

HEINRICH-HERTZ-INSTITUT FÜR SCHWINGUNGSFORSCHUNG
BERLIN-CHARLOTTENBURG

Technischer Bericht Nr. 39

Der Spannungszustand im Schallfeld

Dr.-Ing. G. SCHWANTKE

39

1 9 6 0

Der Spannungszustand im Schallfeld

Zusammenfassung

Ausgehend von der EULER-Gleichung wird auf einfache Weise allgemein die Spannung im Schallfeld hergeleitet und die Strahlungskraft für beliebige Einfallswinkel und Reflexionsverhältnisse im ebenen Feld berechnet. Zum einfachen Verständnis der tensoriellen Kraftwirkungen wird die Einführung einer "Ersatzimpulsdichte" vorgeschlagen, die im stationären Fall fiktiv ist, beim begrenzten Wellenzug jedoch in einen wirklichen Impuls übergeht.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

Der Bearbeiter

gez. Schwantke

(Dr.-Ing.G. SCHWANTKE)

Der Institutsdirektor

gez. Cremer

(Prof.Dr.-Ing. L. CREMER)

Der Abteilungsleiter

gez. Cremer

(Prof.Dr.-Ing. L. CREMER)

Berlin-Charlottenburg, den 15. Dezember 1959



Der Spannungszustand im Schallfeld

1. Einleitung

Fällt eine Schallwelle auf einen reflektierenden oder absorbierenden Schirm, so ist darauf im Zeitmittel ein Überdruck meßbar, der "Schallstrahlungsdruck" genannt wird. Dieser Effekt ist seit langem bekannt. Obwohl er zur Energiemessung in der Ultraschallforschung herangezogen werden kann und wird, ist das Interesse an diesem Effekt wohl vorwiegend theoretischer Natur.

Bei dem Versuch, aus der großen Zahl der Arbeiten über dieses Thema eine besonders prägnante und befriedigende Formulierung zu finden, zeigten sich manche Unstimmigkeiten oder doch wenigstens unnötige Umwege und Beschränkungen. So entstand nach einigen eigenen Irrungen eine neue Darstellung, die einfacher und zugleich allgemeiner ist als frühere, im wesentlichen durch konsequente Verwendung der Eulerdarstellung und der in der Tensorrechnung üblichen Indizes - Schreibweise.

Den ursprünglich mehr kritisch sichtenden Absichten entsprechend sei es gestattet, eine kurze Würdigung eines repräsentativen Querschnitts des bestehenden Schrifttums voranzustellen.

Die ersten Berechnungen des Schallstrahlungsdruckes gehen auf Lord R a y l e i g h [1] - für das geschlossene Rohr - und L a n g e v i n [2] - für das freie Schallfeld - zurück. Die Folgerungen, die R a y l e i g h hinsichtlich der Impulsdichte der Schallwelle zog, berücksichtigen - durch die Beschränkung auf den senkrechten Einfall und ideale Reflexion - allerdings nicht genügend den Transformationscharakter der im Schallfeld wirkenden Kräfte. Erst B r i l l o u i n [3] wies auf die Tensoreigenschaft des Strahlungs-"Druckes" hin, allerdings nicht als Folgerung aus den Grundgleichungen, sondern als Zusatzpostulat, daß der Impulsfluß $\varrho v_i v_k$ für die Kräfte im Schallfeld verantwortlich sei. Spätere Arbeiten beschränken sich wieder auf den eindimensionalen Fall mit gelegentlicher Berufung auf B r i l l o u i n . Lediglich von B o r g n i s

[4] werden die Gesetze des schrägen Einfalls indirekt aus dem Kräftegleichgewicht mit Hilfe eines Gedankenversuchs hergeleitet. Drehinvariante Formulierungen wurden nur in einer neueren Arbeit von K a r a s k i e w i c z [5] angetroffen, deren Herleitung jedoch Mängel aufweist.

Da die Kräfte im Schallfeld von 2. Ordnung sind, genügen die gewöhnlichen linearisierten Feldgleichungen zu ihrer Beschreibung nicht. In der strengen N e w t o n 'schen Strömungsgleichung

$$\rho \frac{d\mathbf{w}}{dt} + \text{grad } p = \mathbf{F} \quad (1)$$

bedeutet das erste Glied die Trägheitskraft eines strömenden Teilchens, die Zeitableitung also die Geschwindigkeitsänderung, wie sie ein mitbewegter Beobachter feststellt. Die direkt aus der Punktmechanik übernommene Beschreibung der Koordinaten eines bestimmten materiellen Teilchens geht auf L a g r a n g e zurück und ist natürlich nur bei schwingungsförmiger Bewegung sinnvoll, wenn nämlich das Teilchen eine gewisse feste Ruhelage besitzt. Ein Vorteil der "L a g r a n g e - Darstellung" ist, daß für die entsprechende Wellengleichung im eindimensionalen Fall eine einfache Näherungslösung angebar ist [6], [7].*) Dafür stößt aber eine mehrdimensionale Betrachtung auf große Schwierigkeiten.

Dem Kontinuum besser angepaßt ist die auf E u l e r zurückgehende Beschreibung in ortsfesten Koordinaten. In diesem Fall ist bei der Zeitableitung in Gl. (1) zu beachten, daß zu der Änderung des gesamten Strömungszustandes (lokaler Anteil) dadurch eine zusätzliche Geschwindigkeitsänderung eines Teilchens auftritt, daß es weiterwandert (konvektiver Anteil).

*) Die Wellengleichung in L a g r a n g e - Koordinaten ist aber keineswegs linear, wie z.B. von H e r t z und M e n d e [8] und Nachfolgern [5, 9, 10] durch unzulässige Vernachlässigung von Gliedern 2. Ordnung angesetzt wurde. Dadurch ergibt sich nur indirekt ein (und zwar rein skalarer) Strahlungsdruck durch Dichteerhöhung bei Wechselwirkung mit dem freien Medium.

Beide Darstellungen sind zur Berechnung des Strahlungsdruckes herangezogen worden. In L a g r a n g e - Koordinaten wird aus einer Näherungslösung der mittlere Überdruck vor einer Wand bestimmt [3, 7, 5, 8, 9, 10]. Das gleiche Verfahren ist in E u l e r - Koordinaten nur bei der ideal reflektierenden Wand anwendbar, weshalb dieser Fall bevorzugt behandelt wurde [1, 11, 12, 13], am elegantesten von B o p p [13]. Bei der absorbierenden Wand tritt dazu noch eine zusätzliche Kraftwirkung durch den sogenannten Impulsstrom [5, 14].

Der Vollständigkeit halber sei noch auf eine weitere Möglichkeit hingewiesen: der Berechnung der Kraft auf eine bestrahlte Wand aus dem Impuls der Schallwelle. Solche Versuche sind von R a y l e i g h [1] und später von S c h ä f e r [11] gemacht worden, beide jedoch aus dem gleichen Grunde inkorrekt wegen einer fehlenden Transformation von L a g r a n g e auf E u l e r - Koordinaten. S c h o c h [7] hat nachgewiesen, daß dieses Verfahren nur bei begrenzten Wellenzügen zum Erfolg führt. M e r c i e r [15] verlangt die Existenz eines Impulses der Schallwelle aus Analogiegründen, was aber nicht überzeugt.*)

Wir geben der E u l e r - Darstellung den Vorzug, weil man nur damit das Problem drehinvariant formulieren kann.

*) M e r c i e r wendet sich in diesem Zusammenhang gegen Widersprüche der "klassischen Berechnungsmethode", (d.h. der L a g r a n g e - Methode), die aber auf Mißverständnissen und Irrtümern selbst in den linearisierten Lösungen beruhen.

2. Grundgleichungen

Da wir auf eine tensorielle Größe hinauswollen, ist es zweckmäßig, die Grundgleichungen gleich in Koordinaten - und nicht Vektorschreibweise zu verwenden. Dann wird Gl. (1):

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \pi_{ii} = F_i \quad (1) \quad \pi_{ii} = \frac{\partial \pi}{\partial x_i}$$

Gemäß den vorangestellten Betrachtungen muß v_i als Funktion von x_1, x_2, x_3 und t aufgefaßt werden

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dt} &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t} \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,k} \cdot v_k \end{aligned}$$

Das Summationszeichen wird im Folgenden fortgelassen. Über gleiche Indizes ist stets zu summieren.

Damit ergibt sich die E u l e r 'sche Gleichung

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_{i,k} v_k + \pi_{ii} = F_i \quad (2)$$

F_i ist eine auf die Volumeneinheit bezogene äußere Kraft. Zu Gl. (2) wird nun die Kontinuitätsgleichung mit v_i multipliziert

$$(\rho v_k)_{,k} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad | \cdot v_i \quad (3)$$

und addiert, und es folgt:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + (\rho v_i v_k)_{,k} + \pi_{ii} = F_i \quad (4)$$

oder

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + (\rho v_i v_k + \pi_i \delta_{ik})_{,k} = F_i \quad (5)$$

mit

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}$$

Da die Lösung in jedem Fall irgendwie zeitlich periodisch ist, fällt im Zeitmittel das erste Glied in Gl. (5) fort, und man erhält (das Zeitmittel durch Überstreichen bezeichnet)

$$(\overline{\varrho v_i v_k} + \overline{p} \delta_{ik})_{ik} = \overline{F_i} \quad (6)$$

In der Klammer auf der linken Seite steht eine Größe vom Charakter eines Tensors, der bereits den gesuchten Spannungszustand beschreibt. Integriert man nämlich über ein raumfestes Gebiet G und formt nach G a u ß um, so stellt sich die Gesamtkraft als Oberflächenintegral über die Spannung dar:

$$\oint (\overline{\varrho v_i v_k} + \overline{p} \delta_{ik}) dS_k = \int \overline{F_i} dV \quad (6')$$

ganz analog wie bei den Spannungen der Elastizitätstheorie oder den M a x w e l l 'schen Spannungen der Elektrodynamik. Wir können also dem Schallfeld allgemein einen Spannungstensor zuschreiben gemäß:

$$T_{ik} = \overline{p} \delta_{ik} + \overline{\varrho v_i v_k} \quad (7)$$

T_{ik} mag auch Strahlungstensor heißen - an Stelle des eingebürgerten, aber nicht korrekten Begriffs "Strahlungsdruck" -.

3. Einfache Sonderfälle

a.) In einem gegebenen Schallfeld macht es meist keine Schwierigkeiten, die Größe $\overline{\varrho v_i v_k}$ zu berechnen, weil dazu die lineare Näherung ausreicht. Schwieriger ist es, \overline{p} zu bestimmen, weil die lineare Näherung dafür stets 0 liefert. In einem Sonderfall entfallen diese Schwierigkeiten. Betrachten wir dazu eine fortschreitende ebene Welle beliebiger Einfallrichtung, die auf einem total absorbierenden Schirm auffällt. Der Schallstrahl befinde sich im freien Medium, sodaß ein Druckausgleich mit der Umgebung mög-

lich ist. In diesem Fall ist jeder der beiden Summanden in Gl. (7) unabhängig vom Ort, insbesondere also $\bar{p} = \bar{\bar{p}} = 0$ (wegen Druckausgleich, $\bar{\bar{p}}$ bedeutet raumzeitliches Mittel). Es gilt also

$$T_{ik} = \overline{\rho v_i v_k} \quad (8a)$$

Die Kraftwirkung auf eine Fläche S_k ist dann

$$\bar{F}_i = \overline{\rho v_i v_k} S_k \quad (8b)$$

liegt also in Richtung der einfallenden Welle, nicht in Richtung der Flächennormalen wie beim gewöhnlichen Druck.*) Die Normalkomponente T_{nn} transformiert sich demnach mit dem \cos^2 des Einfallswinkels ϑ , sodaß

$$T_{nn} = \overline{\rho v^2} \cdot \cos^2 \vartheta \quad (8c)$$

- b.) Als zweiten Sonderfall betrachten wir den Strahlungsdruck auf eine ideal reflektierende Wand bei senkrechtem Einfall. Hier wird an der harten Wand $v = v_x(x=0) = 0$ Aus Gl. (7) wird

$$T_{ik} = \bar{p} \delta_{ik}$$

Der Spannungstensor reduziert sich vor der Wand auf eine reine Druckwirkung. Dies ist der einzige Fall, in dem man die Tensoreigenschaft außer acht lassen und den Strahlungsdruck durch eine geeignete Mittelwertbildung aus dem Schalldruck berechnen kann. [1, 11, 12, 13]

*) Man muß dazu voraussetzen, daß eine absorbierende Oberfläche Tangentialspannungen aufnehmen kann, z.B. eine poröse Oberfläche mit Luftreibung. Im Sinne der Eulerdarstellung ist eine feste aber poröse Oberfläche als Bild einer absorbierenden Belegung der mitschwingenden Wand vorzuziehen, denn man betrachtet ja ortsfeste Koordinaten.

Um eine Aussage über \bar{p} zu gewinnen, legen wir eine Hüllfläche, die auf der einen Seite an die reflektierende Wand anschließt, eine dazu parallele Fläche und dazu senkrechte Seitenflächen besitzt, und bilden das Integral (6'). Die Seitenflächen leisten dazu keinen Beitrag wegen $v_y = v_z = 0$ und $\bar{p} = \bar{p}(x)$. Bei der Abwesenheit äußerer Kräfte gilt dann

$$\bar{p}(0) = \bar{p}(x) + \overline{\rho v_x^2(x)} = \text{const} = \bar{p} + \overline{\rho v_x^2}$$

Damit

$$T_{ik} = (\bar{p} + \overline{\rho v_x^2}) \delta_{ik} \quad (9)$$

Nehmen wir wieder Druckausgleich mit der Umgebung an, so ist

$$\bar{p} = 0. \text{ Außerdem gilt } \overline{\rho v^2} = 2 \overline{E_{kin}} = \bar{E}$$

Man erhält das bekannte Ergebnis.

4. Der Strahlungstensor im allgemeinen ebenen Schallfeld

Wir erweitern nun unsere Berechnung von \bar{p} in Gl. (7) auf beliebige Einfallrichtung und beliebigen Reflexionsgrad der Wand, wobei jedoch die Schallwelle im Innern des Mediums keine Dämpfung besitzen soll.

Die Reflexionsfläche sei wieder gegeben durch $x = 0$. Zur Bildung des Integrals (6') legen wir wieder die gleiche Hüllfläche wie in Abschnitt (3b): eine Fläche längs $x = 0$, eine gegenüberliegende bei $x = a$ und dazu senkrechte Verbindungsflächen.

Dann gilt, indem man jeweils gegenüberliegende Flächenelemente zusammenfaßt, für den kräftefreien Fall

$$\left\{ [\bar{p}(a) - \bar{p}(0)] \delta_{ix} + \overline{\rho v_i v_x} \Big|_{x=a} - \overline{\rho v_i v_x} \Big|_{x=0} \right\} dF_x = 0$$

Der Integrand ändert sich nicht in y- und z-Richtung, daher tragen auch die Verbindungsflächen nichts zum Hüllenintegral bei. Jetzt wird über a gemittelt und speziell $1 = 1$ gesetzt. Dann folgt

$$\bar{p} + \overline{\rho v_x^2} = \bar{p}(0) + \overline{\rho v_x^2} \Big|_{x=0}$$

An der Betrachtung ändert sich nichts, wenn wir - um den Druckmittelwert \bar{p} an einer beliebigen Stelle x zu erhalten - die eine Seite der Hüllfläche nicht mit der Reflexionsfläche zusammenfallen lassen, sondern senkrecht zu einer beliebigen Koordinate x verlaufen lassen. Dann folgt allgemein

$$\bar{p}(x) = \bar{p} + \overline{\rho v_x^2} - \overline{\rho v_x^2} \Big|_x \quad (10)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in Gl. (7) ein, so stört noch formal die Bevorzugung der Koordinate x in der sonst koordinateninvarianten Schreibweise. Wir setzen daher eine beliebige Lage der Reflexionsfläche an, die durch den Stellungsvektor S_i mit $S_i S_i = 1$ charakterisiert sei. Dann ist die Normalkomponente der Schwelle $v_n = v_i S_i$ und wir erhalten mit Gl. (7):

$$T_{ik} = \left(\bar{p} + \overline{\rho (v_i S_i)^2} - \overline{\rho (v_i S_i)^2} \right) \partial_{ik} + \overline{\rho v_i v_k} \quad (11)$$

gültig für jede Stelle im Innern und am Rande. Die räumliche Mittelwertbildung darf ruhig über alle Koordinaten laufen, anstatt nur über die Reflexionsflächensenkrechte, da parallel dazu das Schallfeld sich nicht ändert. Mit Ausnahme von \bar{p} enthält Gl. (11) nur noch Größen, die sich aus Lösungen der bekannten linearisierten Form der Schallfeldgleichungen ausdrücken lassen.

Natürlich enthält Gl. (11) die Sonderfälle Gl. (8) und (9).

5. Die L a n g e v i n 'schen und die R a y l e i g h 'schen
Randbedingungen

Durch die Randbedingungen wird die noch fehlende Größe \bar{p} bestimmt. Im L a n g e v i n 'schen Fall ist der Schallstrahl von freiem ungestörten Medium umgeben, sodaß im stationären Feld ein Druckausgleich mit der Umgebung stattfinden kann. Es ist also

$$\bar{p} = 0 \quad (12a)$$

indem üblicherweise der außen herrschende Ruhedruck zu 0 normiert wird.

Im R a y l e i g h 'schen Fall ist der Schallstrahl durch eine harte Wand, etwa ein Rohr, begrenzt. Es kann also kein Druckausgleich stattfinden. Andererseits kann keine Materie nach außen abfließen, sodaß hier

$$\overline{\rho - \rho_0} = 0 \quad (12b)$$

Wir verwenden die allgemeine Entwicklung

$$n = c^2(\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial c^2}{\partial \rho} (\rho - \rho_0)^2$$

und führen in das quadratische Glied die lineare Näherung ein:

$$E_n = \frac{n^2}{2 \rho_0 c^2} \approx \frac{c^4 (\rho - \rho_0)^2}{2 c^2 \rho_0}$$

$$(\rho - \rho_0)^2 = 2 E_n \frac{\rho_0}{c^2}$$

Mitteln wir raumzeitlich unter Berücksichtigung von Gl. (12b) und setzen in die Reihe ein, so folgt

$$\bar{n} = \bar{E}_n \frac{\rho_0}{c^2} \frac{\partial c^2}{\partial \rho} = 2 \bar{E}_n \frac{\partial \log c}{\partial \log \rho} = \bar{E} \frac{\partial \log c}{\partial \log \rho} \quad (13)$$

wegen $2\bar{E}_n = \bar{E}_n + \bar{E}_{kin}$. Als Sonderfälle ergeben sich mit der üblichen Abkürzung

$$\frac{1}{2} \frac{\rho_0}{c^2} \frac{\partial^2 n}{\partial \varrho^2} = \frac{\partial \log c}{\partial \log \varrho} = \nu \quad \text{für}$$

ideales Gas, Adiabate

$$n \cdot V^\kappa = const \quad \nu = \frac{1}{2}(\kappa - 1)$$

Boyle'sches Gesetz

$$n = const \cdot \varrho \quad \nu = 0$$

Hooke'sches Gesetz

$$n = const - \frac{Const}{\varrho} \quad \nu = -1$$

6. Anwendung auf die schräg einfallende Schallwelle

Die teilabsorbierende Fläche mit dem Reflexionsfaktor $\mathcal{R} = R e^{i\varphi}$ liege wieder längs $x = 0$. Darauf falle eine Schallwelle der (Einfall-) Amplitude \hat{p} unter dem Einfallswinkel ϑ . Wir verwenden die Zeigerdarstellung der Schallfeldgrößen. Das Schallfeld ist dann gegeben durch

$$n = \hat{n} e^{iky \sin \vartheta} [e^{ikx \cos \vartheta} + \mathcal{R} e^{-ikx \cos \vartheta}] \quad (14)$$

wegen $\varrho \frac{\partial v_i}{\partial t} + p_{ii} \cong 0$ folgt:

$$v_x = \hat{n} \frac{k \cos \vartheta}{\omega \varrho} [e^{ikx \cos \vartheta} - \mathcal{R} e^{-ikx \cos \vartheta}] e^{iky \sin \vartheta}$$

$$v_y = \hat{n} \frac{k \sin \vartheta}{\omega \varrho} [e^{ikx \cos \vartheta} + \mathcal{R} e^{-ikx \cos \vartheta}] e^{iky \sin \vartheta}$$

Wir bilden daraus:

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{2} v_x v_x^* = \frac{\hat{n}^2}{2c^2 \varrho^2} \cos^2 \vartheta [1 + R^2 - 2R \cos(kx \cos \vartheta - \varphi)]$$

$$\overline{v_y^2} = \frac{1}{2} v_y v_y^* = \frac{\hat{n}^2}{2c^2 \varrho^2} \sin^2 \vartheta [1 + R^2 + 2R \cos(kx \cos \vartheta - \varphi)]$$

und schließlich:

$$\overline{v_x v_y} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} v_x v_y^* = \frac{\hat{n}^2}{2c^2 \varrho^2} \sin \vartheta \cos \vartheta [1 - R^2]$$

Dabei kann man noch einführen $\frac{\hat{n}^2}{2c^2 \varrho} = \overline{E_e} =$ Energiedichte des einfallenden Strahls.

Man erhält dann aus Gl. (11):

$$T_{ik} = [\overline{\hat{n}} + \overline{E_e} \cos^2 \vartheta \cdot 2R \cos(kx \cos \vartheta - \varphi)] \delta_{ik}$$

$$(15a) \quad \begin{cases} \overline{E_e} \cos^2 \vartheta [1 + R^2 - 2R \cos(kx \cos \vartheta - \varphi)] & ik = xx \\ + \overline{E_e} \sin \vartheta \cos \vartheta [1 - R^2] & ik = xy \\ \overline{E_e} \sin^2 \vartheta [1 + R^2 + 2R \cos(kx \cos \vartheta - \varphi)] & ik = yy \end{cases}$$

oder

$$T_{xx} = \overline{\hat{n}} + \overline{E_e} \cos^2 \vartheta [1 + R^2]$$

$$T_{xy} = \overline{E_e} \sin \vartheta \cos \vartheta [1 - R^2]$$

(15b)

$$T_{yy} = \overline{\hat{n}} + \overline{E_e} \cdot 2R \cos(kx \cos \vartheta - \varphi) + \overline{E_e} \sin^2 \vartheta [1 + R^2]$$

Die Normalkomponente transformiert sich wieder mit dem \cos^2 des Einfallswinkels. Das folgt nicht selbstverständlich aus dem allgemeinen Transformationsgesetz für Tensoren, da sich mit dem Einfallswinkel das ganze Schallfeld ändert. Eine Tangentialkomponente tritt nur auf, wenn keine ideale Reflexion vorliegt (und - trivialerweise - kein senkrechter oder streifender Einfall).

Als Sonderfälle für $R = 0$ bzw. $R = 1$ und $\vartheta = 0$ erkennt man sofort die im Abschnitt 3 betrachteten Fälle. Für die har-

te Wand bei $x = 0$ muß bei unserer Koordinatenwahl $\varphi = 0$ gesetzt werden.

Ist die Begrenzung des Mediums (der Schallgeschwindigkeit c_1) zugleich der Übergang zu einem zweiten (der Schallgeschwindigkeit c_2), so ist zur Bestimmung der gesamten auf die Grenzfläche einwirkenden Kraft auch die Spannung von der anderen Seite her zu berücksichtigen, d.h. wir lassen das Hüllintegral Gl. (6') zu einem schmalen, die Grenzfläche umschließenden Doppelblatt entarten, um die Flächenkraft \tilde{F}_i zu erhalten.

Nehmen wir eine nicht absorbierende Grenzschicht an, so ist

$$J_e = J_R + J_D = J_e (R^2 + D^2)$$

J = Intensität
 D = Transmissionsfaktor

folglich

$$E_D = \frac{J_D}{c_2} = \frac{J_e(1-R^2)}{c_2} = E_e(1-R^2) \frac{c_1}{c_2}$$

und damit speziell bei senkrechtem Einfall

$$\tilde{F}_n = E_e \left[1 - \frac{c_1}{c_2} + R^2 \left(1 + \frac{c_1}{c_2} \right) \right] \quad (16)$$

Je nach dem, ob c_1 größer oder kleiner als c_2 ist - insbesondere bei kleinem R - wirkt die Kraft in Senderichtung oder entgegengesetzt. Das ist auch experimentell durch die Versuche von H e r t z und M e n d e [8] nachgewiesen.

Die Darstellung der Spannungskomponenten Gl. (15) läßt noch eine sehr bemerkenswerte Eigenschaft erkennen. Soweit es die Kraftwirkungen auf die mehr oder weniger reflektierende Wand anbetrifft, kann man das Feld auffassen als lineare Überlagerung einer auffallenden und reflektierten Welle. Das ist keineswegs selbstverständlich, wie vielfach angesetzt wurde, da die Strahlungskräfte ja nicht linear mit den Feldgrößen zusammenhängen.

Einfallende Welle

reflektierte Welle

$$p_+ = \hat{p} e^{ik(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta)}$$

$$p_- = R \hat{p} e^{ik(-x \cos \vartheta + y \sin \vartheta)}$$

$$v_x = \frac{\hat{p}}{\rho c} \cos \vartheta \cdot e^{\dots}$$

$$v_x = R \frac{\hat{p}}{\rho c} (-\cos \vartheta) \cdot e^{\dots}$$

$$v_y = \frac{\hat{p}}{\rho c} \sin \vartheta \cdot e^{\dots}$$

$$v_y = R \frac{\hat{p}}{\rho c} \sin \vartheta \cdot e^{\dots}$$

Also ist

$$T_{xx} = \bar{p} + \overline{\rho v_x^2} \Big|_e + \overline{\rho v_x^2} \Big|_R = \bar{p} + E_e \cos^2 \vartheta + E_e R^2 \cos^2 \vartheta$$

$$T_{xy} = \overline{\rho v_x v_y} \Big|_e + \overline{\rho v_x v_y} \Big|_R = E_e \sin \vartheta \cos \vartheta (1 - R^2)$$

(15 c)

Dagegen

$$T_{yy}' = \bar{p} + \overline{\rho v_y^2} \Big|_e + \overline{\rho v_y^2} \Big|_R = \bar{p} + E_e \sin^2 \vartheta (1 + R^2)$$

Die letzte Zeile weicht vom Gleichungssystem (15 b) ab. Sie enthält nicht die Schwankung der Normalspannung senkrecht zur reflektierenden Wand. Diese hat allerdings auch selten physikalische Bedeutung.

Die Erscheinung, daß sich die auf die reflektierende Wand wirkenden Kräfte von einfallender und reflektierter Welle linear addieren, läßt sich auch leicht aus einem Gedankenversuch*) ablesen, den man auch auf das nicht ebene Schallfeld erweitern kann. Dazu betrachten wir einen Schallstrahl, der von einem Sender S fast senkrecht auf eine reflektierende Wand und von dort auf einen Absorber A fällt (Abb. I). Auf der linken Seite addieren sich die Kräfte,

*) In Abänderung einer Überlegung von Borgnis [4] zum Transformationscharakter des Strahlungsdruckes bei Änderung der Einfallrichtung

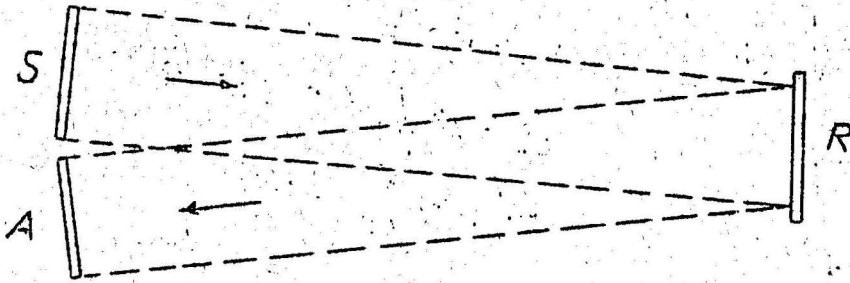


Abb. 1

also auch rechts bei der Überlagerung beider Wellen.

7. Der Strahlungsdruck und der Impuls einer Schallwelle

Wie soll man sich physikalisch das Zustandekommen eines mechanischen Spannungszustandes mit Tangentialkräften, wie es Gl. (15) darstellt, in einem flüssigen Medium vorstellen?

Die einzige Möglichkeit scheint in der Annahme eines Impulstransportes zu liegen.

Wenn aber die Deutung zutreffen soll, so muß der Transformationscharakter von Kräften, die ein Impulstransport auf begrenzende Wände ausübt der gleiche sein, wie bei den Kräften im Strahlungsfeld.

Betrachten wir dazu ein strömendes Medium der Dichte μ und Geschwindigkeit c_i , das unter dem Winkel α gegen eine absorbierende Wand mit Stellungsvektor S_k fließt. Die ausgeübte Kraft entspricht dann der Impulszunahme der Wand pro Zeiteinheit. Es ist also die Kraft pro cm:

$$F_i = \mu c_i (c_k S_k) \quad (16a)$$

$$c_k S_k = |c| \cos \alpha$$

Wir können also auch der Strömung eine formale Spannung

$$\tau_{ik} = \mu c_i c_k \quad (16b)$$

zuordnen. Vergleichen wir Gl. (16 b) mit Gl. (7), so zeigt das zweite Glied genau das gleiche Verhalten bei Änderung der Einfallrichtung, das erste jedoch ist ein von der Einfallrichtung unabhängiger skalarer Gleichdruck, der nicht in das Impulskonzept paßt. Der Impulsanaloge Anteil des Strahlungstensors ist im Gegensatz zum skalaren nicht vom speziellen Medium und nicht von den Randbedingungen abhängig.

Ein schwingendes Materieteilchen, das eine feste Ruhelage hat, kann jedoch im Zeitmittel nur einen verschwindenden Impuls besitzen, da

$$\frac{1}{T} \int m_0 v dt = \frac{m_0}{T} \int v dt = m_0 \bar{v} = 0$$

aber es kann trotzdem Impuls übertragen; man denke etwa an ein System gekoppelter Pendel.

Der mittlere Impulsstrom durch eine feste Fläche (senkrecht zur Ausbr. Richt.) ist für eine Schallwelle offenbar gegeben durch $\overline{\rho v |v|}$, was in der von uns betrachteten Näherung verschwindet. In der einen Halbperiode findet eine Strömung nach links, in der anderen eine nach rechts statt. Beide Halbwellen sind symmetrisch.

Die durch den Impulstransport ausgeübten Kräfte sind aber von der Richtung des Transportes unabhängig. In Gl. (16) kann c_1 durch $-c_1$ ersetzt werden, ohne an den Kräften etwas zu ändern. Will man die Kräfte auf eine Wand bestimmen, auf die (ideal reflektierte) Bälle geworfen werden, so kann man entweder nur den Impuls derjenigen zählen, die darauf zufliegen und doppelt bewerten oder aber den Impulsbetrag der zu- und wegfliegenden Bälle. Also ist der Betrag des Impulstransportes die für die Kräfte maßgebende Funktion; für die Schallwelle in Einfallrichtung:

$$\overline{|\rho v |v||} = \overline{\rho v^2}$$

Obwohl demnach - zumindest in der stationären Welle - im Zeitmittel weder ein resultierender Impuls der einzelnen Teilchen

noch ein resultierender Impulsstrom existiert, ist die Einführung einer "Ersatzimpulsdichte" sinnvoll, die die Welle mitführt und den eigentlichen tensoriellen Anteil des Strahlungsdruckes bestreitet.*)

Für die Ersatzimpulsdichte gilt dem Betrage nach:

$$|g| = \frac{\rho v^2}{c}$$

und mit Einführung der linearen Näherung $v = \frac{n}{\rho c}$ und Berücksichtigung der Richtung:

$$g_i = \frac{n v_i}{c^2} \quad (17)$$

Man bestätigt leicht, daß damit für die fortschreitende Welle und für die stehende, soweit es die Kräfte auf eine reflektierende Wand betrifft, die Strahlungsspannung sich richtig ergibt. Im letzten Fall muß man das Feld aus hin- und rücklaufender Welle zusammensetzen.

Einem begrenzten Wellenzug muß man schon deshalb einen Gl. (17) entsprechenden Impuls zuordnen, damit zusammen mit dem Strahlungsdruck auf eine Wand, auf die der Wellenzug auftrifft, der Impulssatz erfüllt ist - eine Überlegung, die schon auf P o y n t i n g [16] zurückgeht.

In der Tat läßt sich in diesem Fall der Impuls des Wellenzuges ganz allgemein aus der Euler-Gleichung in der Form Gl. (5) entnehmen. Mit Hilfe des Gauß'schen Satzes gewinnt man daraus mit Gl. (7):

$$\oint T_{ik} dS_k + \frac{d}{dt} \int \rho v_i dV = 0 \quad (18)$$

*) Bei unserer mit Bällen beworfenen Wand heißt das, daß man statt der reflektierten weitere Bälle auf die Wand fliegen läßt, die alle verschluckt werden.

für ein raumfestes Gebiet, in dem keine Volumenkräfte wirken. Die Flächennormale der Hüllfläche ist dabei nach außen gerichtet. Gl. (18) besagt: die resultierende Kraft, die das Gebiet auf die Berandung ausübt, entspricht der Impulsabnahme im Innern des Gebietes.

Auf den Impuls selbst kann man aus Gl. (18) also nur schließen, wenn er sich ändert, also im nichtstationären Fall. Die Impulsänderung eines begrenzten Wellenzuges, dessen Front etwa schon eine Absorptionsfläche erreicht hat, ist durch die Geschwindigkeit c des rückwärtigen Endes bestimmt. Aus Gl. (18) folgt damit für den begrenzten Wellenzug im freien Medium ($\bar{p} = 0$) eine "wirkliche" Impulsdichte entsprechend Gl. (17). Es gelingt auf diese Weise, den Impuls der Welle aus der linearen Näherung für die Lösung der Schallfeldgleichungen zu gewinnen.

Der Impuls der stationären Welle hat im Sinne von Gl. (18) den Charakter einer Integrationskonstanten, über die man freie Verfügung hat. Die Zuordnung einer Gl. (17) entsprechenden Impulsdichte ist eine vernünftige Wahl, weil dadurch die Unterscheidung zwischen der Welle mit freier Begrenzung und dem stationären Feld entfällt.*)

Es ist nun zunächst merkwürdig, daß im Rohr das skalare Glied $\bar{p} \mathcal{J}_{ik}$ in Gl. (7) nach dem Impulssatz Gl. (18) beim Wellenpaket einem Zusatzimpuls in Laufrichtung entspricht. Der vom Glied Gl. (17) verschiedene Charakter dieses Zusatzimpulses fällt besonders ins Auge, wenn die Absorptionsfläche des Rohres schräg zur Rohrachse ausgeführt wird. Abb. 2. Diese Verschiedenheit im Richtungsverhalten geht in Gl. (18) nicht ein, da

*) Übrigens verläuft der Schluß im elektromagnetischen Fall ganz analog. Auch hier kann man zwingend nur im nichtstationären Fall auf die Existenz eines Impulses aus den Maxwell'schen Spannungen schließen. Im stationären Fall besitzt der Impuls der Welle also auch nur den Charakter einer Ersatzgröße bzw. einer sinnvoll gewählten Integrationskonstanten.

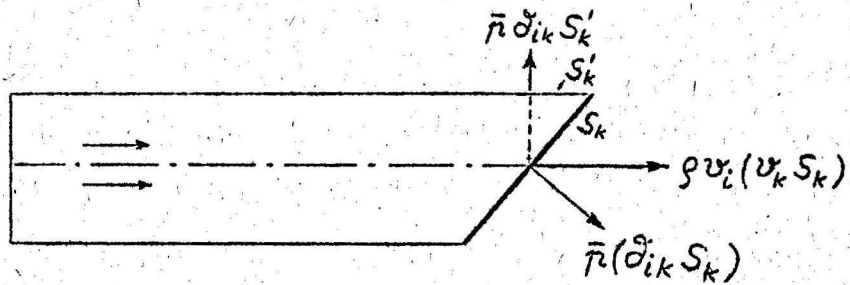


Abb. 2

dort nur eine integrale Aussage über die ganze Berandung enthalten ist. Daß aus dem allseitig wirkenden Glied $\bar{p} \delta_{ik}$ trotzdem ein Impuls mit einer ausgezeichneten Richtung (nämlich der Fortpflanzungsrichtung) entsteht, liegt daran, daß alle anderen Richtungen durch harte Wände abgefangen werden und nur in Laufrichtung freie Grenzflächen (Vorder- und Rückfront der Welle) zwischen gestörtem und ungestörtem Medium existieren.

Eine genauere Analyse ist für den senkrechten Einfall von S c h o c h [7] versucht worden. Das Ergebnis entspricht jedoch nicht den Forderungen des Impulssatzes.*) Hier sind also noch weitere Untersuchungen notwendig.

Im stationären Fall entfallen diese Schwierigkeiten, da dann der skalare mittlere Druck \bar{p} das ganze Rohr gleichmäßig erfüllt. Es wäre also nicht sinnvoll, den Ersatzimpuls um ein materieabhängiges Zusatzglied zu erhöhen.

*) Für die Impulsdichte ergibt sich nach S c h o c h nur der halbe Wert von $g = (\gamma + 1) E/c$, wie aus der Kraft $F = \bar{p} + \bar{g} v^2 = \gamma E + E$ folgen würde. In dieser Arbeit ist allerdings der Impulssatz scheinbar erfüllt dadurch, daß bei der Kraft auf die Absorptionsfläche ein Rechenfehler um den Faktor 2 auftritt.

L i t e r a t u r

1. Lord Rayleigh Phil. Mag. 10 (1905), S. 364
2. P. Langevin Rev. d'Acoustique 1 (1932), S. 105
u. S. 315
3. L. Brillouin Ann. Physique 4 (1925), S. 528
4. F.E. Borgnis J.A.S.A 24 (1952), S. 468
5. E. Karaskiewicz Bulletin Soc. Sci Series B Poznan
B. 14 (56/57), S. 74
6. Fubini-Ghiron Rev. d'Acoustique 6 (1937), S. 69
7. A. Schoch Z. f. Naturforschung
7a (1952), S. 273
8. G.Hertz u.
H. Mende Z. f. Physik 114 (1939), S. 354
9. R.T. Beyer Am.J.Phys. 18 (1950), S. 25
10. E. Skudrzyk Grndl. d. Akustik, Verlag Springer,
Wien, 1954, S. 905 ff
11. C. Schäfer Ann.d. Physik, 35 (1939), S. 473
12. G. Richter Z.f. Physik , 97 (1940), S. 115
13. F. Bopp Ann. d. Physik, 38 (1940), S. 495
14. F.E. Borgnis Z. f. Physik , 134 (1953), S. 363
15. J. Mercier Acustica , 4 (1954), S. 441
16. J.H. Poynting Phil. Mag. , 9 (1904), S. 393