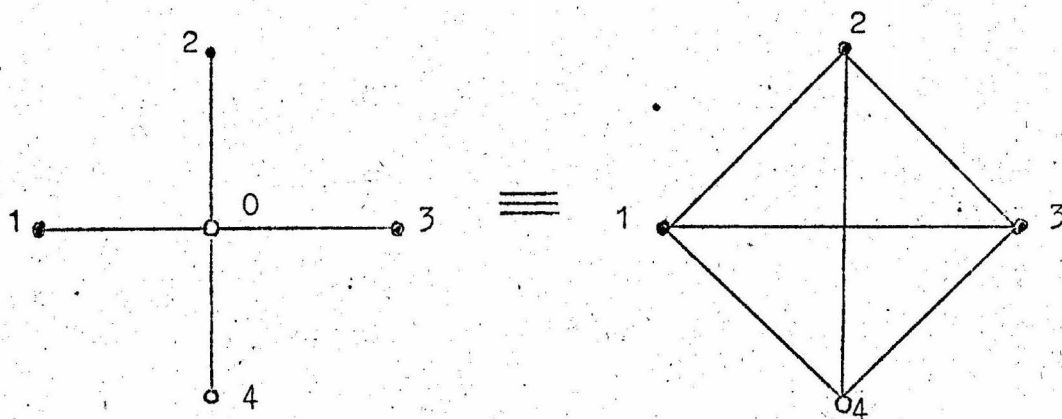


Abb. 2. Vierstrahliger Stern und äquivalentes vollständiges Viereck.

Darin sollen die Verbindungslinien zwischen zwei Klemmen Leitwerte darstellen, so dass der Stern 4 Leitwerte enthält, das vollständige⁴⁾ Viereck dagegen 6 Leitwerte, dafür aber eine Klemme weniger.

Der Stern hat 4 Klemmenpaare, das Viereck 3 Klemmenpaare, von

4) Ein "vollständiges n-Eck" soll bedeuten: ein n-Eck mit sämtlichen Diagonalen.

denen jeweils sämtliche negativen Klemmen in der Erdklemme 4 zusammenliegen.

Wir erhalten für den Stern nach der Regel des Techn. Berichtes Nr. 4 mit der Abkürzung

$$\Sigma = G_{10} + G_{20} + G_{30} + G_{40} \quad (7)$$

folgende Leitwertmatrix:

$$Y = \left(\begin{array}{ccc|c} G_{10} & 0 & 0 & -G_{10} \\ 0 & G_{20} & 0 & -G_{20} \\ 0 & 0 & G_{30} & -G_{30} \\ \hline -G_{10} & -G_{20} & -G_{30} & \Sigma \end{array} \right) \quad (8)$$

die entsprechend der Tatsache, dass die Klemme 0 zum Verschwinden gebracht werden soll, unterteilt ist.

Nach (4) ist dann die Leitwertmatrix des neuen Mehrpols:

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= \begin{pmatrix} G_{10} & 0 & 0 \\ 0 & G_{20} & 0 \\ 0 & 0 & G_{30} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -G_{10} \\ -G_{20} \\ -G_{30} \end{pmatrix} \frac{1}{\Sigma} (-G_{10}, -G_{20}, -G_{30}) \\ &= \begin{pmatrix} G_{10} - G_{10}^2/\Sigma & -G_{10}G_{20}/\Sigma & -G_{10}G_{30}/\Sigma \\ -G_{20}G_{10}/\Sigma & G_{20} - G_{20}^2/\Sigma & -G_{20}G_{30}/\Sigma \\ -G_{30}G_{10}/\Sigma & -G_{10}G_{20}/\Sigma & G_{30} - G_{30}^2/\Sigma \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

Eine solche Matrix lässt sich in der Tat durch ein vollständiges Viereck realisieren mit den einzelnen Leitwerten:

$$G_{ik} = \frac{G_{i0} G_{k0}}{\Sigma}, \quad i, k = 1 \dots 4. \quad (10)$$

Es lässt sich leicht einsehen, dass man so im allgemeinen Fall des z-strahligen Stern das bekannte Ergebnis der Stern-Vielecks-Umwandlung erhält. Besonders häufig wird der Fall $z = 3$, also die Umwandlung eines dreistrahligen Sterns in ein Dreieck benutzt.

3. Beispiel: Der Determinantensatz für Teilmatrizen

Als Anwendungsbeispiel für die Formel (6) leiten wir zunächst einen allgemeinen Satz über die Determinanten der Teilmatrizen von W und Y ab.

Wir betrachten zu diesem Zweck eine Matrix

$$M = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad (11)$$

die also die beiden Teilmatrizen W_{11} und W_{12} der Widerstandsmatrix sowie die Einheitsmatrix E und die Nullmatrix enthält. Es ist

$$\det M = \det W_{11}. \quad (12)$$

Weiter bilden wir das Produkt:

$$MY = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11}Y_{11} + W_{12}Y_{21} & W_{11}Y_{12} + W_{12}Y_{22} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$$

Das lässt sich vereinfachen, da $WY = E$ bzw.

$$\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

ist. Man erhält also:

$$MY = \begin{pmatrix} E & 0 \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}.$$

Nimmt man auch von dieser Matrixgleichung die Determinante, so erhält man:

$$\det (MY) = \det M \det Y = \det Y_{22}. \quad (13)$$

Zusammen mit (12) ergibt sich also

$$\det W_{11} \det Y = \det Y_{22}. \quad (14)$$

Für den Sonderfall des Vierpols ($m = 2$) erhält man hieraus eine bereits bekannte Beziehung⁵⁾. In diesem Fall ist W_{11} eine zwei-reihige Matrix, die man aus (6) entnehmen kann:

$$W_{11} = \frac{1}{\det Y} \begin{pmatrix} \det_{11} Y & -\det_{21} Y \\ -\det_{12} Y & \det_{22} Y \end{pmatrix}$$

Also ist

$$\det W_{11} = (\det_{11} Y \det_{22} Y - \det_{21} Y \det_{12} Y) / \det^2 Y$$

Andererseits entsteht Y_{22} aus Y durch Streichen der 1. und 2. Zeile sowie der 1. und 2. Spalte, so dass man auch schreiben kann:

$$\det Y_{22} = \det_{12,12} Y$$

und man erhält die Beziehung:

$$\det_{11} Y \det_{22} Y - \det_{12} Y \det_{21} Y = \det_{12,12} Y \det Y. \quad (15)$$

Dieser wichtige Satz gilt nicht nur für Leitwertmatrizen sondern offenbar für jede beliebige quadratische Matrix Y .

Bei der Anwendung von (14) auf einen Zweipol (d.h. $m = 1$) wird aus $\det W_{11}$ das Element w_{11} , das den Leerlauf - Scheinwiderstand am Klemmenpaar 1 darstellt und man erhält die bekannte Beziehung:

$$w_{11} = \det_{11} Y / \det Y \quad (16)$$

Vierpole mit unzugänglichen Knoten

a) Vierpol-Widerstandsmatrix und Vierpol-Leitwertmatrix

Wir wenden uns nun dem praktisch wichtigsten Fall, der Reduktion eines Mehrpols auf einen Vierpol zu, d.h. wir betrachten nun Mehrpole mit mehr als zwei Klemmenpaaren, die an zweien ihrer Klemmenpaare einem Vierpol äquivalent sind. Die übrigen Klemmen sind als unzugängliche Knoten anzusehen. Die Widerstandsmatrix dieses Vierpols als Funktion der Elemente der Leitwertmatrix des Mehrpols erhalten wir aus (6) für $m = 2$:

⁵⁾ Vgl. z.B. W. CAUER, Die Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, 2. Aufl. S. 568, Gl. (19)

$$\tilde{W} = \frac{1}{\det Y} \begin{pmatrix} \det_{11} Y & -\det_{21} Y \\ -\det_{12} Y & \det_{22} Y \end{pmatrix}, \quad (17)$$

daraus die Leitwertmatrix des Vierpols:

$$\tilde{Y} = \tilde{W}^{-1} = \frac{\det^2 Y}{\det Y (\det_{11} Y \det_{22} Y - \det_{21} Y \det_{12} Y)} \begin{pmatrix} \det_{22} Y & \det_{21} Y \\ \det_{12} Y & \det_{11} Y \end{pmatrix}$$

und mit Berücksichtigung des Determinantensatzes (15):

$$\tilde{Y} = \frac{1}{\det_{12,12} Y} \begin{pmatrix} \det_{22} Y & \det_{21} Y \\ \det_{12} Y & \det_{11} Y \end{pmatrix}. \quad (18)$$

b) Vierpol-Kettenmatrix

Die Kettenmatrix des Vierpols bei symmetrischen Vorzeichen erhalten wir z.B. aus den Elementen der Vierpol-Leitwertmatrix mit Hilfe der Gleichungen (9a) und (9b) des Techn. Berichtes Nr. 2, S. 14:

$$\tilde{A} = \frac{1}{\det_{12} Y} \begin{pmatrix} -\det_{11} Y & \det_{12,12} Y \\ \frac{\det_{12} Y \det_{21} Y - \det_{11} Y \det_{22} Y}{\det_{12,12} Y} & \det_{22} Y \end{pmatrix}$$

und mit Berücksichtigung des Determinantensatzes (15):

$$\tilde{A} = \frac{1}{\det_{12} Y} \begin{pmatrix} -\det_{11} Y & \det_{12,12} Y \\ -\det Y & \det_{22} Y \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Wir bilden noch die Determinante von \tilde{A} , die sog. Kettendeterminante:

$$\det \tilde{A} = \frac{-\det_{11} Y \det_{22} Y + \det_{12,12} Y \det Y}{\det_{12}^2 Y}$$

und mit (15)

$$\det \tilde{A} = - \frac{\det_{21} Y}{\det_{12} Y} \quad (20)$$

Falls die Leitwertmatrix Y symmetrisch ist, ist $\det_{21} Y = \det_{12} Y$ und es wird $\det \tilde{A} = -1$. Es ist dies der Fall der sog. Uebertragungssymmetrie⁶⁾.

c) Vierpol-Reihenparallelmatrix und Vierpol-Parallelreihenmatrix

Aus (18) und Tabelle 3 des Techn. Berichtes Nr. 2 erhalten wir die Vierpol-Reihenparallelmatrix:

$$\tilde{H} = \frac{1}{\det_{22} Y} \begin{pmatrix} \det_{12,12} Y & -\det_{21} Y \\ \det_{12} Y & \frac{\det_{11} Y \det_{22} Y - \det_{12} Y \det_{21} Y}{\det_{12,12} Y} \end{pmatrix}$$

und mit (15)

$$\tilde{H} = \frac{1}{\det_{22} Y} \begin{pmatrix} \det_{12,12} Y & -\det_{21} Y \\ \det_{12} Y & \det Y \end{pmatrix} \quad (21)$$

Die Vierpol-Parallelreihenmatrix ergibt sich als die Reziproke von \tilde{H} :

$$\tilde{P} = \tilde{H}^{-1} = \frac{1}{\det_{11} Y} \begin{pmatrix} \det Y & \det_{21} Y \\ -\det_{12} Y & \det_{12,12} Y \end{pmatrix} \quad (22)$$

Beispiele

1. Abzweigschaltung

Für die Abzweigschaltung Abb. 3 erhalten wir die Leitwertmatrix nach der Regel des Techn. Berichtes Nr. 4:

⁶⁾ Für Kettenvorzeichen erhält man bei Uebertragungssymmetrie die bekannte Beziehung $\det \tilde{A} = +1$.

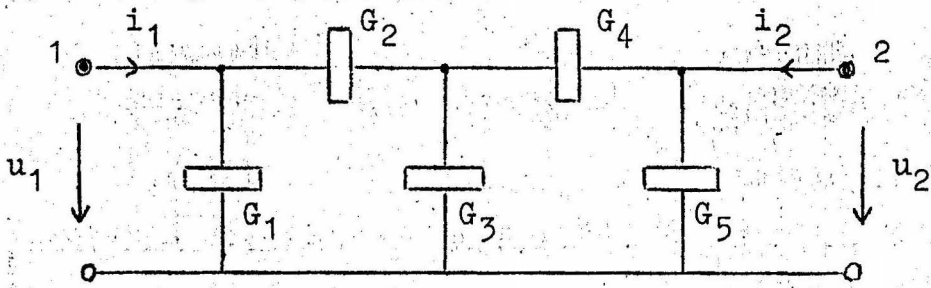


Abb. 3 Abzweigschaltung

$$Y = \begin{pmatrix} G_1+G_2 & 0 & | & -G_2 \\ 0 & G_4+G_5 & | & -G_4 \\ \hline -G_2 & -G_4 & | & G_2+G_3+G_4 \end{pmatrix}$$

Die Vierpol-Leitwertmatrix ergibt sich daraus nach der allgemeinen Formel (4):

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= Y_{11}^{-1} Y_{12} Y_{22}^{-1} Y_{21} = \begin{pmatrix} G_1+G_2 & 0 \\ 0 & G_4+G_5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -G_2 \\ -G_4 \end{pmatrix} \frac{1}{G_2+G_3+G_4} (-G_2, -G_4) \\ &= \begin{pmatrix} G_1+G_2 - G_2^2 / (G_2+G_3+G_4) & -G_2 G_4 / (G_2+G_3+G_4) \\ -G_2 G_4 / (G_2+G_3+G_4) & G_4+G_5 - G_4^2 / (G_2+G_3+G_4) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{G_2+G_3+G_4} \begin{pmatrix} G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_1 G_4 + G_2 G_3 + G_2 G_4 & -G_2 G_4 \\ -G_2 G_4 & G_2 G_4 + G_3 G_4 + G_2 G_5 + G_3 G_5 + G_4 G_5 \end{pmatrix} \quad (23) \end{aligned}$$

Da es sich hier aber um einen Vierpol handelt, wendet man zweckmässigerweise gleich die Formel (18) an. Zu diesem Zweck hat man die Unterdeterminanten von Y zu berechnen:

$$\det_{11} Y = G_2 G_4 + G_2 G_5 + G_3 G_4 + G_3 G_5 + G_4 G_5$$

$$\det_{12} Y = -G_2 G_4$$

$$\det_{22} Y = G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_1 G_4 + G_2 G_3 + G_2 G_4$$

$$\det_{12,12} Y = G_2 + G_3 + G_4$$

$$\det_{21} Y = -G_2 G_4$$

$$\det Y = G_1 G_2 G_4 + G_1 G_2 G_5 + G_1 G_3 G_4 + G_1 G_3 G_5 + G_1 G_4 G_5 + G_2 G_3 G_4 + G_2 G_3 G_5 + G_2 G_4 G_5$$

Man erhält so unmittelbar die Vierpol-Leitwertmatrix \tilde{Y} wie in (23).

Mit den gleichen Unterdeterminanten ergeben sich auch die übrigen Matrizen \tilde{W} , \tilde{A} , \tilde{H} und \tilde{P} nach (17), (19), (21) und (22).

2. Ersatzschaltung eines idealen unbeschalteten Sparübertragers.

Als weiteres Beispiel betrachten wir einen Vierpol nach Abb. 4, der dadurch bemerkenswert ist, dass einzelne seiner Leitwerte negativ sind. Die Schaltung ist also als (3+1)-Pol sicher nicht realisierbar; wir werden jedoch sehen, dass sie als erdun-

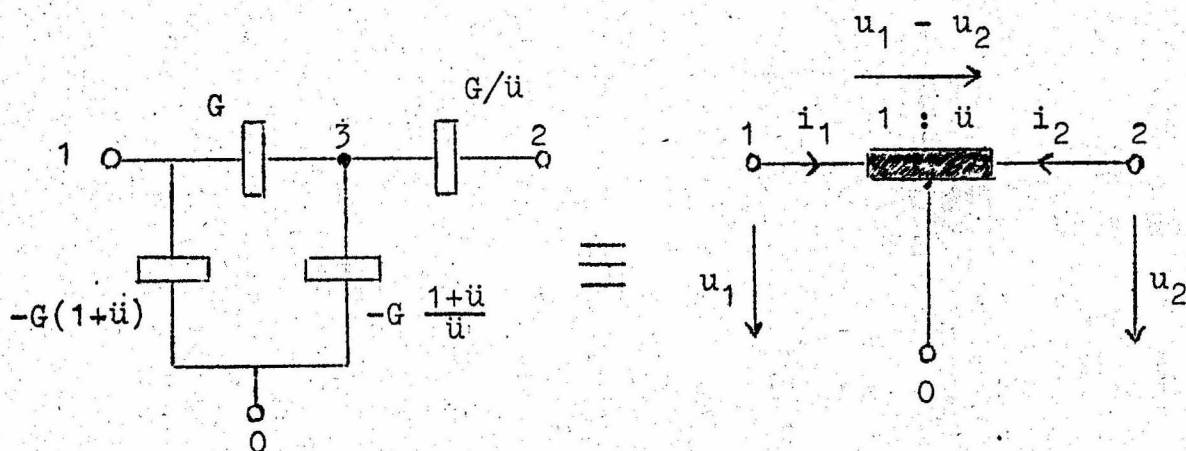


Abb. 4 Schaltung mit negativen Schaltelementen und ihre Realisierung

symmetrischer Vierpol 10/20 durchaus zu realisieren ist, und zwar, wie in Abb. 4 angegeben, durch einen idealen Sparübertrager⁷⁾ mit dem Übersetzungsverhältnis 1 : ü (ü reell).

Um auf den Vierpol zu kommen, könnte man zunächst versuchen, für den Sternpunkt 3 eine Stern-Dreiecks-Umwandlung nach (10) durchzuführen. Das scheitert aber daran, dass die Summe aller von 3 ausgehenden Leitwerten verschwindet:

$$\sum = G - (1+\ddot{u})G/\ddot{u} + G/\ddot{u} = 0$$

⁷⁾ Ein Ersatzbild eines unbeschalteten idealen Sparübertragers wurde vom Verfasser im AEÜ 7 (1953) S. 198 - 201 angegeben. Das Ersatzbild der Abb. 4 geht daraus durch eine Stern-Dreiecks-Umwandlung hervor.

Wir gehen daher so vor, dass wir aus der Leitwertmatrix des (3+1)-Pols die Vierpolmatrizen berechnen. Wir lesen aus der Schaltung nach der Strukturregel der Leitwertmatrix ab:

$$Y = \begin{pmatrix} -\dot{u}G & 0 & 0 \\ 0 & G/\dot{u} & -G/\dot{u} \\ -G & -G/\dot{u} & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix}$

Daraus folgt aber $\det_{12,12} Y = 0$ und $\det Y = 0$, so dass nach (17) und (18) der Vierpol keine Widerstandsmatrix \tilde{W} und keine Leitwertmatrix \tilde{Y} hat. Es existiert aber die Kettenmatrix \tilde{A} und auch \tilde{H} und \tilde{P} . Wir erhalten nämlich nach (19):

$$\tilde{A} = -\frac{\dot{u}}{G^2} \begin{pmatrix} G^2/\dot{u}^2 & 0 \\ 0 & -G^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\dot{u} & 0 \\ 0 & \dot{u} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

also folgende Kettengleichungen (mit symmetrischen Vorzeichen):

$$u_1 = -u_2/\dot{u}, \quad i_1 = \dot{u} i_2. \quad (25a), (25b)$$

Nach den Pfeilrichtungen der Schaltung ist die Spannung zwischen 1 und 2

$$u_{12} = u_1 - u_2.$$

Es ist daher $u_{12} = u_1 + \dot{u} u_1 = u_1(1+\dot{u})$. Das bedeutet, dass u_{12} durch den Abgriff im Verhältnis $1 : \dot{u}$ geteilt wird. Die Schaltung kann also durch einen idealen Sparübertrager realisiert werden, d.h. durch eine streuungslose Spule unendlich hoher Induktivität, die im Windungszahlverhältnis $1 : \dot{u}$ angezapft ist (Abb. 5). Mit der Spannungsbeziehung (25a) ist dabei auch die Strombeziehung (25b) erfüllt, weil (24) die Bedingung $\det \tilde{A} = -1$ erfüllt. Ist \dot{u} eine negative reelle Zahl, so erhält man die in Abb. 5 für $1 : (-\dot{u})$ angegebenen Wicklungsarten.

Es ist bemerkenswert, dass das Verfahren der Knotenreduktion auch dann nicht versagt, wenn wie hier beim unbeschalteten Sparübertrager keine Vierpol-Leitwertmatrix existiert.

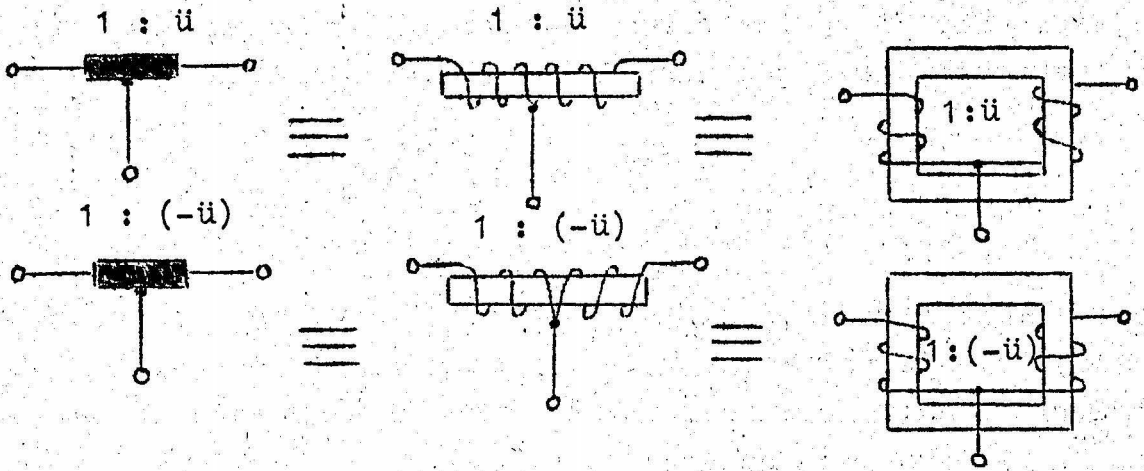


Abb. 5. Realisierung des idealen Sparübertragers (u positiv).