

HEINRICH-HERTZ-INSTITUT FÜR SCHWINGUNGSFORSCHUNG  
BERLIN-CHARLOTTENBURG

# Technischer Bericht Nr. 110

Über die Schätzung der mittleren Impulsraten  
einzelner Atmosphericherde auf Grund von Beobachtungen  
der Impuls-Amplitudenverteilung in einem begrenzten  
Amplitudenbereich

von

Dr. J. FRISIUS

Berlin

1 9 6 9



Über die Schätzung der mittleren Impulsraten einzelner Atmosphericsherde auf Grund von Beobachtungen der Impuls-Amplitudenverteilung in einem begrenzten Amplitudenbereich

Zusammenfassung

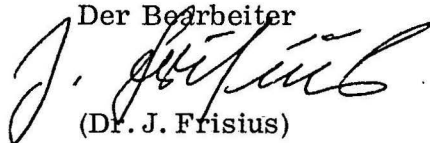
Nach einer Einführung in die unter der Sammelbezeichnung "Atmospherics-Aktivität" zusammengefaßten Phänomene werden die zu ihrer Beschreibung notwendigen, statistischen Parameter eingehend erläutert. Die Bestimmung dieser Parameter führt auf das Problem der Schätzung von Verteilungsparametern beschnittener Lognormal-Verteilungen. Diese Schätzung wird in drei Schritten durchgeführt:

1. Darstellung der beobachteten Verteilungskurven durch eine einfache Verteilungsfunktion, deren Parameter mit einer linearen Regressionsrechnung bestimmt werden können,
2. Anpassung einer Lognormal-Kurve an die einfache Verteilungsfunktion so, daß im Meßbereich außer den absoluten Werten auch noch die ersten drei Ableitungen gut übereinstimmen. Die Parameter dieser Lognormal-Verteilungskurve bilden die nullte Näherung für die zu bestimmenden Verteilungsparameter;
3. Schrittweise Verbesserung der nullten Näherungen durch Verwendung einer zweidimensionalen Regression.

Danach werden die Parameterschätzungen für beobachtete Herde vorgestellt und diskutiert.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

Der Bearbeiter



(Dr. J. Frisius)

Der Abteilungsleiter



(Prof. Dr. -Ing. F. W. Gundlach)

Der Institutsdirektor

i. V. 

(Prof. Dr. -Ing. F. W. Gundlach)

Berlin-Charlottenburg 28. Oktober 1969

On the estimation of the mean pulse frequencies  
of single atmospheric sources by observations  
of their pulse amplitude distribution in a  
limited range of amplitude

by  
J. Frisius

Abstract:

After a description of the physical phenomena called "atmospherics activity", the statistical parameters to be determined are extensively explained. The problem of estimating the parameters of truncated lognormal distributions is stated.

A solution is proposed involving three steps:

- (1) To approximate the observed distribution by a simple function the parameters of which can be found by linear regression;
- (2) Fitting a lognormal distribution curve to the simple function in such a way, that the absolute values and the first three derivatives of both functions reasonably agree in the observable range. The parameters of this lognormal curve are the zero order approximations to the inquired parameters.
- (3) Inserting the zero order approximations into a two dimensional linear regression for finding corrections and repeating this procedure until the corrections are sufficiently small.

Finally, parameter estimates for observed sources are presented and discussed.

## 1. Einleitung

Beobachtungen des natürlichen Störpegels im Frequenzbereich langer Radiowellen gehören zum Routineprogramm vieler geophysikalischer und meteorologischer Observatorien. Der hier vorgelegte Bericht ist ein Versuch, zu Diskussionen über die physikalische Interpretation derartiger Messungen beizutragen. Hierzu wird zunächst der Begriff der "Atmospherics-Aktivität" erläutert, danach die am Heinrich-Hertz-Institut entwickelte Beobachtungstechnik skizziert. Die Erfahrungen mit dieser Beobachtungstechnik veranlaßten uns, den Begriff des "Atmospherics-Herdes" einzuführen. Es geht nun darum, die so bezeichneten Gebilde mit statistischen Parametern zu beschreiben und für die letzteren eine praktikable Bestimmungsmethode vorzuschlagen.

Die Erklärung der zu bestimmenden statistischen Parameter nimmt sehr breiten Raum ein. Der Sprachgebrauch (z.B. Durchschnitt-Mittelwert, quadratische Streuung - Varianz) lehnt sich an den der "Allgemeinen Methodenlehre der Statistik" von Pfanzagl (1966) an, ist jedoch vorsichtshalber an Hand der hier zu behandelnden Beobachtungen noch einmal ausführlich erläutert. Die danach beschriebene Berechnungsmethode für Verteilungsparameter beschnittener Verteilungen basiert auf der Annahme einer logarithmisch normalverteilten Grundgesamtheit. Diese Annahme wird, wie sich zeigen wird, durch die Beobachtungen zwar nicht widerlegt, kann aber auch nicht streng bewiesen werden. Es wäre wünschenswert, sie zu ersetzen durch eine physikalische Theorie des Gewitterherdes, welche Aussagen über die statistischen Eigenschaften des ausgestrahlten elektromagnetischen Signalgemisches umfaßt. Als besonders erfreulicher Erfolg wäre es zu werten, wenn die hier geschilderten, neuen Beobachtungsmöglichkeiten zu derartigen Überlegungen anregen würden.



## 2. Die Atmosphericics-Aktivität

### 2.1 Erscheinungsform und Ursachen

Die Nachrichtenkapazität drahtloser Funkverbindungen wird in allen Frequenzbereichen durch Störungen natürlichen Ursprungs begrenzt. Diese haben bei hohen Frequenzen (UKW) den Charakter eines Rauschens, bei tiefen Frequenzen dagegen erscheinen sie als regellos aufeinanderfolgende Impulse verschiedener Stärke und spektraler Zusammensetzung. Diese impulsartigen Störungen, die "Atmosphericics", machen sich am stärksten im Frequenzbereich unter 30 kHz bemerkbar. In der Pionierzeit der drahtlosen Telegraphie stellten sie eine so ernsthafte Beeinträchtigung des Funkverkehrs dar, daß man sich schon frühzeitig mit ihrer systematischen Beobachtung beschäftigte. Seit den zwanziger Jahren gilt es als gesichert, daß ihr Ursprung in den Blitzentladungen zu suchen ist, welche jederzeit an verschiedensten Orten der Erde niedergehen und dabei kurzzeitig als riesige Antennen wirken. In dem genannten Frequenzbereich, dem "Längstwellenbereich", breiten sich die von den Entladungsströmen herrührenden elektromagnetischen Signale mit geringer Dämpfung aus und lassen sich über Entfernungen von mehreren tausend Kilometern hinweg empfangen. Auf diese Weise entsteht ein Gemisch aus kurzzeitigen Signalen mit regellos wechselnder Stärke, Dauer und Ausbreitungsrichtung, welches an allen Orten der Erde nahezu jederzeit mit einfachen Empfangsgeräten nachgewiesen werden kann. Dieses Signalgemisch bezeichnen wir mit dem Sammelbegriff "Atmosphericics-Aktivität".

Die Atmosphericics-Aktivität hängt ab

1. von der Verteilung der Gewitteraktivität über die Erdoberfläche,
2. von der Dämpfung, welche die Signale bei ihrer Ausbreitung erfahren.

Der erstgenannte Einfluß ist meteorologischer Art, der zweite ist durch den Ausbreitungsmechanismus für lange Radiowellen bestimmt. Dieser wiederum hängt sehr stark von dem physikalischen Zustand der Hochatmosphäre oberhalb von etwa 65 km ab. Dort ist die Luft infolge extraterrestrischer Strahlung so stark ionisiert, daß Längstwellen wie an einem Spiegel reflektiert werden. So lassen sich die großen Reichweiten langwelliger Radiosignale erklären.

Der Gedanke liegt nahe, diese großen Reichweiten auszunutzen, um aus Beobachtungen der Atmospheric-Aktivität mit einem grobmaschigen Netz weniger Stationen auf die Verteilung der Gewitteraktivität über die gesamte Erdoberfläche zu schließen. Hierzu ist eine Meßtechnik notwendig, mit deren Hilfe das Signalgemisch so analysiert wird, daß der Einfluß der Ausbreitungsdämpfung von dem der Gewitteraktivität, also der "Quellen der Atmospheric-Aktivität", getrennt werden kann. Eine derartige Meßtechnik wurde im Verlauf der letzten Jahre in der Abteilung HF des Heinrich-Hertz-Institutes, Berlin-Charlottenburg, entwickelt und führte zu der Konstruktion des "Atmospherics-Analysators" (Heydt, 1967, Heydt, Frisius, Volland und Harth, 1967).

Im folgenden Abschnitt wird die Wirkungsweise dieses Gerätes grob skizziert.

## 2.2 Die Beobachtung von Atmospheric-Herden mit dem Atmospheric-Analysator

Der Atmospheric-Analysator bestimmt für jedes einfallende Atmospheric, dessen Stärke eine gewisse Mindestschwelle überschreitet, die Einfallsrichtung und mehrere spektrale Parameter. Spektrale Parameter sind solche, die die Stärke und den zeitlichen Verlauf des einzelnen Signals charakterisieren.

Die Einfallsrichtung wird mit einem System gekreuzter Rahmenantennen und einem schmalbandig auf 11 kHz arbeitenden Richtungsdetektor bestimmt. Zur Messung spektraler Parameter dienen eine vertikale Stabantenne und bestimmte Kombinationen von Schmalbandverstärkern, deren Durchlaßfrequenzen vom Beobachter in weiten Grenzen geändert werden können. Eine eingehende Erläuterung würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Wir verweisen auf frühere Veröffentlichungen (Heydt, 1967, Frisius und Heydt, 1968 a, b) und beschränken uns hier auf einen bestimmten Typ von spektralen Parametern, dessen statistische Beobachtung in dieser Arbeit untersucht werden soll. Es handelt sich hierbei um einen Parameter, der zur Charakterisierung der "Stärke" des einzelnen Signals geeignet ist, nämlich um die "spektrale Amplitude".

Zu ihrer Bestimmung durchläuft das Signal einen Schmalbandverstärker (Bandbreite ca. 200 Hz), dessen Mittenfrequenz im Bereich zwischen 5 und 50 kHz gewählt werden kann, und wird hierbei stark verzerrt, d.h.: Es ruft am Verstärkerausgang einen (gleichgerichteten) Spannungsimpuls  $U_A$  hervor, dessen Dauer allein durch die Einschwing- und Abklingzeit des Verstärkers, nicht aber durch den Zeitverlauf des unverzerrten Eingangssignals bestimmt wird. Dies gilt unter der Voraussetzung, daß die Dauer des Signals kurz ist gegen die Einschwing- und Abklingzeiten des Verstärkers. Diese Voraussetzung ist bei den meisten Atmospheric erfüllt. Die Maximalspannung  $U$  des Impulses  $U_A$  ist dann dem Amplitudenspektrum des Eingangssignals im Bereich der Verstärkerfrequenz proportional, zeigt also die "spektrale Amplitude" an. Ein Gemisch von Signalen verschiedener Stärke mit verschiedenen Zeitverläufen erzeugt am Verstärkerausgang ein Gemisch von Impulsen verschiedener Impulshöhe  $U$  mit gleichartigen Zeitverläufen. Die "verzerrten" Impulse sind also gleichartige Individuen, die sich durch ein einziges, definiertes Merkmal unterscheiden. Die Verteilung dieses Merkmals,



der Impulsspannung  $U$ , gibt die Verteilung der Atmosphericics über alle möglichen Werte der spektralen Amplitude wieder.

Mit Hilfe des Richtungsanalysators werden die Atmosphericics außerdem nach ihrer Einfallsrichtung sortiert. Für jedes einfallende Signal wird ein Impuls abgeleitet, der der Einfallsrichtung proportional ist. Abb. 1 zeigt schematisch, wie der Richtungsimpuls ( $U_{\psi}$ ) und der Impuls  $U_A$  zu einer oszillografischen Anzeige des Atmosphericics benutzt werden. Der Richtungsimpuls  $U_{\psi}$  wird auf die x-Achse, der Amplitudenimpuls  $U_A$  auf die y-Achse eines Oszillografensystems gegeben. Ein Impulsgenerator erzeugt einen kräftigen, sehr kurzen Impuls in dem Moment, in dem der Impuls  $U_A$  sein Maximum  $U$  durchläuft. Benutzt man diesen Impuls zur Hellsteuerung des Kathodenstrahls, so erzeugt das Atmosphericic nur für einen sehr kurzen Moment einen Lichtpunkt auf dem Oszillografenschirm, dessen Lage eindeutig der Peilrichtung und der spektralen Amplitude

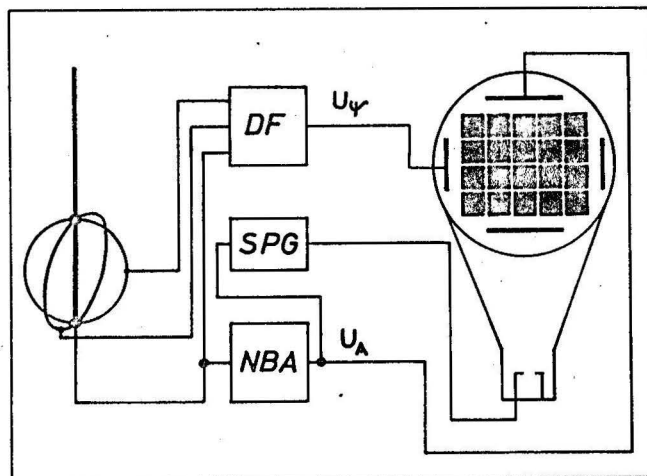


Abb. 1

Stark vereinfachtes Blockschaltbild des Atmosphericics-Analysators.

DF: Richtungsanalysator

SPG: Impulsgenerator für Hellsteuerung des Kathodenstrahls

NBA: Schmalbandverstärker zur Messung der spektralen Amplitude

zugeordnet ist. Die Verteilung der Atmosphericics über die Einfallsrichtung und über die beobachtbaren Werte der spektralen Amplitude wird bestimmt, indem der Oszillografenschirm mit einer Belichtungszeit von einigen Minuten fotografiert wird. Dann erscheinen auf dem Photo die Lichtpunkte von einigen tausend Atmosphericics und ergeben eine anschaulich eindrucksvolle Darstellung der gesuchten Verteilung.

Eine typische Aufnahme ist in Abb. 2 wiedergegeben. Deutlich erkennt man, daß die Atmosphericics-Aktivität auf einige schmale Richtungssektoren beschränkt ist. Darüber hinaus hat die Beobachtung weiterer spektraler Parameter, welche im Rahmen dieser Arbeit nicht näher erörtert werden sollen, gezeigt, daß in den Sektoren erhöhter Aktivität in der Regel jeweils nur kleine Entfernungsbereiche als Aktivitätsquellen in Frage kommen. Diese Erfahrungen berechtigen uns dazu, von "Atmosphericics-Herden" zu sprechen. Die gesamte Atmosphericics-Aktivität setzt sich aus den Aktivitäten einzelner Herde zusammen, die sich mit Hilfe des Atmosphericics-Analysators in den meisten Fällen einzeln beobachten lassen. Auf unseren Aufnahmen unterscheiden sich die Herde deutlich durch verschiedene Verteilungen der Atmosphericics über die spektrale Amplitude: Wir erkennen Herde mit vielen überwiegend schwachen Signalen und andere mit einem merklichen Anteil starker Signale, wobei von manchen Atmosphericics der durch die Oszillografenskala gegebene Meßbereich überschritten wird. Wir bemühen uns im folgenden um die Bestimmung statistischer Parameter, mit denen die Verteilung der spektralen Amplituden für einzelne Atmosphericics-Herde beschrieben werden kann.

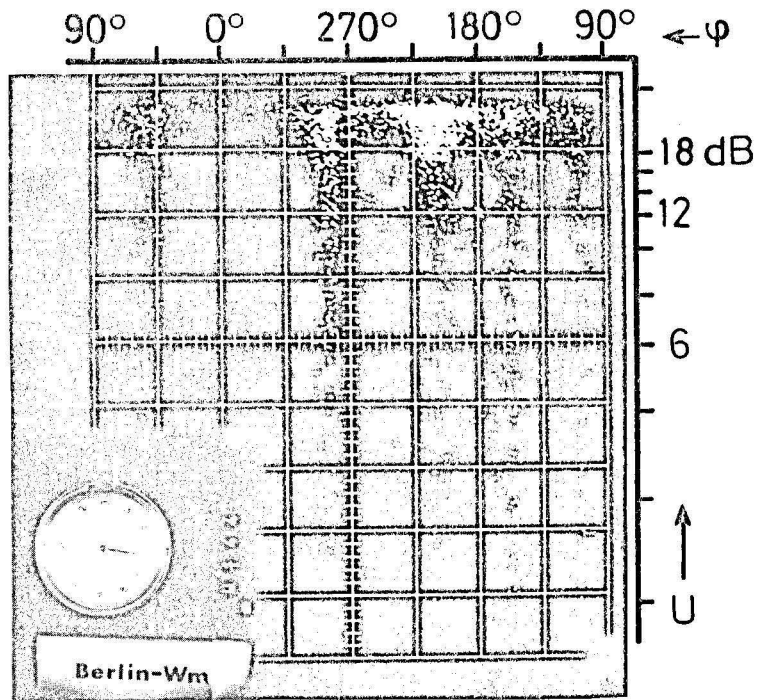


Abb. 2

Aufnahme einer Verteilung der spektralen Amplituden auf 9 kHz, Aufnahmedauer 5 Min.,  
Horizontale Achse: Einfallsrichtung  
Vertikale Achse: Impulsspannung U, die dB-Skala ist vom maximalen Ausschlag (8 Skt.) an abwärts gerechnet.



### 3. Statistische Parameter von Atmospheric-Herden

#### 3.1 Die Zählimpulszahl als Zufallsvariable

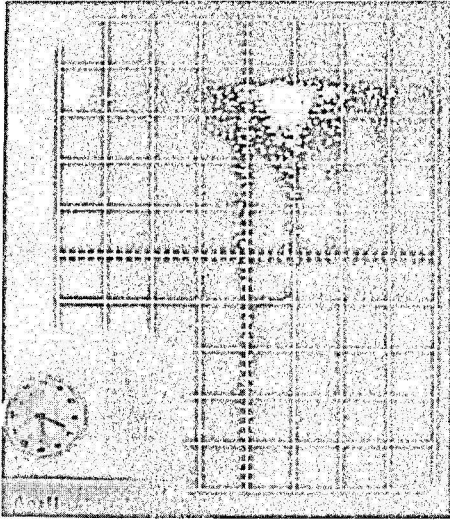
##### 3.11 Einführung der Zählimpulszahl

Wir diskutieren in diesem Abschnitt die nächstliegende, scheinbar einfachste Methode, die mittlere Impulsrate eines Herdes abzuschätzen: Da die Richtungsanzeige als Gleichspannungsimpuls vorliegt, ist es ohne Schwierigkeiten möglich, mit einer Diskriminatorschaltung einen schmalen Richtungssektor "auszublenden" (Heydt, in Frisius und Heydt, 1968c) und den darin enthaltenen Herd über eine bestimmte Zeit (z.B. 5 min) zu beobachten, z.B. alle Atmosphericics zu zählen, soweit sie von dem hierzu verwendeten Zählverfahren erfaßt werden können. Jedes Zählverfahren ist jedoch dadurch begrenzt, daß nur diejenigen Atmosphericics erfaßt werden, deren spektrale Amplitude einen gewissen Mindestwert nicht unterschreitet. Dieser Mindertwert ist von vielen, z.T. schwer erfaßbaren Einflüssen abhängig; Effektive Höhe der Antenne, Umgebungseinflüsse auf die Antenne, Eigenschaften der Vorverstärker, Ansprechempfindlichkeit des verwendeten Zählersystems. Nur wenn in diesem Sinne ein Atmosphericic "stark genug" ist, ruft es am Ausgang des Schmalbandverstärkers einen Impuls hervor, dessen Maximalspannung  $U$  ausreicht, um von dem Zählverfahren erfaßt zu werden. Einen solchen Impuls nennen wir "Zählimpuls", die Zahl der während der Meßzeit  $\Delta t$  ( $= 5 \text{ min}$ ) beobachteten Zählimpulse ist die "Zählimpulszahl", das Verhältnis Zählimpulszahl/Meßzeit ist die "Zählimpulsrate". Dem Mindestwert der spektralen Amplitude entspricht ein Schwellwert der Impulsspannung  $U$ , der überschritten werden muß, damit der Impuls mitgezählt wird. Diesen Schwellwert bezeichnen wir als  $U_j$ , die ihm zugeordnete Zählimpulszahl als  $N_j$ . (Mit der Verwendung des ganzzahligen Indexes  $j$  deuten wir vorwegnehmend die später einzuführende schrittweise Veränderung der Schwellspannung an).

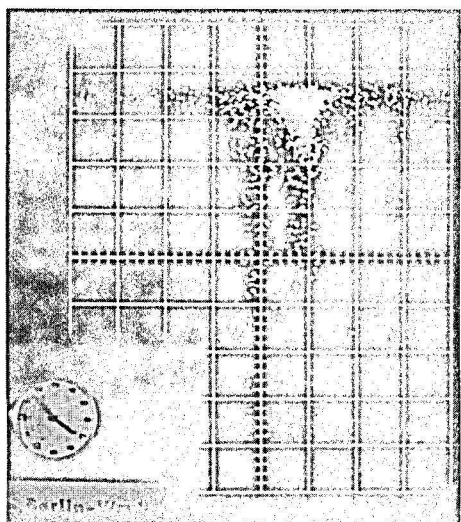
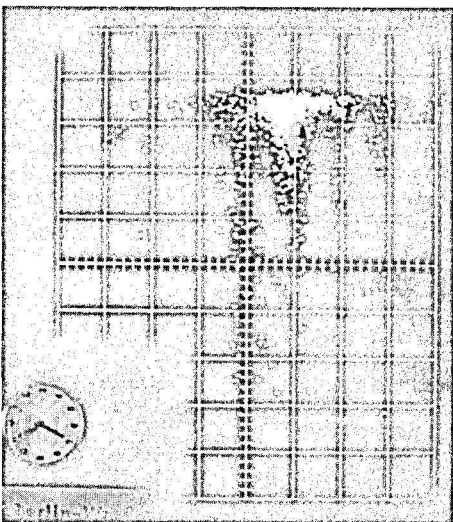
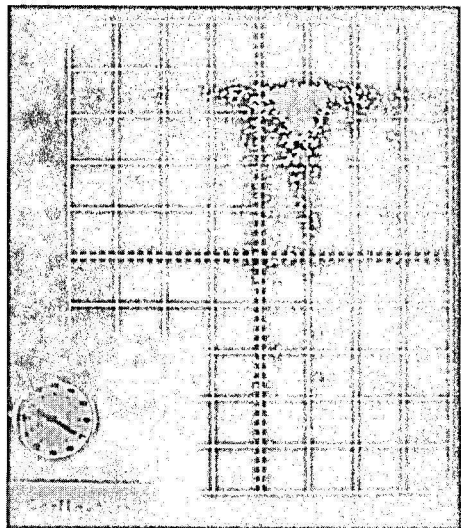
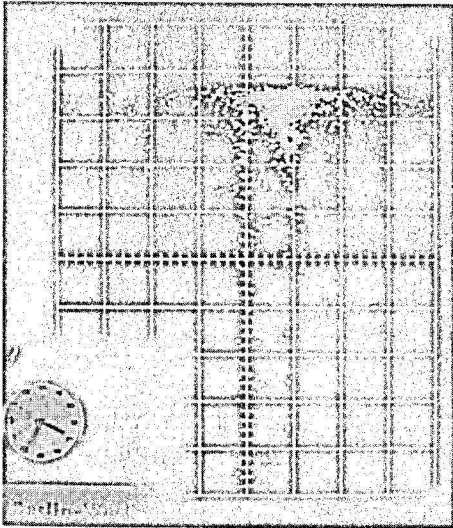
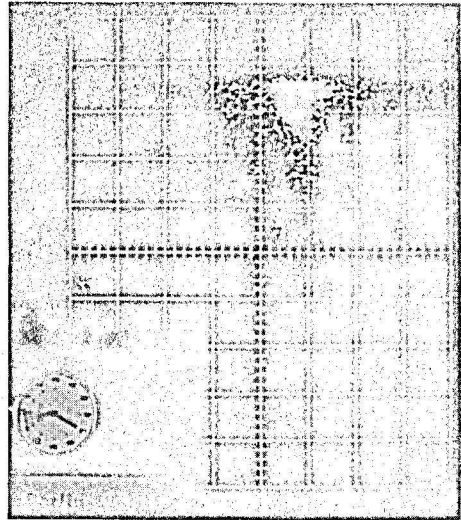
Um den statistischen Charakter der Zählimpulszahl anschaulich vorzuführen, zeigen wir in Abb. 3 einen Ausschnitt aus einer Serie von Fünf-Minuten-Photos, welche mit einer automatischen Kamera mehrere Tage hindurch lückenlos aufeinanderfolgend aufgenommen wurden.

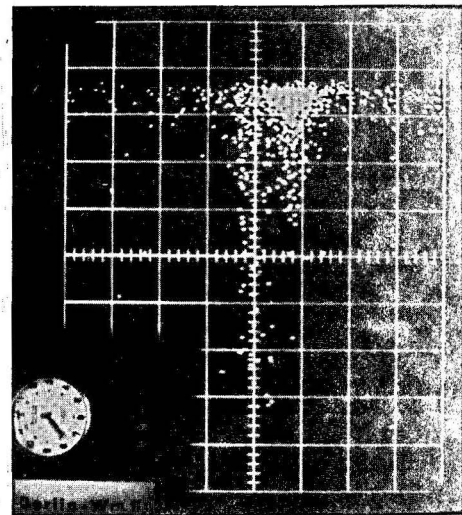
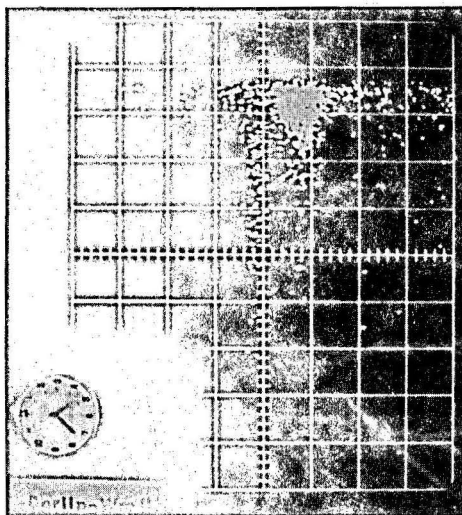
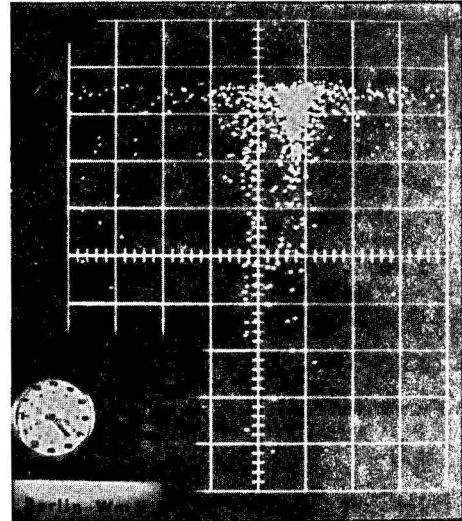
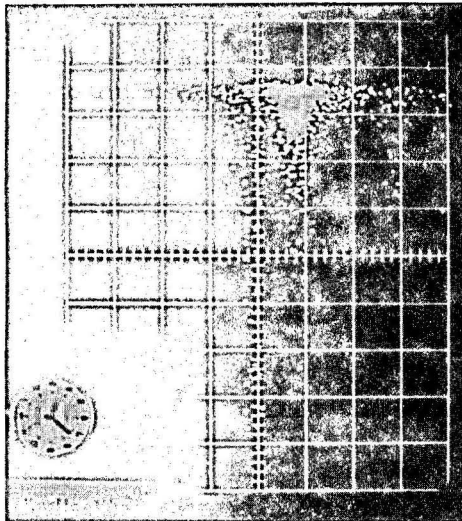
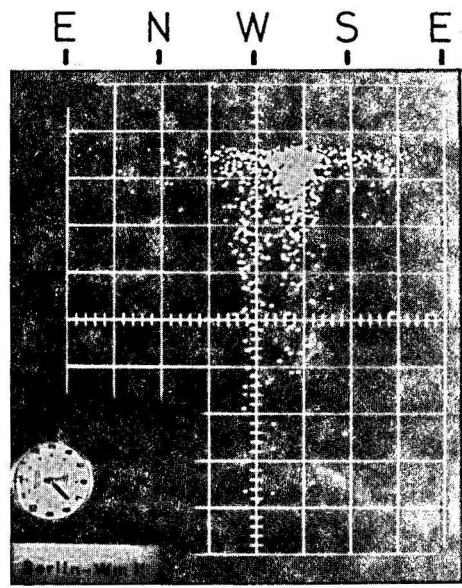
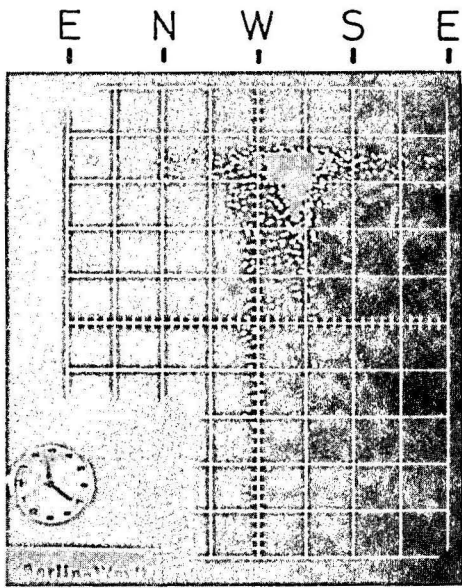
Abb. 3 (S. 8 und 9): Ausschnitt aus einer Serie fortlaufend hintereinander aufgenommener 5-min-Photos

E N W S E



E N W S E







Im Verlauf dieser Tage ließ sich ein Herd über etwa 6 Stunden (also auf etwa 120 Bildern) verfolgen, Für jede Einzelaufnahme dieses Zeitraumes wurde die Zählimpulszahl zu einer willkürlich gewählten Schwelle (2 Skalenteile auf der Amplitudenachse des Photos) bestimmt (in diesem Fall durch Zählen der Punkte). Wie Abb. 4 zeigt, schwanken die Zählergebnisse um einen Mittelwert, der jedoch selbst offensichtlich einem zeitlichen Trend unterworfen ist. Dieser Trend wirkt verbreiternd auf die Verteilung der Zählimpulszahlen (Abb. 4, rechts), welche uns einen Eindruck von dem Schwankungsbereich gibt, über den die Zählergebnisse streuen können. Dauerbeobachtungen der Atmosphericis-Aktivität, wie die eben beschriebenen, lassen sich nur ausnahmsweise und relativ kurzzeitig durchführen. Die Regel sind stichprobenartige Messungen mit halbstündlichem, stündlichem oder noch längerem Abstand, also einzelne, nicht wiederholte Bestimmungen der Zählimpulszahl. Im folgenden Unterabschnitt stellen wir die Begriffe und Überlegungen zusammen, die zur Beurteilung einer derartigen vereinzelt Beobachtung notwendig sind.

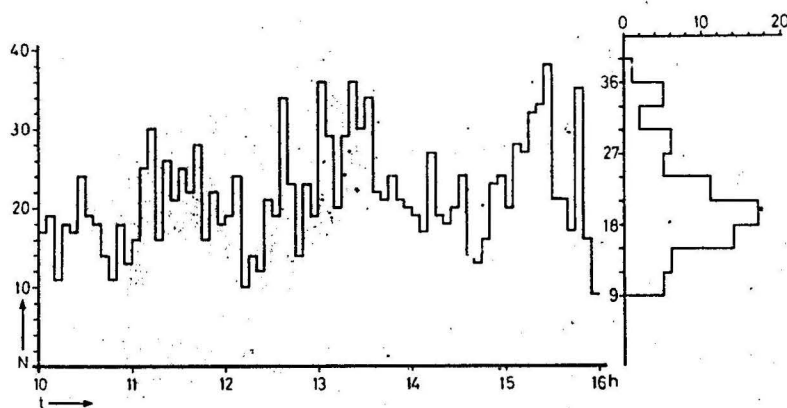


Abb. 4

Mehrstündige Beobachtung eines Herdes;  
Zeitabhängigkeit der Zählimpulszahl zur Schwelle 2 Skt (entspricht 12 dB in Abb. 2). Rechts: Verteilung der Zählergebnisse.

### 3.12 Die statistischen Parameter der Zählimpulszahl

Wir denken uns die Bestimmung der Zählimpulszahl  $M$ -mal wiederholt unter der idealisierenden Annahme, daß jeglicher Trend vernachlässigt werden könnte. Nur unter dieser Bedingung hat es Sinn, aus den  $M$  Einzelbestimmungen einen Durchschnitt zu bilden

$$\bar{N}_j = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M N_{ij} = \frac{1}{M} S_{Nj}$$

sowie die quadratische Streuung

$$\bar{s}_j^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (N_{ij} - \bar{N}_j)^2$$

wobei  $N_{ij}$  das Ergebnis der  $i$ -ten Wiederholung der Bestimmung der Zählimpulszahl ist. Die Zählimpulszahl fassen wir also als eine Zufallsvariable auf, eine einzelne Bestimmung als eine einmalige Realisation der Zufallsvariablen. Wir wollen im folgenden derartige Variablen durch ein darübersetztes Fragezeichen kennzeichnen:  $N_{ij}$  ist eine Realisation der Zufallsvariablen  $\overset{?}{N}_j$ . Wir denken uns weiterhin die Zahl  $M$  der Wiederholungen bis ins Unendliche gesteigert und gelangen so zu der Erklärung der beiden statistischen Parameter, durch welche die Zufallsvariable  $\overset{?}{N}_j$  charakterisiert wird:

Im Grenzfall unendlich häufiger Wiederholung der Realisation der Zufallsvariablen  $\overset{?}{N}_j$  strebt der Durchschnitt  $\bar{N}_j$  gegen den Mittelwert  $\mu_{Nj}$ , die quadratische Streuung  $\bar{s}_j^2$  gegen die Varianz  $\sigma_{Nj}^2$ :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} (\bar{N}_j) = \mu_{Nj}, \quad \lim_{M \rightarrow \infty} (\bar{s}_j^2) = \sigma_{Nj}^2$$

Der Durchschnitt und die quadratische Streuung sind experimentelle Schätzgrößen für die beiden charakteristischen Parameter  $\mu_{Nj}$  und  $\sigma_{Nj}^2$  der Zufallsvariablen  $\overset{?}{N}_j$ . Der Mittelwert  $\mu_{Nj}$  ist die "mittlere Zählimpulszahl", teilt man ihn durch die Dauer  $\Delta t$  der Einzelmessung, so erhält man die "mittlere Zählimpulsrate". Diese beiden

Größen können also grundsätzlich nur geschätzt werden.

Nun scheidet die experimentelle Schätzung mittels Wiederholung in unserem Falle des immer störenden Trends wegen aus. Stattdessen werden wir später rechnerische Schätzgrößen einführen, für die wir schon hier die Symbole vorstellen:

$m_{Nj}$  = rechnerische Schätzgröße für  $\mu_{Nj}$

$s_{Nj}^2$  = rechnerische Schätzgröße für  $\sigma_{Nj}^2$

### 3.13 Die Signalgesamtzahl und ihre statistischen Parameter

Je niedriger man die Schwellspannung  $U_j$  wählt, desto größer werden die beobachteten Realisationen  $N_j$  der Zählimpulszahl  $\bar{N}_j$ , desto größer wird also auch deren Mittelwert  $\mu_{N_j}$ . Dem sind jedoch, wie schon angedeutet, Grenzen gesetzt. Schwache Signale sind derartig häufig, daß die von ihnen hervorgerufenen, verzerrten Impulse am Ausgang des Schmalbandverstärkers einander überlappen. Die Zählimpulszahl bleibt dann unterhalb der entsprechenden Zahl einfallender Signale. Werden elektromechanische Zähler verwendet, so wirken deren unvermeidbare Totzeiten im gleichen Sinne. Das gilt insbesondere für die Schwelle  $U = 0$  V. Diese wird von den spektralen Amplituden aller während der Zeit  $\Delta t$  von dem beobachteten Herd ausgesendeten Signale überschritten. Wir bezeichnen deren Anzahl, die "Signalgesamtzahl", mit  $N_{tot}$ . Auch diese Größe ist als Realisation einer Zufallsvariablen,  $\bar{N}_{tot}$ , anzusehen, jedoch liegt die entsprechende beobachtete Zählimpulszahl für die Schwelle 0 V um einen unbekanntem Betrag darunter.

Die Signalgesamtzahl  $\bar{N}_{tot}$  ist mit einer Varianz  $\sigma_{N_{tot}}^2$  um den Mittelwert  $\mu_{N_{tot}}$  verteilt. Teilt man diesen Mittelwert durch die Meßdauer  $\Delta t$ , so erhält man die "mittlere Impulsrate" des Atmospheric-Herdes, um dessen Abschätzung wir in dieser Arbeit bemüht sind. Diese Abschätzung ist erheblich komplizierter als die der mittleren Zählimpulsrate, da die Realisationen  $N_{tot}$  prinzipiell nicht beobachtet werden können. Beobachtbar sind nur die Realisationen  $N_j$  der Zählimpulszahlen für genügend hochliegende Schwellwerte  $U_j$ . Die mit diesen Beobachtungen grundsätzlich verbundenen Unsicherheiten haben einen erheblichen Einfluß auf die Schätzung der Signalgesamtzahl. Deswegen werden sie im folgenden Abschnitt näher erläutert.



### 3.14 Die Vertrauensintervalle der Zählimpulszahlen

Wir greifen auf die Vorstellung zurück, daß wir die Zählimpulszahl  $\bar{N}_j$  bei vernachlässigbarem Trend M-mal beobachten könnten. Dann hätten wir innerhalb des Meßzeitraumes  $M\Delta t$  insgesamt

$$S_{Nj} = \sum_{i=1}^M N_{ij}$$

Impulse mit Impulsspannungen oberhalb  $U_j$  beobachtet. Im gleichen Zeitraum wären von dem idealisierten Atmospheric-Herd

$$S_{Ntot} = \sum_{i=1}^M N_{itot}$$

Signale ausgesendet worden (hierbei ist  $N_{itot}$  die Gesamtzahl der von dem Herd während der i-ten Wiederholung ausgesendeten Signale). Im Grenzfall unendlich häufiger Wiederholung der Beobachtung strebt das Verhältnis  $S_{Nj}/S_{Ntot}$  gegen einen Grenzwert, nämlich

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{S_{Nj}}{S_{Ntot}} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{S_{Nj}^M}{S_{Ntot}^M} = \frac{\sqrt[M]{S_{Nj}}}{\sqrt[M]{S_{Ntot}}} = q_j$$

Dieses Verhältnis ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Atmospheric eine spektrale Amplitude oberhalb der durch  $U_j$  definierten Schwelle hat.

Die Zahl der Beobachtungen, bei denen gerade  $N_j$  Atmospheric eine spektrale Amplitude oberhalb der durch  $U_j$  definierten Schwelle haben, nennen wir  $\Delta^M(N_j, U_j)$ . Das Verhältnis dieser Zahl zur Gesamtzahl M der Beobachtungen strebt im Grenzfall unendlich häufiger Wiederholung ebenfalls gegen einen Grenzwert:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\Delta^M(N_j, U_j)}{M} = P(N_j, U_j) = \binom{\sqrt[M]{S_{Ntot}}}{N_j} q_j^{N_j} (1 - q_j)^{(\sqrt[M]{S_{Ntot}} - N_j)}$$

Dieser Grenzwert ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß während der Dauer  $\Delta t$  einer Einzelmessung  $N_j$  Atmospheric mit einer spektralen Amplitude oberhalb der durch  $U_j$  definierten Schwelle beobachtet werden.

Die Funktion  $P(N_j, U_j)$  ist ein theoretisches Verteilungsmodell für die ganzzahlige Zufallsvariable  $N_j$ , nämlich die binomische Verteilung. Wie schwierig es ist diese mit der Erfahrung zu vergleichen, sollte mit den Betrachtungen zu Beginn dieses Abschnittes aufgezeigt werden. Wir verlangen jedoch von dem Modell nicht mehr, als Anhaltspunkte für eine Schätzung der Unsicherheit, mit der die beobachteten  $N_j$ -Werte behaftet sind. Hierfür reichen die folgenden Vereinfachungen aus:

Der Mittelwert  $\mu_{Nj}$  der Variablen  $N_j$  wird durch die "Grundwahrscheinlichkeit"  $q_j$  des theoretischen Verteilungsmodells folgendermaßen dargestellt:

$$\mu_{Nj} = \mu_{Ntot} q_j$$

ihre Varianz durch

$$\sigma_{Nj}^2 = \mu_{Ntot} q_j (1 - q_j)$$

Wenn  $q_j$  genügend weit unter 1 liegt, so kann das theoretische Modell durch die Poissonverteilung angenähert werden

$$P(N_j, U_j) = \frac{(\mu_{Nj})^{N_j}}{N_j!} \exp(-\mu_{Nj}),$$

diese wiederum, sofern  $N_j$  größenordnungsmäßig 10 und größer ist, durch eine Gaußverteilung

$$P(N_j, U_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_{Nj}}} \exp\left(-\frac{(N_j - \mu_{Nj})^2}{2\mu_{Nj}}\right)$$

Für genügend große  $N_j$  ist die Poissonverteilung eine um den Mittelwert  $\mu_{Nj}$  nahezu symmetrische Verteilung mit einer Varianz, die gleich dem Mittelwert ist.

Diese Eigenschaften benutzen wir zur Abschätzung eines Vertrauensintervalles für den unbekanntem Mittelwert  $\mu_{Nj}$ . Wenn nämlich unsere Annahmen zutreffen, so liegt eine Realisation  $N_j$  der Zufallsvariablen  $N_j$  mit  $p\%$  Wahrscheinlichkeit zwischen den Grenzen

$$\mu_{Nj} - w_p \sigma_{Nj} = \mu_{Nj} - w_p \sqrt{\mu_{Nj}} \quad \text{und}$$

$$\mu_{Nj} + w_p \sigma_{Nj} = \mu_{Nj} + w_p \sqrt{\mu_{Nj}}$$

Hierbei ist  $w_p$  die  $p\%$ -Quantile der Normalverteilung, d.h. es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-w_p}^{w_p} \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) dw = p\%$$

(Bsp.:  $w_p = 1$  für  $p = 68$ ,  $w_p = 1.96 \approx 2$  für  $p = 95$ )

Die Ungleichung

$$\sqrt{u_{Nj}} - w_p \sqrt{\frac{u_{Nj}}{N_j}} \leq N_j \leq \sqrt{u_{Nj}} + w_p \sqrt{\frac{u_{Nj}}{N_j}}$$

läßt sich umkehren:

Ist eine Realisation  $N_j$  gegeben, so liegt der unbekannte Mittelwert  $\sqrt{u_{Nj}}$  der Variablen  $N_j$  mit  $p\%$  Wahrscheinlichkeit zwischen

$$N_j + \frac{w_p^2}{2} - \sqrt{N_j + \frac{w_p^2}{4}} \quad \text{und} \quad N_j + \frac{w_p^2}{2} + \sqrt{N_j + \frac{w_p^2}{4}}$$

Das damit gegebene Intervall nennen wir das  $p\%$ -Vertrauensintervall für den Mittelwert  $\sqrt{u_{Nj}}$ . Falls der beobachtete Wert  $N_j$  genügend groß ist, so liegt das Vertrauensintervall nahezu symmetrisch dazu und hat eine Breite ungefähr proportional zu der Wurzel aus  $N_j$ . Diese Annahme werden wir bei der Schätzung der Signalgesamtzahl benutzen.

### 3.2 Die spektrale Amplitude als Zufallsvariable

#### 3.2.1 Abhängigkeit der Grundwahrscheinlichkeit vom Schwellwert

Da die Signalgesamtzahl  $\bar{N}_{\text{tot}}$  prinzipiell nicht durch Beobachtungen realisiert werden kann, kann ihr Mittelwert  $\mu_{\bar{N}_{\text{tot}}}$  nur indirekt geschätzt werden. Er hängt mit den Mittelwerten  $\mu_{\bar{N}_j}$  der beobachtbaren Zählimpulszahl  $\bar{N}_j$  über die im letzten Abschnitt erklärte Grundwahrscheinlichkeit  $q_j$  zusammen

$$\mu_{\bar{N}_j} = \mu_{\bar{N}_{\text{tot}}} q_j$$

Auf gleiche Weise hängen natürlich die beiden Zufallsvariablen selbst miteinander zusammen.

$$\bar{N}_j = \bar{N}_{\text{tot}} q_j$$

Die Grundwahrscheinlichkeit  $q_j$  ist nun eine Funktion der Schwellspannung  $U_j$ , mit folgenden zwei Eigenschaften

- a) sie ist monoton fallend mit anwachsendem  $U_j$  (je größer die Schwellspannung, desto kleiner ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Impulsspannung  $U$  darüber liegt)
- b) sie ist 1 für  $U_j = 0$  V (jeder überhaupt empfangene Impuls hat eine Spannung  $U$  größer 0, negative Spannungswerte haben keinen physikalischen Sinn in diesem Zusammenhang).

Die indirekte Schätzung der mittleren Signalgesamtzahl besteht in einer Schätzung des Verlaufs der unbekannt Grundwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Schwellspannung

$$q_j = q(U_j).$$

Hierzu muß man Realisationen der Zählimpulszahl für möglichst viele, einen möglichst großen Amplitudenbereich überdeckende Schwellspannungen  $U_j$  gleichzeitig bestimmen, die Ergebnisse mit einer geeigneten Schätzfunktion für die Grundwahrscheinlichkeit näherungsweise



darstellen und ihren Verlauf zum Schwellwert 0 V hin extrapolieren.

Die technische Voraussetzung hierfür wurde durch G. Heydt geschaffen (Frisius und Heydt, 1968c). Der von ihm entwickelte digitale Klassierzusatz zum Atmosphericics-Analysator gestattet, schmale Richtungssektoren auszublenden und die empfangenen Impulse nach Impulsspannungen  $U$  in 40 Klassen (zwischen 0 und 4 V) zu klassifizieren.

### 3.22 Experimentelle Summen- und Intervallverteilungen der spektralen Amplitude

Abbildung 5 zeigt ein typisches Beispiel einer beobachteten Summenverteilungskurve, nämlich die Abhängigkeit von 40 beobachteten Zählimpulszahlen  $N_j$  von der Schwellspannung  $U_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ). Außerdem sind die Grenzen eingezeichnet, innerhalb derer mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% die unbekanntes Mittelwerte  $\mu_{N_j}$  der Zufallsvariablen  $N_j$  zu finden sind. Die logarithmische Darstellung läßt erkennen, wie die relative Breite der Vertrauensintervalle nach großen Schwellen (kleinen Zählimpulszahlen) hin zunimmt. Die beiden ersten Zählimpulszahlen sind ungültig, da die entsprechenden Impulsspannungen (0.0 V und 0.1 V) vom Zähler nicht erfaßt werden. Erst von der Schwelle  $U_0$  ab sind die Wertepaare  $N_j, U_j$  als experimentelle Grundlage zur Schätzung des Funktionsverlaufes  $q(U)$  brauchbar. Subtrahiert man die beobachtete Zählimpulszahl  $N_j$  von der für die vorhergehende Schwelle,  $N_{j-1}$ , so erhält man die Intervallbesetzung für das  $j$ -te Intervall,  $n_j$ . Diese ist eine Realisation der Zufallsvariablen

$$n_j = N_{j-1} - N_j$$

deren Mittelwert und Varianz wir mit  $\mu_{n_j}$  und  $\sigma_{n_j}^2$  bezeichnen.

Wenn die Intervalle sehr eng sind, so sind die Wertepaare  $n_j, U_j$  eine experimentelle Grundlage zur Schätzung der Funktionswerte.

$$\mu_{n_j} = \mu_{N_{tot}} \left( \frac{dq}{dU} \right)_{U=U_j} \Delta U = \mu_{N_{tot}} z(U_j) \Delta U$$

Hierbei ist  $z(U_j) \Delta U$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Impuls eine Spannung zwischen  $U_{j-1} = U_j - \Delta U$  und  $U_j$  hat.

Für sehr enge Intervalle werden jedoch die Intervallbesetzungen zu klein. Das  $p\%$ -Vertrauensintervall wird wie für  $N_j$  berechnet:

$$n_j + \frac{w^2 p}{2} - w_p \sqrt{n_j + \frac{w^2 p}{4}} \leq \mu_{n_j} \leq n_j + \frac{w^2 p}{2} + w_p \sqrt{n_j + \frac{w^2 p}{4}}$$

Wird es erheblich größer als der beobachtete Zahlenwert - das ist unterhalb  $n_j = 10$  der Fall, wenn man  $p = 95$  wählt - so ist

die Messung nicht zuverlässig genug, und man wird breitere Intervalle zu wählen haben. Auf diese Weise ist in Abb. 5 die als Treppenkurve gezeichnete Intervallverteilung für eine Intervallbreite von 0,3 V berechnet. Auch hier sind die 95%-Vertrauensintervalle für  $\mu_{nj}$  eingezeichnet worden. Allerdings hängen diese Mittelwerte jetzt mit der Grundwahrscheinlichkeitskurve  $q(U)$  über deren Ableitung  $z(U)$  etwas komplizierter zusammen:

$$\mu_{nj} = \mu_{Ntot} \int_{U_{j-1}}^{U_j} z(U) dU$$

Diese Formel geht für schmale Intervalle wieder in die vorher angegebene über.

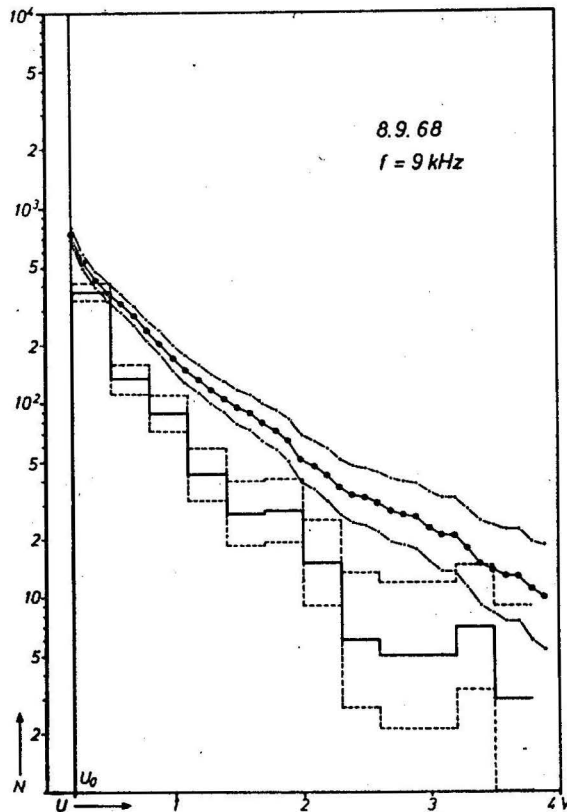


Abb. 5

Experimentell aufgenommene Summen- und Intervallverteilung der spektralen Amplituden eines Herdes, mit 95%-Vertrauensgrenzen.

### 3.23 Formulierung des Schätzproblems

Bisher hatten wir nur die Zählimpulszahlen, Signalgesamtzahlen und Intervallbesetzungen als (ganzzahlige) Zufallsvariable behandelt, die Impulsspannung als Klassifizierungsmerkmal. Aus den Betrachtungen des letzten Abschnitts geht jedoch hervor, daß die Impulsspannung selbst den Charakter einer Zufallsvariablen hat: Jedes gezählte Atmospheric erzeugt einen Impuls, dessen Maximalspannung  $U$  eine Realisation der Zufallsvariablen  $\overset{?}{U}$  darstellt. Diese Variable ist um den Mittelwert

$$\mu_U = \int_0^{\infty} U z(U) dU$$

mit der Varianz

$$\sigma_U^2 = \int_0^{\infty} (U - \mu_U)^2 z(U) dU$$

verteilt.

Die Zufallsvariable  $\overset{?}{U}$  wird während einer Beobachtung  $N_{\text{tot}}$ -mal realisiert, jedoch nur ein Teil dieser Realisation ist der Beobachtung zugänglich, nämlich nur diejenigen Realisationen, die oberhalb der durch das Zählverfahren vorgegebenen Mindestschwelle  $U_0$  liegen. Eine solche Verteilung wird als "beschnitten" bezeichnet (englisch: truncated distribution). Außerdem sind die Realisationen nicht einzeln gegeben, sondern zu Intervallbesetzungen "gruppiert". Die Zahl der gleichbreiten Intervalle nennen wir  $J$ , mit der Intervallnummer  $J + 1$  bezeichnen wir das Intervall zwischen  $U_J$  und  $+\infty$ , mit 0 das Intervall zwischen 0 und  $U_0$ . Ist nur die Besetzung der Klasse 0 unbekannt, so ist die Verteilung "einseitig beschnitten", ist außerdem noch die Besetzung der Klasse  $J+1$  unbekannt, so ist sie "zweiseitig beschnitten". Bei photographischer Datenspeicherung liefert der Atmospherics-Analysator i.A. zweiseitig beschnittene Verteilungen, wegen des begrenzten Anzeigebereiches des Oszillosgraphenschirmes. Bei Verwendung des digitalen Klassierzusatzes erhalten wir einseitig beschnittene Verteilungen.



Unsere Aufgabe lautet jetzt:

Aus den Wertepaaren  $(N_j, U_j)$ , welche eine beschnittene, gruppierte Verteilung darstellen, ist eine Schätzung  $\bar{N}_{\text{tot}}$  für die mittlere Signalgesamtzahl  $\mu_{N_{\text{tot}}}$  und eine Schätzfunktion  $Q(U)$  für die Grundwahrscheinlichkeitsfunktion  $q(U)$  zu bestimmen.

An die Schätzfunktion müssen wir mehrere Anforderungen stellen:

1. Sie muß 1 sein für  $U = 0$  und monoton mit wachsendem  $U$  abnehmen.
2. Man muß ihre Ableitung  $Z(U)$  als Schätzfunktion für  $z(U)$  angeben können.
3. Man muß einem Schätzwert für  $\mu_U$

$$m_U = \int_0^{\infty} U Z(U) dU$$

und für  $\sigma_U^2$

$$s_U^2 = \int_0^{\infty} (U - m_U)^2 Z(U) dU$$

angeben können.

4. Die beobachteten Realisationen  $N_j$  der Variablen  $\bar{N}_j$  sollen durch die Schätzwerte für die Mittelwerte  $\mu_{N_j} = \mu_{N_{\text{tot}}} q(U_j)$ ,

$$m_{N_j} = \bar{N}_{\text{tot}} Q(U_j)$$

befriedigend approximiert werden.

### 3.24 Parameter der logarithmischen Verteilung

Eine weitere Forderung folgt aus der Theorie der Ausbreitung von Radiowellen. Man kann nämlich zeigen, daß langwellige Signale beim Durchlaufen einer Übertragungsstrecke der Länge  $\rho$  in erster Näherung exponentiell gedämpft werden, d.h. die Feldstärke  $E$  nimmt beim Durchlaufen der Strecke  $\rho$  ab wie

$$E \sim \exp(-\alpha \rho)$$

(Frisius und Heydt, 1968 a, b). Hierbei ist  $\alpha$  eine Dämpfungskonstante, die von der Frequenz und den Eigenschaften des Übertragungsweges abhängt. Durchlaufen nun die von einem Atmospheric-Herd ausgesendeten Signale alle eine nahezu gleiche Strecke  $\rho$ , so werden die spektralen Amplituden in einem schmalen Frequenzband alle auf den gleichen Bruchteil ihres Anfangswertes herabgedämpft, ihre Logarithmen werden alle um den gleichen Betrag, nämlich  $\alpha \rho$ , vermindert. Das heißt: Die Verteilung der Logarithmen der spektralen Amplitude wird durch den Ausbreitungsvorgang der Kurvenform nach nicht geändert, sondern nur nach kleineren Werten hin verschoben. Das heißt weiter: Die Verteilung der Logarithmen der Impulsspannungen  $U$  gibt, bis auf eine additive Konstante, die Verteilung der Logarithmen der spektralen Amplituden am Ursprungsort des Atmospheric-Herdes wieder. Die additive Konstante ist im wesentlichen die Wirkung des Übertragungsweges.

Zur einwandfreien Formulierung einer logarithmischen Verteilung der Impulsspannungen führen wir die dimensionslose normierte Spannung  $u$  ein

$$u = \frac{U}{1V}$$

und stellen nun die weiteren wichtigen Forderungen an die gesuchten Schätzfunktionen:

5. Aus  $Q(U)$  und  $Z(U)$  müssen sich die Verteilungen von  $\ln(u)$  ableiten lassen.

6. Für den logarithmischen Mittelwert  $\mu$  und die logarithmische Varianz  $\sigma^2$

$$\mu = \int_0^{\infty} \ln\left(\frac{U}{IV}\right) z(U) dU, \quad \sigma^2 = \int_0^{\infty} \left(\ln\left(\frac{U}{IV}\right) - \mu\right)^2 z(U) dU$$

müssen Schätzfunktionen

$$m = \int_0^{\infty} \ln\left(\frac{U}{IV}\right) z(U) dU, \quad s^2 = \int_0^{\infty} \left(\ln\left(\frac{U}{IV}\right) - m\right)^2 z(U) dU$$

berechnet werden können.

Die beiden zuletzt genannten Parameter charakterisieren die Verteilung der Zufallsvariablen

$$\bar{x} = \ln\left(\frac{\bar{U}}{IV}\right) = \ln(\bar{u}).$$

Wir erwähnen abschließend noch, daß die Berechnung der Parameter  $m$  und  $s^2$  aus den Wertepaaren  $N_j, U_j$  mit einem möglichst einfachen Algorithmus durchführbar sein sollte, damit eine routinemäßige Beobachtung zahlreicher Herde überhaupt ermöglicht wird.

#### 4. Mathematische Verteilungsmodelle und die Schätzung ihrer Parameter

##### 4.1 Die Lognormalverteilung

##### 4.1.1 Einführung

Das bekannteste Modell einer stetigen Verteilung ist die Gaußsche Normalverteilung. Für die Beschreibung der Verteilung der Impulsspannung  $\hat{U}$  ist sie jedoch nicht zu brauchen, weil sie für negative Werte nicht verschwindet und symmetrisch um den Mittelwert ist. Ein zur Beschreibung unserer beobachteten Verteilungen geeignete "schiefe" Verteilung erhalten wir jedoch, wenn wir annehmen, daß die Logarithmen der normierten Impulsspannungen normalverteilt sind: Diese Annahme ist der im letzten Abschnitt begründeten Forderung gut angepaßt, da die Parameter einer solchen Verteilung gerade mit den dort eingeführten übereinstimmen. Wir vermuten also, daß die normierte Impulsspannung  $\hat{u}$  eine "Lognormalverteilung" hat:

$$q(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^{\infty} \exp\left(-\frac{(\ln(u_f) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{du_f}{\sigma u_f}$$

$$z(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(u) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\sigma u}$$

Der Mittelwert der Impulsspannung  $\hat{U}$  ist dann

$$\mu_U = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)v$$

ihre Varianz

$$\sigma_U^2 = (\exp(2\mu + \sigma^2))(\exp(\sigma^2) - 1)v^2$$

(Aitchinson und Brown, 1957, pg. 8).

Ersetzen wir darin  $\mu$  und  $\sigma^2$  durch die entsprechenden Schätzgrößen  $m$  und  $s^2$ , so erhalten wir die Schätzfunktionen  $Q(U) = Q_{\text{lgN}}(u)$  und  $Z(U) = Z_{\text{lgN}}(u)$  für  $q(u)$  und  $z(u)$ . Bezeichnen wir weiterhin die



gesuchte Schätzgröße für  $\sqrt{u_{\text{Ntot}}}$  mit  $N_{\text{lgno}}$  so erhalten wir die Lognormal-Schätzfunktion für die Zählimpulszahl

$$N_{\text{lgno}}(u) = N_{\text{lgno}} \int_u^{\infty} z_{\text{lgno}}(u_f) du_f = N_{\text{lgno}} Q_{\text{lgno}}(u)$$

wobei

$$z_{\text{lgno}}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(u) - m)^2}{2s^2}\right) \cdot \frac{1}{su}$$

#### 4.12 Verlauf der Lognormalverteilung als Funktion der Schwellspannung

Wir können hier nicht versuchen, unsere Annahme über  $q(u)$  durch ein physikalisches Modell des Atmospheric-Herdes zu rechtfertigen, sondern nur zeigen, daß die Schätzfunktion  $Q_{1gn}$  geeignet ist, die beobachteten Summenverteilungen wiederzugeben.

Zu diesem Zweck betrachten wir die erste und zweite Ableitung des Logarithmus der Schätzfunktion  $N_{1gn}$ :

$$\text{mit } w = \frac{\ln(u) - m}{s} \quad \text{und} \quad z(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) = -\frac{dQ(w)}{dw} :$$

$$\ln(N_{1gn}) = \ln(N_{1gno}) + \ln(Q(w))$$

$$\frac{d^2(\ln(N_{1gn}))}{du^2} = \frac{z(w)}{s^2 u^2} \frac{(w + s)Q(w) - z(w)}{Q^2(w)}$$

Das Verhalten dieser Größen machen wir uns leicht für große Werte von  $w$  (d.h., weit im Negativen liegende Werte von  $m$ ) klar: Für große  $w$  kann man die Schätzfunktion  $Q(w)$  folgendermaßen entwickeln (Abramowitz-Stegun, 1965, pg. 932):

$$Q(w) = \frac{z(w)}{w} \left(1 - \frac{1}{w^2} + \frac{3}{w^4} + \dots\right)$$

Setzt man diese Reihe in die obigen Ausdrücke ein und bricht die Entwicklung nach dem ersten Gliede ab, so erhält man

$$\frac{d(\ln(N_{1gn}))}{du} \approx -\frac{w}{su} = -\frac{\ln(u) - m}{s^2 u}$$

$$\frac{d^2(\ln(N_{1gn}))}{du^2} \approx \frac{w}{su^2} = \frac{\ln(u) - m}{s^2 u^2}$$

Die Ableitung der Kurve  $\ln(N_{1gn})$  ist negativ, die Krümmung positiv solange  $w > 0$ , d.h.,  $\ln(u) > m$  ist. Da  $\ln(u)$  langsamer ansteigt als

u selbst, nehmen der Betrag der Ableitung und der Krümmung nach großen u-Werten hin ab.

Die positive Krümmung ist allen bisher beobachteten  $N_j U_j$ -Kurven gemeinsam. Es ist daher zu erwarten, daß diese durch Schätzkurven mit negativen Schätzparametern  $m$  dargestellt werden können. Diese Erwartung findet eine weitere Bestätigung durch den Verlauf der in Abb. 6 wiedergegebenen theoretischen Kurven, welche zur Orientierung über die zu erwartenden Größenordnungen und zur Prüfung der weiter unten beschriebenen Schätzmethoden berechnet worden sind.

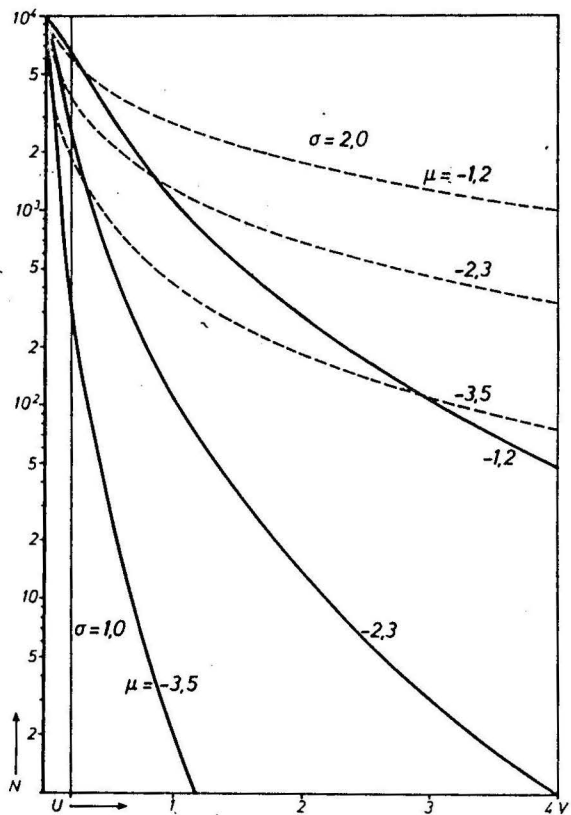
Die theoretischen Kurven stellen den Mittelwert  $\mu_N$  als Funktion der Schwellspannung  $U$  dar, wobei für die Grundwahrscheinlichkeit  $q(u)$  die oben angegebene Lognormalverteilung zugrundegelegt wurde:

$$\mu_N(U) = \mu_{Ntot} q(u)$$

Für den Mittelwert  $\mu_{Ntot}$  wurde die Zahl 10 000 eingesetzt, für  $\mu$  und  $\sigma$  die in der Abb. 6 angegebenen Werte. Auch diese Kurven lassen erkennen, daß man - zumindest durch Probieren - zu jeder beobachteten Summenverteilung Schätzparameter für  $\mu$  und  $\sigma$  finden kann, die den Kurvenverlauf angenähert wiedergeben.

Abb. 6

Theoretische Summenverteilungskurven; Lognormalverteilung für verschiedene Werte von  $\mu$  und  $\sigma$ .



#### 4.13 Beziehung zwischen Anstieg und Krümmung der Summenverteilungskurve und dem Schwellwert

Da drei Schätzparameter gesucht sind,  $N_{lgn}$ ,  $m$  und  $s$ , wird man erwarten, daß zu ihrer Bestimmung die Zählimpulszahlen zu mindestens drei Schwellen nötig sind, und daß, wenn mehr als drei Zählimpulszahlen gegeben sind, eine Ausgleichsrechnung durchführbar sein müßte. Das scheitert jedoch an der Schwierigkeit, die Gleichungen für unsere Schätzfunktionen  $Q_{lgn}$  und  $Z_{lgn}$  einfach nach  $m$  und  $s$  aufzulösen. Wir werden stattdessen versuchen, mit Ausgleichsmethoden ein Maß für die Krümmung und den Anstieg der beobachteten Kurven zu gewinnen und hieraus die Schätzparameter  $m$  und  $s$  abzuleiten.

Wir bilden hierzu die erste und zweite Ableitung der Schätzkurve  $N_{lgn}(u)$ :

$$\text{mit } w = \frac{\ln(u) - m}{s} \quad ;$$

$$\frac{d(N_{lgn}(u))}{du} = -N_{lgn} \frac{Z(w)}{su}, \quad \frac{d^2(N_{lgn}(u))}{du^2} = N_{lgn} \frac{Z(w)}{s^2 u^2} (w + s)$$

und erhalten folgende Differentialgleichung ( ' bedeutet Differentiation nach  $u$ )

$$\frac{N_{lgn}''}{N_{lgn}'} = - \frac{(w + s)}{su}, \quad \text{daraus: } -(1 + u \frac{N_{lgn}''}{N_{lgn}'}) = \frac{\ln(u) - m}{s^2}$$

Die linksstehende Größe hängt linear vom Logarithmus der Schwellspannung ab. Die Ableitungen kann man mit den beobachteten Intervallbesetzungen  $n_j$ , die zweite Ableitung mit den Differenzen zwischen aufeinanderfolgenden Intervallbesetzungen abschätzen und dann eine Ausgleichsgerade gegen die Logarithmen der Schwellspannungen berechnen.

Dieses Verfahren ist jedoch keineswegs zu empfehlen, weil die statistische Unsicherheit bei der Bestimmung der Intervallbesetzungen  $n_j$  eine nochmalige Differenzbildung zwischen benachbarten Intervallbesetzungen sinnlos werden läßt. Wir wählen daher den Um-

weg, die beobachteten Wertepaare  $(N_j, U_j)$  zunächst durch ein einfacheres Verteilungsgesetz zu beschreiben, dessen Parameter sich mit einem Ausgleichsverfahren ermitteln lassen. Aus der ersten und zweiten Ableitung dieser Kurve werden wir dann mit Hilfe der obenstehenden Differentialgleichung die Schätzparameter  $m$  und  $s$  ableiten.

## 4.2 Die Exponentialverteilung

### 4.21 Einführung

Mit einem sehr einfachen Gesetz beschrieb Volland (1964) die ersten Beobachtungen einzelner Atmospheric-Herde mit dem Atmospheric-Analysator. Wenn man nämlich die Amplitudenverteilungen nur in einem engen Amplitudenbereich auszählen kann, so tritt die Krümmung weniger in Erscheinung, und bei halblogarithmischer Auftragung der Zählimpulszahlen erhält man nahezu eine Gerade. Als Schätzfunktion  $m_N(U)$  erhalten wir dann

$$m_N(U) = N_{\text{exp}}(U) = N_{\text{expo}} \exp\left(-\frac{U}{U_m}\right)$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß  $U_m$  den Mittelwert dieser Verteilung darstellt.

Nach Inbetriebnahme des digitalen Klassiergerätes konnten zahlreiche Herde über einen größeren Amplitudenbereich beobachtet werden. alle zeigten bei kleinen Spannungen ( $U \leq 1$  V) eine deutliche positive Krümmung der Summenverteilungskurve.

Wir erwähnen zunächst einen Versuch, diese Krümmung durch ein quadratisches Zusatzglied in dem exponentiellen Ansatz zu erfassen. Man hat dann zwei unbekannte Parameter für den Kurvenverlauf, die sich mittels einer Regressionsrechnung aus den Logarithmen der beobachteten Zählimpulszahlen ermitteln lassen. Leider gaben die so berechneten Kurven die Beobachtungen im entscheidenden Bereich, nämlich bei kleinen Spannungen, so schlecht wieder, daß ein Vergleich ihrer ersten beiden Ableitungen mit denjenigen von Lognormalverteilungen sinnlos war. Testberechnungen, die weiter unten noch besprochen werden, erwiesen die Unbrauchbarkeit eines derartigen Ansatzes.

Als wesentlich besser erwies sich dagegen folgende Form einer Exponentialverteilung

$$N_{\text{exp}}(U) = N_{\text{expo}} Q_{\text{exp}}(U) = N_{\text{expo}} \exp\left(-\left(\frac{U}{U_m}\right)^\chi\right)$$

mit den zwei unbekanntem Parametern  $U_m$  und  $\chi$  und der Schätzgröße  $N_{\text{expo}}$  für  $N_{\text{tot}}$ . Diese Verteilung führt auf folgende Schätzwerte



für den Spannungsmittelwert  $\mu_U$  und die Varianz  $\sigma_U^2$  :

$$m_U = U_m \sqrt{\left(\frac{1}{\chi} + 1\right)}, \quad s_U^2 = U_m^2 \left( \sqrt{\left(\frac{2}{\chi} + 1\right)} - \left(\sqrt{\left(\frac{1}{\chi} + 1\right)}\right)^2 \right)$$

Der Vorteil dieses Ansatzes ist, daß die daraus folgenden Kurven eine sehr große Ähnlichkeit mit Lognormalverteilungskurven haben, so daß es sinnvoll ist, die erste und auch die zweite Ableitung beider Verteilungsarten miteinander zu vergleichen. Ein Nachteil ist, daß zur Bestimmung von  $\chi$  und  $U_m$  nicht nur die Zählimpulszahlen  $N_j$ , sondern auch die Klassenbesetzungen  $n_j$  mit ihrer relativ größeren Unsicherheit in die Regressionsrechnung eingehen. Dem muß dadurch Rechnung getragen werden, daß man eine Gewichtsfunktion einführt, welche dafür sorgt, daß die mit großer Unsicherheit behafteten Werte entsprechend geringeren Einfluß auf das Ergebnis haben. Aus diesem Grunde wurde die statistische Unsicherheit der Zählimpulszahlen und der Klassenbesetzungen so ausführlich diskutiert.

Bevor wir auf Einzelheiten der Berechnung eingehen, sei erwähnt, daß die zuletzt genannte Form der Exponentialverteilung von Volland eingeführt wurde (Volland, 1966), wobei er  $\chi = 0.5$  verwendete. Mit  $\chi = 2$  ist die Exponentialverteilung unter der Bezeichnung "Rayleigh-Verteilung" bekannt (URSI, 1962). Man kann jedoch sofort sehen, daß diese Verteilung für unsere Aufgabe nicht in Frage kommt. Differenziert man nämlich den Logarithmus der Schätzfunktion  $N_{\text{exp}}$  zweimal nach  $U$ , so erhält man

$$\frac{d^2(\ln(N_{\text{exp}}))}{dU^2} = - \frac{\chi \cdot (\chi - 1)}{U_m^\chi} U^{\chi - 2}$$

Die positiven Krümmungen aller bis jetzt beobachteten Summenverteilungen lassen sich nur mit  $\chi < 1$  beschreiben.

Hieraus folgt eine Beschränkung des Bereiches, innerhalb dessen man Lognormalverteilungen durch Exponentialverteilungen annähern kann. Die Verteilungsdichte der letzteren wird nämlich für Spannungen nahe  $U = 0$  V sehr groß:

$$\frac{d(N_{\text{exp}})}{dU} = -\chi \frac{U^{\chi - 1}}{U_m^\chi} \exp\left(-\left(\frac{U}{U_m}\right)^\chi\right) \quad (1)$$

Die Verteilungsdichte der Lognormalverteilung dagegen geht gegen 0. Wir können die Exponentialverteilung mit  $\chi < 1$  nur als eine empirische Funktion betrachten, die zur Charakterisierung beobachteter Verteilungskurven mit zwei, relativ leicht berechenbaren Parametern geeignet ist. Zur Extrapolation der Beobachtungen zu kleinen Spannungen hin, ist die Lognormalverteilung vorzuziehen. Abbildung 7 zeigt einige Exponential-Verteilungskurven, berechnet für  $N_{\text{expo}} = 10\ 000$ , deren Verlauf denen der Lognormalkurven in Abb. 6 in etwa entspricht.

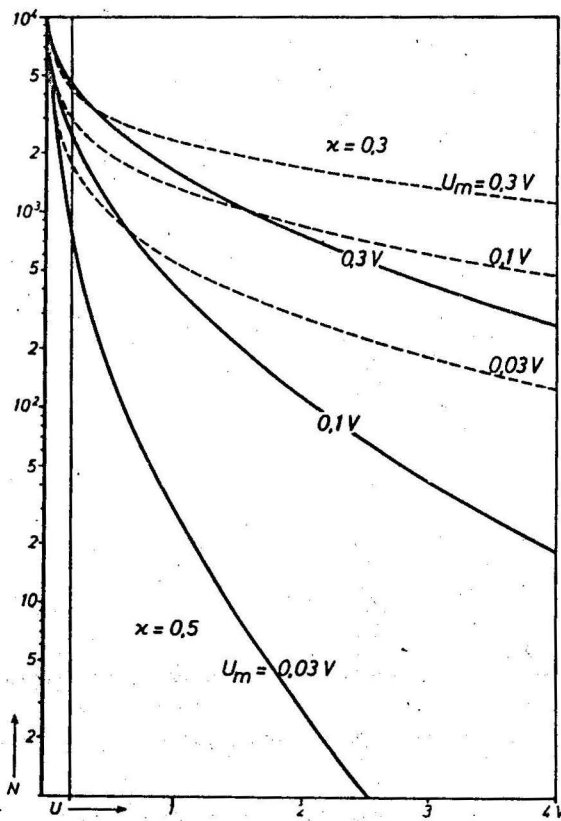


Abb. 7  
Exponentialverteilungen für verschiedene  
Werte von  $\chi$  und  $U_m$ .

#### 4.22 Berechnung der Parameter der Exponentialverteilung mittels linearer Regression

Die exponentielle Schätzfunktion für die Summenverteilungskurve ergibt einen linearen Zusammenhang zwischen dem Logarithmus der Schwellspannung und dem der logarithmischen Ableitung der Summenkurve:

$$\begin{aligned} (u &= U/lV, u_m = U_m/lV) \\ y &= \ln \left| \frac{d(\ln(N_{\text{exp}}))}{du} \right| = (\chi - 1)\ln(u) + \ln(\chi) - \chi \cdot \ln(u_m) \\ &= bx + c \quad (x = \ln(u)) \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Regressionsparameter bilden wir aus den beobachteten Zählimpulszahlen  $N_j$  die Realisationen  $y_j$  der Zufallsvariablen

$$y_j = \ln \frac{\ln(\bar{N}_{j-1}) - \ln(\bar{N}_j)}{u_j - u_{j-1}}$$

und ordnen diese den (logarithmischen) Intervallmitten

$$x_{mj} = \ln(u_{mj}) = \frac{1}{2}(\ln(u_{j-1}) + \ln(u_j))$$

als unabhängigen (d.h. fehlerfrei gegebenen) Variablen zu. Die Intervallbreiten  $\Delta u_j = u_j - u_{j-1}$  sollten so groß gewählt werden, daß in möglichst wenigen Intervallen die beobachtete Intervallbesetzung  $n_j = N_{j-1} - N_j$  kleiner als etwa 10 wird. Jedem Wertepaar  $y_j, x_{mj}$  ist nun noch ein Gewicht  $g_j$  zuzuordnen, welches im nächsten Abschnitt abgeleitet werden soll. Dann ergeben sich die Regressionsparameter in bekannter Weise aus der Forderung, daß die Summe der Abweichungsquadrate

$$S_{\text{oo}} = \sum_{j=1}^J g_j (y_j - bx_{mj} - c)^2$$

ein Minimum werden soll:

$$b = \frac{\sum g_j \sum g_j x_{mj} y_j - \sum g_j x_{mj} \sum g_j y_j}{\text{Det}}$$

$$c = \frac{\sum g_j x_{mj}^2 \sum g_j y_j - \sum g_j x_{mj} y_j \sum g_j x_{mj}}{\text{Det}}$$

wobei

$$\text{Det} = \sum g_j \sum g_j x_{mj}^2 - \left( \sum g_j x_{mj} \right)^2, \quad \text{alle Summationen von } j = 1 \text{ bis } j = J.$$

Die Verteilungsparameter sind dann

$$\kappa = 1 + b, \quad \ln(U_m) = \frac{\ln(1+b) - c}{1+b}$$

#### 4.23 Die Gewichte der Wertepaare

Leitet man die vorstehenden Ausdrücke für die Regressionsparameter mit Hilfe der maximum-likelihood-Methode ab (Heinhold-Gaede, 1964), so zeigt sich, daß die Gewichte  $g_j$  umgekehrt proportional zu den Varianzen  $\sigma_{y_j}^2$  der Zufallsvariablen  $\hat{y}_j$  anzusetzen sind. Diese ergeben sich aus den Varianzen der Zufallsvariablen  $\hat{N}_j$  und  $\hat{n}_j = \hat{N}_{j-1} - \hat{N}_j$ . Als Funktion dieser beiden unabhängigen Variablen geschrieben wird  $\hat{y}_j$

$$\hat{y}_j = \ln\left(\frac{\ln(\hat{N}_j + \hat{n}_j) - \ln(\hat{N}_j)}{u_j - u_{j-1}}\right) = \ln\left(\frac{\Delta \ln(\hat{N})_j}{\Delta u_j}\right)$$

Eine Schätzgröße für die Varianz von  $\hat{y}_j$  ergibt sich aus Schätzgrößen  $s_{N_j}^2$  und  $s_{n_j}^2$  für die Varianzen von  $\hat{N}_j$  und  $\hat{n}_j$  wie folgt:

$$\begin{aligned} s_{y_j}^2 &= \left(\frac{\partial y_j}{\partial N_j}\right)^2 s_{N_j}^2 + \left(\frac{\partial y_j}{\partial n_j}\right)^2 s_{n_j}^2 \\ &= \left(\frac{1}{\Delta \ln(N)_j}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{\partial \Delta \ln(N)_j}{\partial N_j}\right)^2 s_{N_j}^2 + \left(\frac{\partial \Delta \ln(N)_j}{\partial n_j}\right)^2 s_{n_j}^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{\Delta \ln(N)_j}\right)^2 \left(\left(\frac{1}{N_j + n_j}\right)^2 s_{n_j}^2 + \left(\frac{1}{N_j + n_j} - \frac{1}{N_j}\right)^2 s_{N_j}^2\right) \end{aligned}$$

Als Schätzgrößen für die Varianzen setzen wir nun einfach die Realisationen  $N_j$  und  $n_j$  selbst ein und erhalten damit

$$s_{y_j}^2 = \left(\frac{1}{\Delta \ln(N)_j}\right)^2 \frac{n_j}{N_j(N_j + n_j)}$$

Als weitere Vereinfachung schreiben wir für die Differenz

$$\Delta \ln(N)_j \cong \frac{n_j}{\frac{1}{2}(N_j + n_j + N_j)}$$

und vernachlässigen den Unterschied zwischen dem Quadrat des (in der letzten Gleichung im Nenner stehenden) arithmetischen Mittels und dem Produkt  $N_j(N_j + n_j)$ . Dann bleibt

$$s_{y_j}^2 = \frac{1}{n_j} \sim \frac{1}{g_j}$$

und wir erhalten das plausible Ergebnis, daß das Gewicht  $g_j$  des Wertepaares  $y_j, x_{mj}$  proportional der Klassenbesetzung  $n_j$  ist.



#### 4.24 Vertrauensintervalle für die Regressionsparameter

Die berechneten Werte für  $b$  und  $c$  sind als einmalige Realisationen der Zufallsvariablen  $\hat{b}$  und  $\hat{c}$  anzusehen. Diese hängen mit den Zufallsvariablen  $\hat{y}_j$  ebenso zusammen, wie ihre Realisationen mit den Realisationen  $y_j$ . Aus diesen Zusammenhängen und aus dem quadratischen Streuungswert

$$s_y^2 \equiv \frac{1}{J-2} \sum_{j=1}^J g_j (y_j - bx_{mj} - c)^2$$

ergeben sich die  $p\%$ -Vertrauensintervalle  $\Delta_p^b$  und  $\Delta_p^c$  für die Mittelwerte  $\mu_b$  und  $\mu_c$  der Zufallsvariablen  $\hat{b}$  und  $\hat{c}$ , d.h. es gilt mit einer Wahrscheinlichkeit von  $p\%$

$$b - \Delta_p^b \leq \mu_b \leq b + \Delta_p^b \quad \text{und}$$

$$c - \Delta_p^c \leq \mu_c \leq c + \Delta_p^c$$

wobei

$$\Delta_p^b = t_p s_y \sqrt{\frac{g_j}{\text{Det}}}$$

$$\Delta_p^c = t_p s_y \sqrt{\frac{\text{Det}}{g_j x_{mj}^2}} \quad (\text{Det s. Abschn. 4.22})$$

Hierin ist  $t_p$  die  $p\%$ -Quantile der Studentverteilung mit dem Freiheitsgrad  $J-2$ , d.h. es gilt

$$\int_{-t_p}^{+t_p} F_{\text{stud}}(t, J-2) dt = p\%$$

Leider mußte bei der endgültigen Fassung der Rechenprogramme auf die Berechnung der Vertrauensgrenzen verzichtet werden, da sonst der Bedarf an Speicherplatz und Rechenzeit die gesetzten Grenzen überschritten hätte.

#### 4.25 Exponentielle Verteilungsparameter beobachteter Verteilungen

In der Zeit vom 15. August bis zum 2. Dezember 1968 wurde sowohl in Berlin als auch in Weißenau am Bodensee täglich zwischen 14<sup>30</sup> und 16<sup>30</sup> die Richtungsverteilung der Zählimpulse bestimmt. Dann wurde jeweils der Richtungssektor mit der stärksten Aktivität ausgeblendet - der Analysator gestattet die Wahl zwischen den Sektorbreiten 9°, 18° und 27° - und die Verteilung der spektralen Amplituden bestimmt. Die verwendeten Empfängerfrequenzen waren 9 und 6 kHz (in Berlin) bzw. 7 kHz (in Weißenau). Wir berichten hier über die Berechnung der Exponential-Verteilungsparameter an 67 in Berlin beobachteten Herden. Bei der Berechnung wurde durchweg mit einer Intervallbreite von 0,3 V gearbeitet. Als Beispiel zeigt Abbildung 8 die Exponentialverteilung, die zu der in Abbildung 5 wiedergegebenen, beobachteten Verteilung berechnet wurde. Ebenfalls eingezeichnet ist die am gleichen Herd auf einer niedrigeren Frequenz beobachtete Verteilung mit der dazu berechneten Exponentialverteilung. Beide berechneten Kurven geben den beobachteten Verlauf gut wieder, jedoch differieren die Gesamtzahlsschätzungen  $N_{\text{expo}}$  um den Faktor 2.

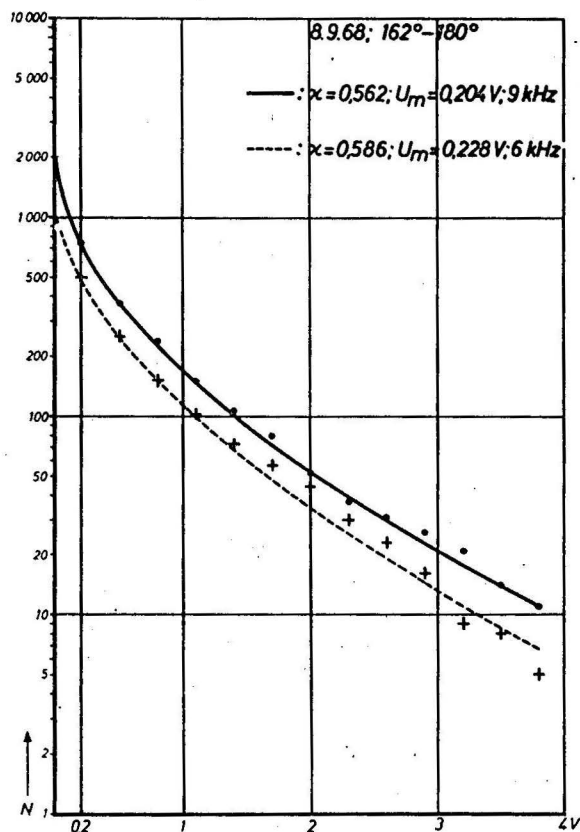


Abb. 8  
Exponentialverteilung,  
berechnet für die in  
Abb. 5 gezeigte Summen-  
verteilung.

In Abbildung 9 wird gezeigt, wie die berechneten  $\kappa$ -Werte zwischen 0 und 1 und die berechneten  $U_m$  zwischen 2V ( $\ln(u_m) = 0.7$ ) und 0.002V ( $\ln(u_m) = -6.2$ ) verteilt sind. Man erkennt, daß  $\kappa$ -Werte zwischen 0.3 und 0.5 deutlich bevorzugt, Werte oberhalb von 1 dagegen überhaupt nicht auftreten.

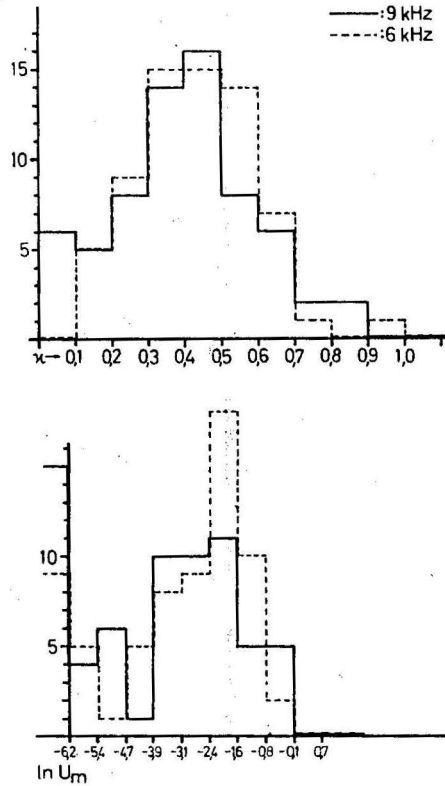


Abb. 9

Verteilung der für 67 Herde auf 9 und 6 kHz berechneten  $\kappa$  - und  $\ln(U_m)$ -Werte

#### 4.26 Vergleich mit exponentiellen Verteilungsparametern von Lognormalverteilungen mit bekannten Parametern

Das eben geschilderte Verfahren zur Berechnung der exponentiellen Verteilungsparameter wurde auf eine Schar theoretisch gerechneter Kurven angewendet, von denen eine Auswahl in Abb. 6 gezeigt ist. Es handelt sich um Lognormal-Verteilungskurven, bei denen die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  vorgegeben waren. Der Vergleich der dabei erhaltenen Exponential-Parameter mit denen der beobachteten Verteilungen gibt eine erste Orientierung über die zu erwartenden Schätzwerte  $m$  und  $s$ . Dieser Vergleich ist in Abb. 10 gegeben.

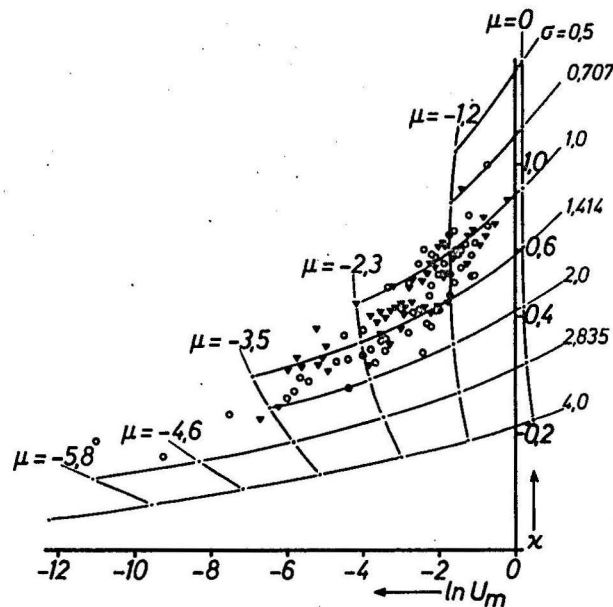


Abb. 10

Linien konstanten  $\mu$ - und  $\sigma$ -wertes und Verteilung der berechneten  $\chi$  - und  $U_m$ -Werte in der  $\chi$  -  $-\ln(U_m)$ -Ebene.

Die Exponential-Parameter der Lognormal-Kurven ergeben ein Netz von Linien konstanten  $\mu$  und  $\sigma$ -wertes in der  $\chi$  -  $-\ln(u_m)$ -Ebene. In der gleichen Ebene wurden die Parameter der beobachteten Verteilungen eingetragen. Man erkennt, daß die überwiegende Zahl der Herde in den Streifen zwischen  $\sigma = 0.8$  und  $\sigma = 2.5$  fallen, wobei Herde mit kleinem  $U_m$  deutlich eine Tendenz zu größeren  $\sigma$ -Werten zeigen.

### 4.3 Berechnung der Schätzparameter der Lognormalverteilung

#### 4.31 Berechnung einer Ausgangs-Näherung

Die Parameter der Exponentialverteilung betrachten wir im wesentlichen als phänomenologische Beschreibung von Krümmung und Anstieg der beobachteten Summenverteilungskurve. Die Einführung des Gewichtes  $g_j$  führt auf eine weitere Meßgröße, in die wesentlich der Einfluß des verfügbaren Bereiches der Schwellspannung eingeht, nämlich die "mittlere, beobachtete Impulsspannung"

$$U_{av} = \exp(x_{av}) (V) = \exp\left(\frac{\sum g_j x_{mj}}{\sum g_j}\right) V \quad (g_j \sim n_j)$$

Dieser Wert lag bei den Berechnungen durchweg zwischen 0.4 V und 0.7 V. Er stellt den Schwerpunkt des Bereiches dar, innerhalb dessen wir die beobachtete Verteilung durch eine Exponentialverteilung annähern. Die Anpassung einer Lognormalverteilung an die Exponentialverteilung wird man zweckmäßigerweise in eben demselben Punkt vornehmen.

Hierzu ersetzen wir in der Differentialgleichung der Lognormalverteilung (Abschn. 4.13) auf der linken Seite die Funktion  $N_{lgn}$  durch die Funktion  $N_{exp}$ , und auf der rechten Seite die Schätzgrößen  $m$  und  $s$  durch deren "nullte Näherungen"  $m_0$  und  $s_0$ :

$$-\left(1 + u \frac{N'_{exp}}{N_{exp}}\right) = \chi \cdot \left(\frac{u \chi}{u_m} - 1\right) \approx \frac{\ln(u) - m_0}{s_0^2}$$

Diese Gleichung soll in der Umgebung der Spannung  $U_{av}$  gelten, also soll im Punkte  $u_{av}$  auch ihre Ableitung richtig sein:

$$\chi^2 \frac{u_{av} (\chi - 1)}{u_m \chi} = \frac{1}{s_0^2 u_{av}}$$

Hieraus und durch Einsetzen von  $u_{av}$  in die genäherte Differentialgleichung finden wir

$$s_o^2 = \frac{1}{\chi^2} \left( \frac{u_m}{u_{av}} \right) \chi, \quad m_o = \ln(u_{av}) - \frac{1}{\chi} + \chi \cdot s_o^2$$

Die Größen  $m_o$  und  $s_o$  wurden für die theoretischen Verteilungen berechnet und - siehe Abb. 11 - in einer  $m_o$ - $s_o$ -Ebene eingetragen. Das Netz der  $m_o$ - $s_o$ -Werte ist gegen das der entsprechenden  $\mu$  und  $\sigma$ -Werte verzerrt derart, daß durchweg  $s_o$  größer als  $\sigma$  und in den meisten Fällen  $m_o$  kleiner als  $\mu$  ist (Ausnahme:  $\mu = 0$ ).

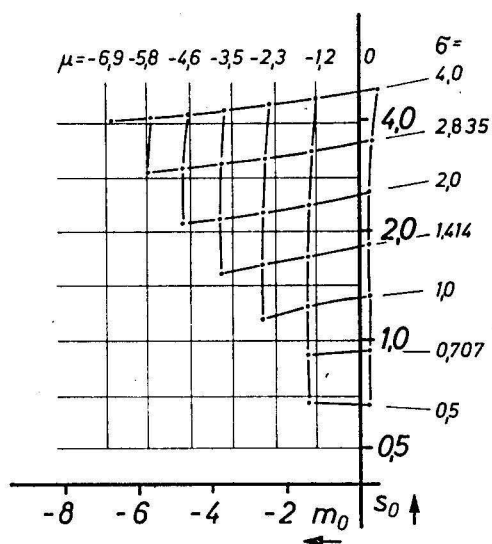


Abb. 11

Linien konstanten  $\mu$ - und  $\sigma$ -wertes in der  $m_o$ - $s_o$ -Ebene.



#### 4.32 Iterationsverfahren zur Bestimmung von m und s

Sind irgendwelche Schätzwerte m und s gegeben, von denen man annehmen darf, daß sie nicht allzu sehr von den zu schätzenden Parametern  $\mu$  und  $\sigma$  abweichen, so kann man für jede Schwellspannung  $U_j$  eine Schätzgröße für die zugehörige Grundwahrscheinlichkeit  $q(u_j)$  berechnen, nämlich

$$Q_j = Q_{\lg n}(w_j), \quad \text{wobei } w_j = \frac{\ln(u_j) - m}{s}$$

Dadurch wird die Skala der Schwellwerte transformiert in eine Skala von Wahrscheinlichkeitswerten, Wenn nun m und s genügend nahe bei  $\mu$  und  $\sigma$  liegen, so müssen die Logarithmen der beobachteten Zählimpulszahlen  $N_j$ , aufgetragen als Funktion der Logarithmen der Wahrscheinlichkeiten  $Q_j$ , um eine Gerade mit dem Anstieg 1 streuen

$$\ln(N_j) \cong \ln(N_{\lg n_0}) + \ln(Q_j)$$

Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Ordinatenachse muß dann die Schätzgröße  $N_{\lg n_0}$  für  $\mu_{\text{Ntot}}$  ergeben.

Von unseren "nullten Näherungen"  $m_0$  und  $s_0$  haben wir jedoch Grund anzunehmen, daß sie von solchen befriedigenden Schätzwerten noch merklich abweichen um

$$\Delta m = m_0 - m \quad \text{und} \quad \Delta s = s_0 - s$$

Entsprechend weichen die Schwellwertwahrscheinlichkeiten

$$Q_{j_0} = Q_{\lg n}(w_{j_0}), \quad \text{wobei } w_{j_0} = \frac{\ln(u_j) - m_0}{s_0}$$

von den Wahrscheinlichkeiten  $Q_j$  ab, wir schreiben genähert

$$\ln(Q_{j_0}) \cong \ln(Q_j) + \frac{\partial(\ln(Q_j))}{\partial m} (m_0 - m) + \frac{\partial(\ln(Q_j))}{\partial s} (s_0 - s)$$

$$\cong \ln(Q_j) + \frac{Z(w_j)}{Q(w_j)} \frac{1}{s} (m_0 - m) + \frac{Z(w_j)}{Q(w_j)} \frac{w_j}{s} (s_0 - s)$$

Indem wir nun in den partiellen Ableitungen  $m$  und  $s$  durch  $m_0$  und  $s_0$  annähern, erhalten wir folgenden genäherten Zusammenhang

$$\ln(N_j) - \ln(Q_{j0}) \cong \ln(N_{lgno}) - \frac{Z(w_{j0})}{Q(w_{j0})} \frac{m_0 - m}{s_0} - w_{j0} \frac{Z(w_{j0})}{Q(w_{j0})} \frac{s_0 - s}{s_0}$$

Bezeichnen wir die linke Seite dieser Gleichung mit  $y_j$ , auf der rechten

$$x_{j1} = \frac{-Z(w_{j0})}{Q(w_{j0})}, \quad x_{j2} = \frac{-Z(w_{j0})}{Q(w_{j0})} w_{j0}$$

so haben wir eine zweifache lineare Regression der Form

$$y_j = c + b_1 x_{j1} + b_2 x_{j2}$$

Aus den Regressionskonstanten  $b_1$  und  $b_2$  folgt dann je ein verbesserter Wert für  $m$  und  $s$

$$m = m_0 - b_1 s_0, \quad s = s_0 - b_2 s_0$$

Mit den verbesserten Schätzwerten kann die Regression wiederholt werden. Als Abbruchkriterium wählten wir die Forderung, daß sich  $m$  bei einer Iteration nicht mehr als um 0.01,  $s$  nicht mehr als um 5% ändere.

Wenn dieses Kriterium erfüllt ist, so kann man den Schätzwert für die mittlere Signalgesamtzahl  $\mu_{N_{tot}}$  angeben als  $N_{lgno} = \exp(c)$ . Wenn das Abbruchkriterium nach 20 Iterationen noch nicht erfüllt war, wurde die Berechnung abgebrochen.

Das Verfahren wurde zunächst mit Hilfe der schon mehrfach erwähnten Schar theoretisch berechneter Kurven geprüft. Tabelle 1 zeigt, welche Schätzwerte  $m$ ,  $s$  und  $N_{lgno}$  für die vorgegebenen Kurvenparameter  $\mu$ ,  $\sigma$  und  $\mu_{N_{tot}} = 10\,000$  gefunden wurden. Je kleiner  $\sigma$ , desto kleiner ist der Bereich von  $\mu$ -Werten, für die das Verfahren konvergiert.

Abbildung 12 zeigt die Lognormal-Verteilungskurve zu der in Abbildung 5 wiedergegebenen beobachteten Summenverteilung. Weitere derartige Gegenüberstellungen bringen wir im Anhang.

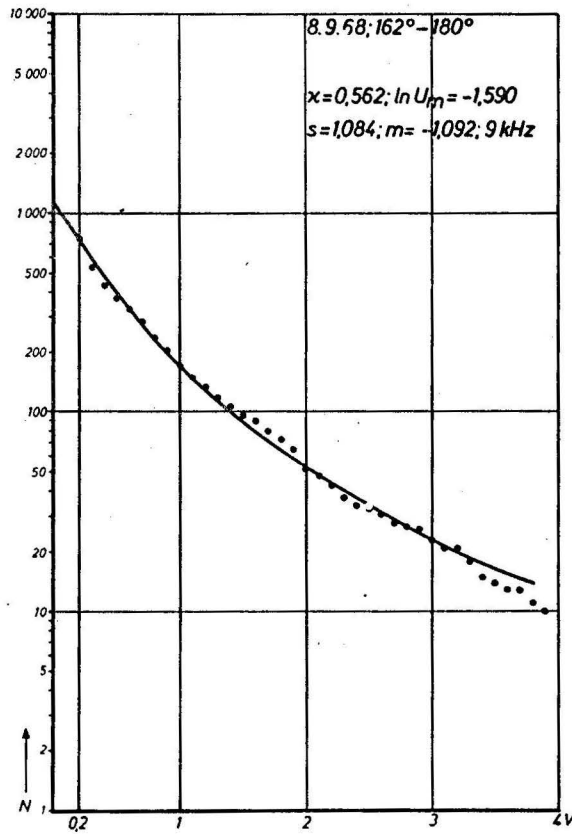


Abb. 12

Lognormale Schätzfunktion für die Verteilung der Abbildung 5.

$\bar{\sigma}$	$\mu =$	0.0	-1.2	-2.3	-3.5	-4.6	-5.8	-6.9
4.000	s	4.004	4.003	4.011	4.005	4.010	3.964	3.910
	m	-0.004	-1.208	-2.311	-3.508	-4.572	-5.731	-6.996
	N <sub>lgno</sub>	10009	10016	10017	10058	9914	9885	-
	n <sub>it</sub>	4	4	3	3	3	7	-
2.835	s	2.834	2.834	2.837	2.832	2.836	2.828	2.794
	m	0.001	-1.198	-2.304	-3.484	-4.613	-5.766	-6.595
	N <sub>lgno</sub>	9999	9993	10007	9942	10037	10049	8818
	n <sub>it</sub>	4	4	3	3	3	1	8
2.000	s	2.000	2.000	1.999	1.998	2.000	[ 2.132 ]	[ 11 ]
	m	0.000	-1.199	-2.298	-3.495	-4.599		
	N <sub>lgno</sub>	9999	9998	9992	9969	10020		
	n <sub>it</sub>	4	4	3	3	3		
1.414	s	1.411	1.414	1.416	1.409			
	m	0.002	-1.200	-2.307	-3.477			
	N <sub>lgno</sub>	9991	9999	10047	9826			
	n <sub>it</sub>	3	4	3	3			
1.000	s	1.000	1.001	1.006				
	m	0.000	-1.201	-2.321				
	N <sub>lgno</sub>	9999	10008	10219				
	n <sub>it</sub>	4	4	3				
0.707	s	0.707	0.708	0.828				
	m	0.000	-1.201	-2.414				
	N <sub>lgno</sub>	10000	10011	12017				
	n <sub>it</sub>	4	4	3				
0.500	s	0.500	0.502					
	m	0.000	-1.204					
	N <sub>lgno</sub>	10000	10047					
	n <sub>it</sub>	4	4					

Tabelle 1

#### 4.33 Geschätzte Parameter beobachteter Verteilungen

Von insgesamt 134 Berechnungen an beobachteten Verteilungen konvergierten 108. Die Verteilung der dabei gefundenen Schätzwerte für  $\mu$  und  $\sigma$  über die m-s-Ebene zeigt Abbildung 13. Auch hier sieht man den Trend, der sich schon in der Abbildung 10 bemerkbar machte: Je kleiner die Schätzgröße m ausfiel, desto größer wurde im Mittel s.

Je niedriger m und je kleiner s, desto geringer ist der Anteil der Signale, deren Impulsspannung die Schwelle  $U_0$  überschreitet. Um einen Eindruck von den möglichen "Fehlschätzungen" zu geben, sind in Abbildung 14 die geschätzten Gesamtzahlen  $N_{1gno}$  gegen die beobachteten Zählimpulszahlen  $N_0$  (zur Schwelle  $U_0$ ) aufgetragen. Diesem Diagramm zufolge muß man normalerweise durchaus damit rechnen, daß die vom Herd ausgesendete Signalzahl bis zum Zehnfachen über der beobachteten liegt.

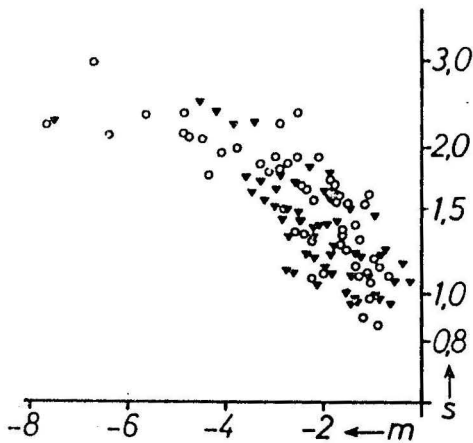


Abb. 13

Verteilung der berechneten Schätzwerte in der m-s-Ebene (offene Kreise: 6 kHz, Dreiecke: 9 kHz).

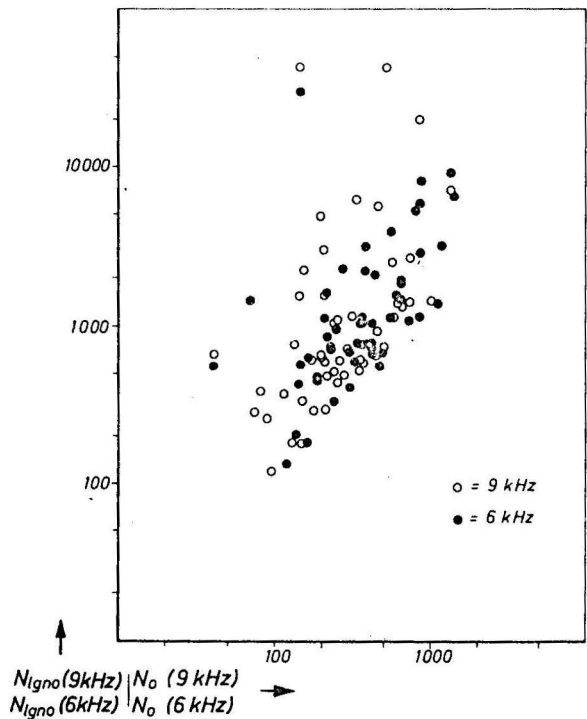


Abb. 14

Schätzwerte  $N_{1gno}$  aufgetragen gegen beobachtete  $N_0$ .

Aus der Theorie der Wellenausbreitung folgt, daß im allgemeinen Frequenzbereiche um 6 kHz stärker bedämpft werden als solche um 9 kHz. Dem entspricht, daß die beobachteten Summenverteilungskurven für 6 kHz meistens tiefer liegen als die für 9 kHz (siehe z.B. Abb. 8), ferner, daß die beobachteten  $N_0$ -Werte meistens für 6 kHz niedriger sind als für 9 kHz (siehe Abb. 15). Die Schätzwerte für die Signalgesamtzahl dagegen sollten nicht frequenzabhängig sein. Diese Erwartung erfüllte sich im Einzelfall selten, jedoch liegen die Schätzwertpaare  $N_{1gno}$  für 9 und 6 kHz ersichtlich symmetrischer zur Geraden  $N(6 \text{ kHz}) = N(9 \text{ kHz})$  als die entsprechenden Paare von  $N_0$ -Werten (Abb. 15). Allerdings ist die Streuung erheblich. Das lenkt unsere Aufmerksamkeit darauf, wie wichtig es ist, bei zukünftigen Auswertungen die Abschätzung eines Vertrauensintervalles für  $N_{1gno}$  mit einzubeziehen, was bisher aus den am Ende von Abschnitt 4.24 genannten äußeren Gründen nicht durchführbar war.

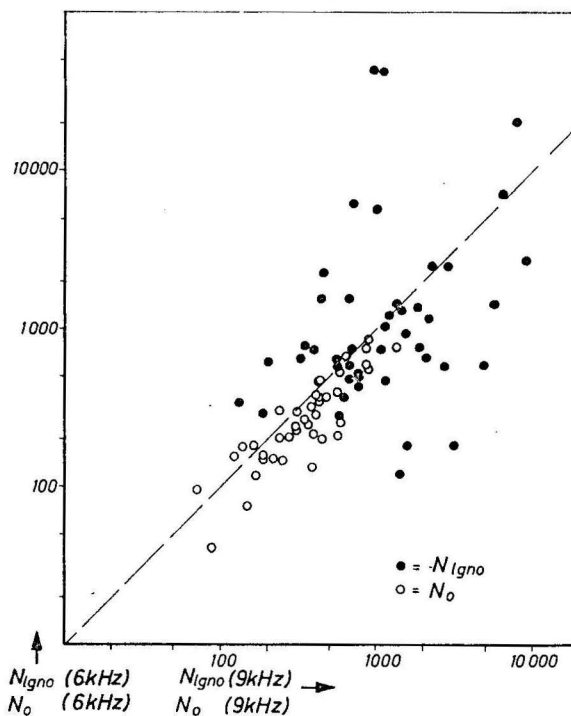


Abb. 15

Zählimpulszahlen  $N_0$  und Schätzwerte  $N_{1gno}$  für 6 kHz, aufgetragen gegen die entsprechenden Werte für 9 kHz.



Schließlich sind in Abbildung 16 noch die für die beiden Frequenzen 9 und 6 kHz berechneten Schätzgrößen  $m$  und  $s$  gegeneinander aufgetragen. Für  $s$  ist keine, für  $m$  eine schwache Frequenzabhängigkeit bemerkbar, deren Tendenz mit der oben genannten Aussage der Theorie übereinstimmt: Die  $m$ -Werte für 6 kHz liegen im Mittel etwas unter denen für 9 kHz.

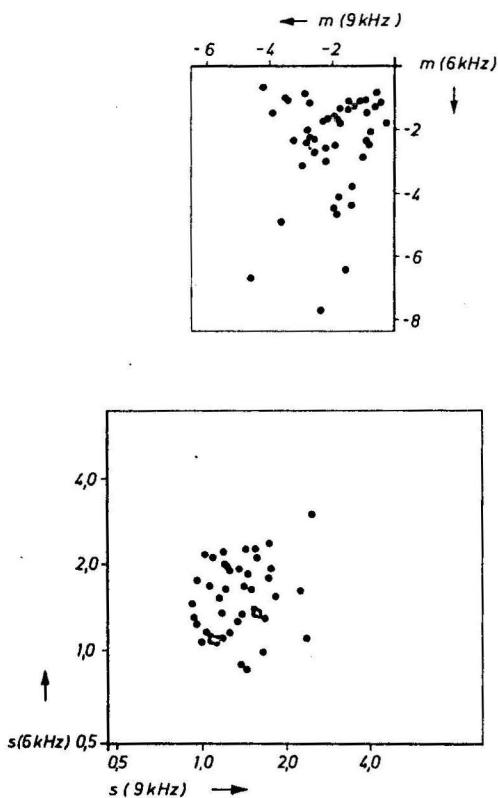


Abb. 16

Schätzparameter  $m$  und  $s$  für 6 kHz, aufgetragen gegen die entsprechenden Parameter für 9 kHz.

## 5. Schlußbemerkung

Der beobachtende Praktiker erwartet eine klare Antwort auf eine einfache Frage: "Wie oft hat es geblitzt?". Seine Geduld wird mit den hier vorgetragenen Überlegungen zweifellos auf eine harte Probe gestellt. Wir müssen uns jedoch damit abfinden, daß einzelne Zählimpulsraten, wie sie in der Praxis so oft bestimmt werden, den mittleren Impulsraten der Atmosphericsherde nicht einmal proportional zu sein brauchen. Dann wird es auch klar, welche Bedeutung es gerade für die Praxis hat, daß uns eine vernünftige Schätzfunktion für die Amplitudenverteilung zur Verfügung steht. Wir haben zeigen können, daß die Lognormalverteilung geeignet ist, beobachtete Verteilungen der spektralen Amplituden einzelner Atmosphericsherde zu beschreiben. Bei vielen unserer Beobachtungen müssen wir jedoch damit rechnen, nur einen relativ kleinen Anteil der gesamten Verteilung erfaßt zu haben. Deswegen ist es noch nicht sicher bewiesen, daß die Lognormalverteilung auch zur Beschreibung der Amplitudenverteilung nahe dem Entstehungsort der Atmospheric-Signale geeignet ist. Dem ist auch nicht mit irgendeinem Testverfahren, wie z.B. dem chi-quadrat-Test, abzuhelfen. Dieser würde zwar entscheiden können, ob die Abweichungen der beobachteten Intervallbesetzungen von den berechneten als zufällig angesehen werden dürfen oder nicht. Sind jedoch zwei theoretische Kurven gegeben, die beide gut den beobachteten Verlauf wiedergeben, z.B. Exponentialverteilung (Abb. 8) und Lognormalverteilung (Abb. 12), so gibt er keinerlei Hilfestellung für die physikalische Entscheidung, welche von beiden dem Problem besser gerecht wird.

Es ergibt sich also für die Zukunft die Aufgabe, weitere Beobachtungen zu sammeln und hierbei die noch nicht ausgeschöpften Möglichkeiten zur Erweiterung des beobachteten Amplitudenbereiches zu nutzen.

Die Zielsetzung dieser Arbeit war darauf beschränkt zu zeigen, wie die beobachtete Abhängigkeit der Zählimpulszahl vom Schwellwert statistisch interpretiert werden kann. Wie schon mehrfach

angedeutet, ist jedoch die Beobachtung der spektralen Amplituden nur e i n e der Meßmöglichkeiten, die uns mit dem Atmospheric-Analysator in die Hand gegeben sind. Ebenso ist auch deren statistische Interpretation nur als Teil eines Aufgabenbereiches anzusehen, nämlich der physikalischen Interpretation der Analysator-Beobachtungen an entfernten Atmosphericsherden.

S c h r i f t t u m :

- |                                    |       |   |
|------------------------------------|-------|---|
| Abramowitz, M.<br>and I.A. Stegun  | 1965  | Handbook of Mathematical<br>Functions.<br>Dover Publications Inc.,<br>New York.   |
| Aitchinson, J.<br>and J.A.C. Brown | 1957  | The Lognormal Distribution.<br>Cambridge University Press,<br>Cambridge.  |
| Frisius, J.<br>und G. Heydt        | 1968a | Berichte über Beobachtungen<br>an Längswellen-Atmospherics<br>mit dem Atmospheric-Analysa-<br>tor des Heinrich-Hertz-Insti-<br>tuts.<br><br>Technischer Bericht Nr. 95 des<br>Heinrich-Hertz-Instituts für<br>Schwingungsforschung,<br>Berlin-Charlottenburg.                   |
| Frisius, J.<br>und G. Heydt        | 1968b | Spectral Parameters of the<br>VLF Radio Noise Observed as<br>Functions of the Azimuth.<br><br>Radio Science <u>3</u> (New Ser.)<br>No. 10, 1004-1009.   |
| Frisius, J.<br>und G. Heydt        | 1968c | Beobachtungen der Atmospheric-<br>Aktivität mit dem Atmospheric-<br>Analysator des Heinrich-Hertz-<br>Instituts.<br><br>Kleinheubacher Berichte <u>13</u><br>(im Druck).  |
| Heinhold, J.<br>und K.W. Gaede     | 1964  | Ingenieurstatistik.<br>Oldenbourg Verlag, München -<br>Wien.  |
| Heydt, G.                          | 1967  | Peilanlagen zur Messung von<br>spektralen Amplitudenvertei-<br>lungen, Amplitudenverhältnis-<br>sen und Gruppenlaufzeitdifferenzen<br>von Atmospheric.<br><br>Technischer Bericht Nr. 90 des<br>Heinrich-Hertz-Instituts für<br>Schwingungsforschung,<br>Berlin-Charlottenburg. |

- Heydt, G., J. Frisius,  
H. Volland und  
W. Harth
- 1967 Beobachtung entfernter Ge-  
witterzentren mit dem Atmo-  
spherics-Analysator des  
Heinrich-Hertz-Instituts.  
Kleinheubacher Berichte 12,  
103-110.
- Pfanzagl, J.
- 1966 Allgemeine Methodenlehre der  
Statistik, Bd. II-  
Sammlung Göschen, Bd. 747a,  
Walter de Gruyter & Co., Berlin.
- URSI
- 1962 Special Report No. 7 on  
The Measurement of Characteri-  
stics of Terrestrial Radio  
Noise,  
ed. E.H. Herbays.  
Elsevier Publishing Company,  
Amsterdam, London, New York,  
Princeton.
- Volland, H.
- 1964 Untersuchungen über das sta-  
tistische Amplitudenspektrum  
atmosphärischer Störungen  
von einzelnen Gewitterherden.  
Nachr. Techn. Zeitschr. 17,  
407-412.
- Volland, H.
- 1966 Die Statistik atmosphärischer  
Störungen.  
Kolloquium "Radiometeorologie",  
Kleinheubach, 28. - 30. März,  
Kolloquiumsbericht (herausge-  
geben von der Deutschen For-  
schungsgemeinschaft),  
pg. 169 - 173.

Anhang :

- I. ALGOL-Programm zur Berechnung der Parameterschätzung mit der Rechananlage Z 25 des Instituts für Regelungstechnik, T. U. Berlin
  
- II. Beispiele beobachteter Verteilungskurven, mit Schätzparametern und Lognormal-Verteilungsfunktionen





```

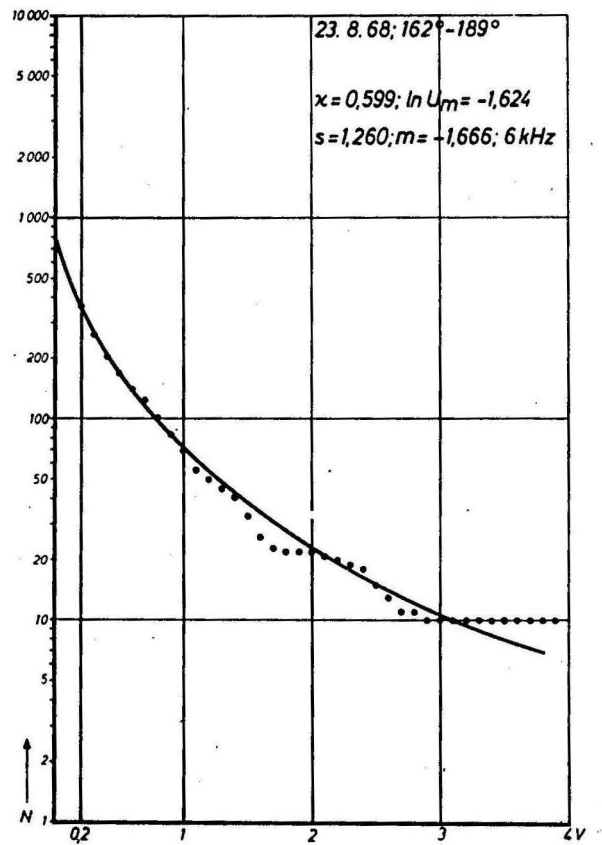
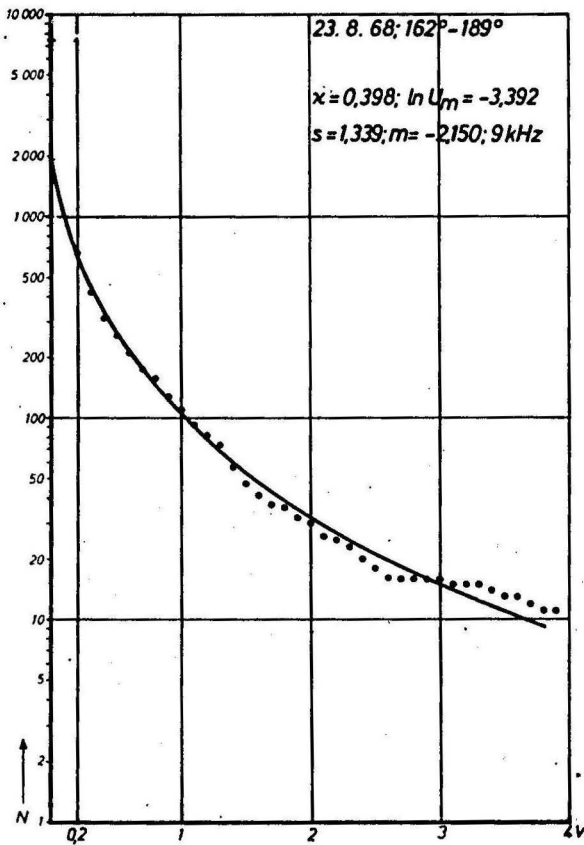
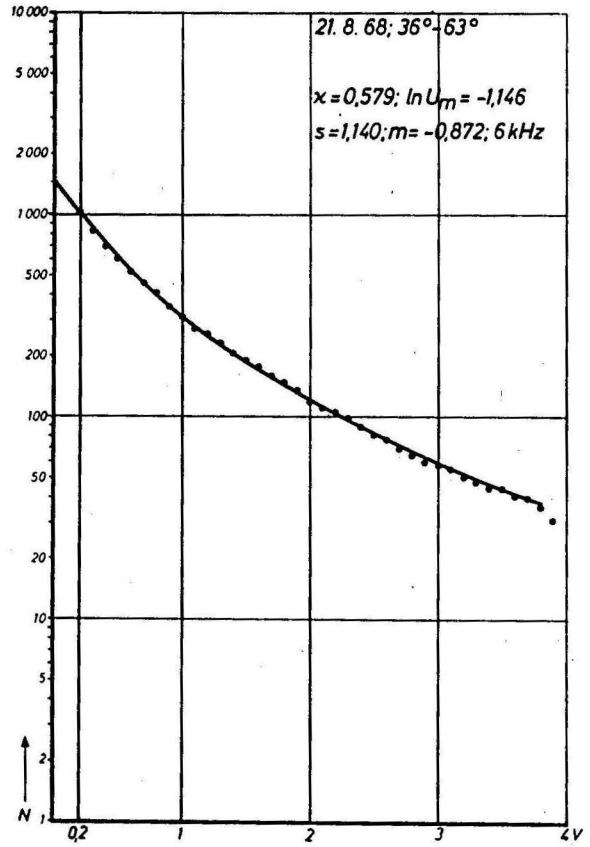
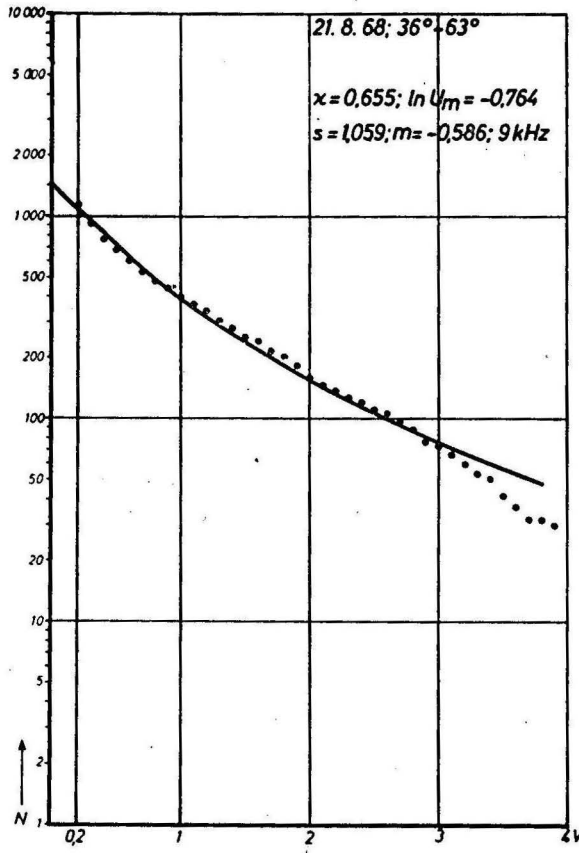
*PROCEDURE* REGR20;
*BEGIN* COMMENT 'IM HAUPTPROGRAMM IST ZU DEFINIEREN:
    ZAHL DER WERTETRIPEL MIT GEWICHT GROESSER NULL: NP,
    LAUFNUMMER DER WERTETRIPEL: J,
    WERTETRIPEL YJ,XJ1,XJ2, UND DEREN GEWICHTE GJ, ALS REAL ODER INTEGER,
    ALS REAL: SLOPE1,SLOPE2,CONST,SDEV,XAV,
    ALS BOOLEAN: JEQUY (= TRUE, WENN WERTZUWEISUNG FUER DIE WERTETRIPEL NICHT WIEDERHOLT
    WERDEN SOLL), DIMEQ1 (=TRUE, WENN NUR EINFACHE REGRESSION ZU RECHNEN IST),
    WERTZUWEISUNGSPROZEDUR VALXYG FUER DIE WERTETRIPEL, DEREN GEWICHTE,
    UND DIE BEIDEN BOOLESCHE VARIABLEN;
*REAL* SG, SX1, SX2, SY, SYX1, SYX2, SX1X1, SX1X2, SX2X2, SYY, DET1, DET2, DET3, DET, REGJ, OS;
*INTEGER* NFR;
J:=NP;
SG:=SX1:=SX2:=SY:=SYX1:=SYX2:=SX1X1:=SX1X2:=SX2X2:=SYY:=0;
JEQUY:=*FALSE*;
*PICKUP* VALXYG;
*IF* JEQUY *THEY* *GO TO* CALC;
J:=J+1;
REGJ:=1.0/GJ;
*IF* REGJ *GREATER* .25
*THEY* *BEGIN*
    NP:=NP+1;
    SG:=SG+REGJ;
    DS:=REGJ*YJ;
    SY:=SY+DS;
    SYY:=SYY+DS*YJ;
    DS:=REGJ*XJ1;
    SX1:=SX1+DS;
    SYX1:=SYX1+DS*YJ;
    SX1X1:=SX1X1+DS*XJ1;
    *IF* DIMEQ1 *THEN* *GO TO* STEND;
    DS:=REGJ*XJ2;
    SX2:=SX2+DS;
    SYX2:=SYX2+DS*YJ;
    SX1X2:=SX1X2+DS*XJ1;
    SX2X2:=SX2X2+DS*XJ2;
STEND; *END* VERARBEITUNG DER GJ, YJ, XJ1, XJ2;
*GO TO* PICKUP;
CALC: NFR:=*IF* DIMEQ1 *THEY* NP-2 *ELSE* NP-3;
*IF* NFR *LESS* 1 *OR* SG *LESS* .20 *THEY* *GO TO* NOREGR;
DET1:=SG-SX1X1 - SX1-SX1;
*IF* DIMEQ1
*THEY* DET:=DET1
*ELSE* *BEGIN*
    DET2:= SG-SX1X2 - SX1-SX2;
    DET3:=SX1-SX1X2 - SX2-SX1X1;
    DET:=SX2X2-DET1 - SX1X2-DET2 + SX2-DET3;
*END*;
*IF* DET *LESS* .20 *THEY* *GO TO* NOREGR;
*IF* DIMEQ1
*THEY* *BEGIN*
    SLOPE2:=0;
    XAV:=SX1/SG;
*END*
*ELSE* *BEGIN*
    SLOPE2:=SYX2-DET1 - SYX1-DET2 + SY-DET3;
    SLOPE2:=SLOPE2/DET;
*END*;
DET1:=SG-SYX1 - SY-SX1;
*IF* DIMEQ1
*THEY* SLOPE1:=DET1/DET
*ELSE* *BEGIN*
    DET2:= SG-SYX2 - SY-SX2;
    DET3:=SX1-SYX2 - SX2-SYX1;
    SLOPE1:= SX2X2-DET1 - SX1X2-DET2 + SX2-DET3;
    SLOPE1:= SLOPE1/DET;
*END*;
DET1:= SY-SX1X1 - SX1-SYX1;
*IF* DIMEQ1
*THEY* CONST:=DET1/DET
*ELSE* *BEGIN*
    DET2:= SY-SX1X2 - SYX2-SX1;
    DET3:=SYX1-SX1X2 - SYX2-SX1X1;
    CONST:=SX2X2-DET1 -SX1X2-DET2 + SX2-DET3;
    CONST:=CONST/DET;
*END*;
SDEV:= SYY -SLOPE2-SYX2 - SLOPE1-SYX1 -CONST-SY;
*GO TO* EXREGR;
NOREGR: SLOPE1:=SLOPE2:=CONST:=0;
SDEV:=100000.0;
*COMMENT* UEBERGROSSES SDEV ALS ERKENNUNG DAFUER, DASS KEINE REGRESSION GERECHNET WERDEN KONNTE;
EXREGR: *END* PROCEDURE REGR20;

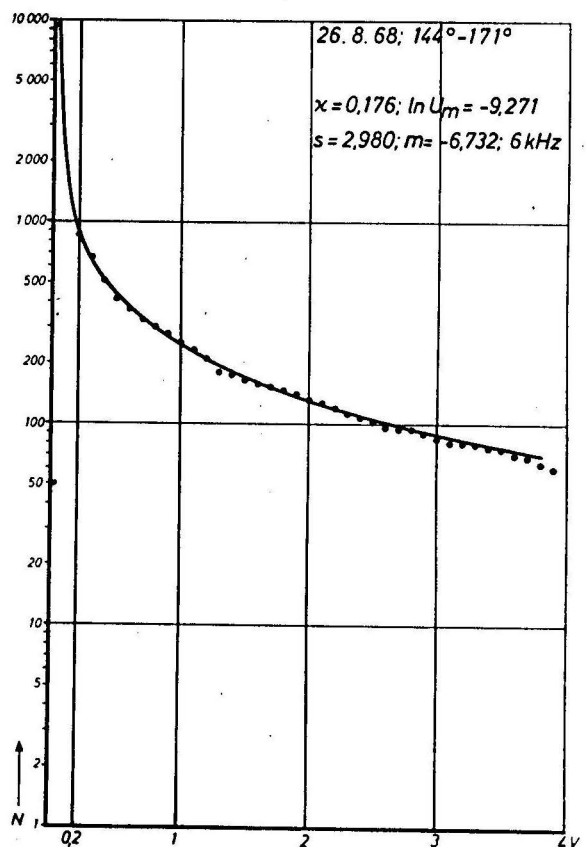
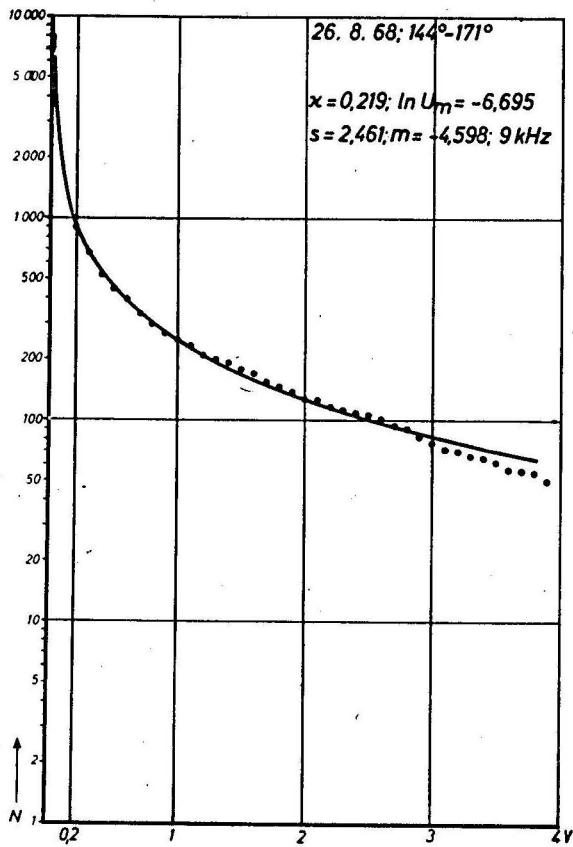
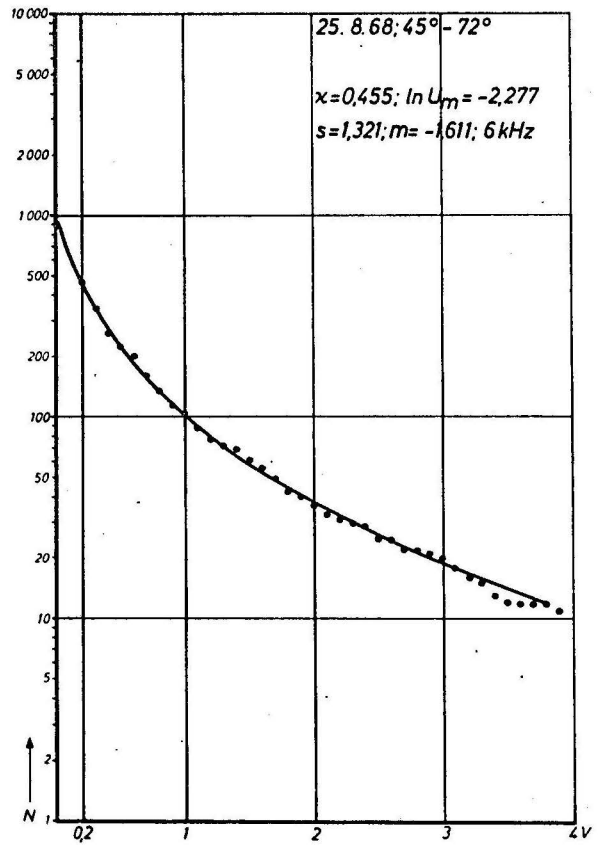
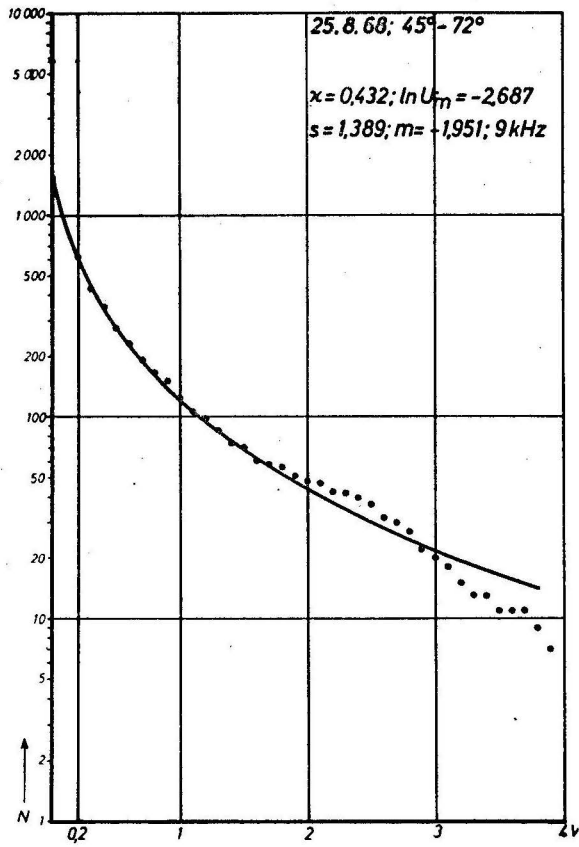
```

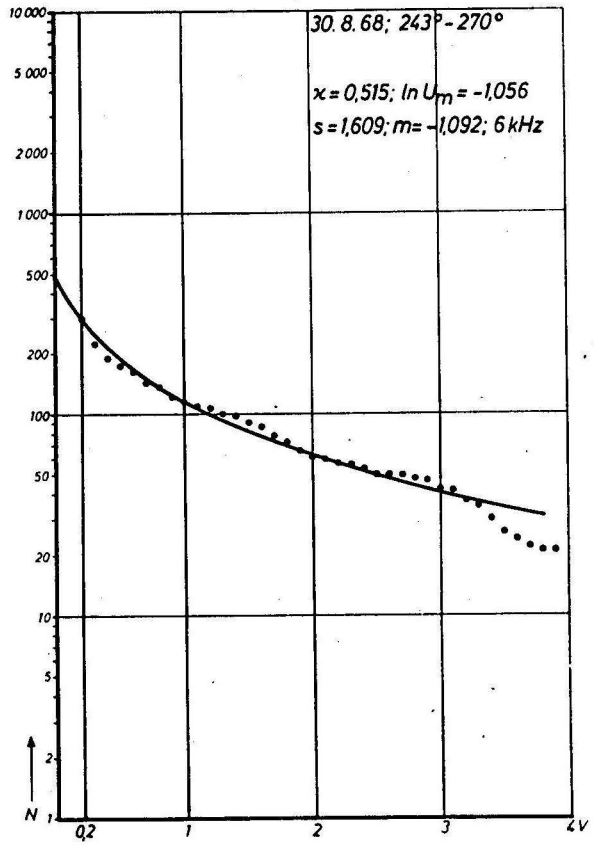
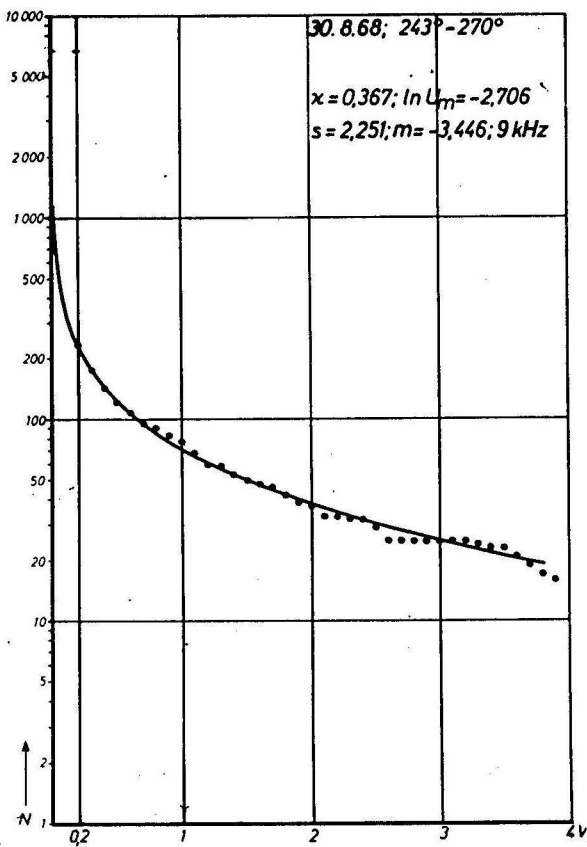
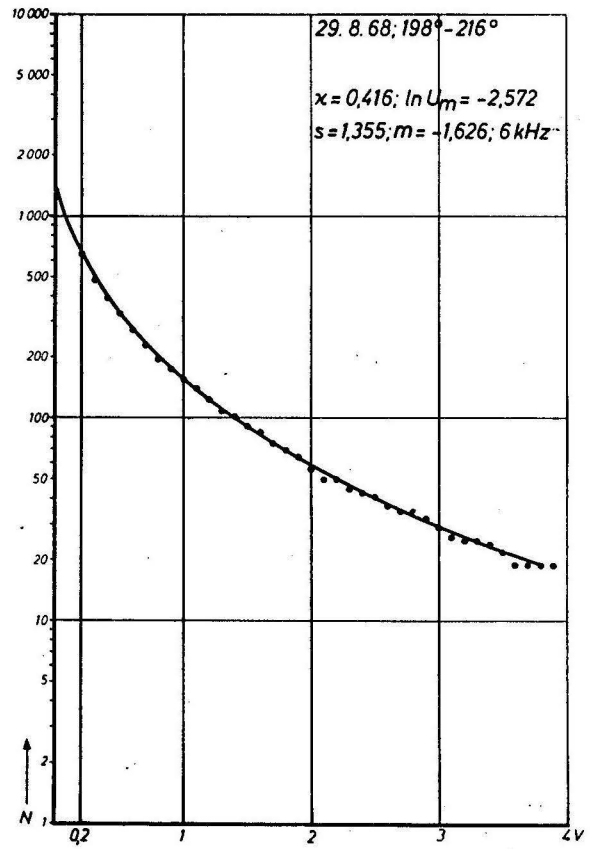
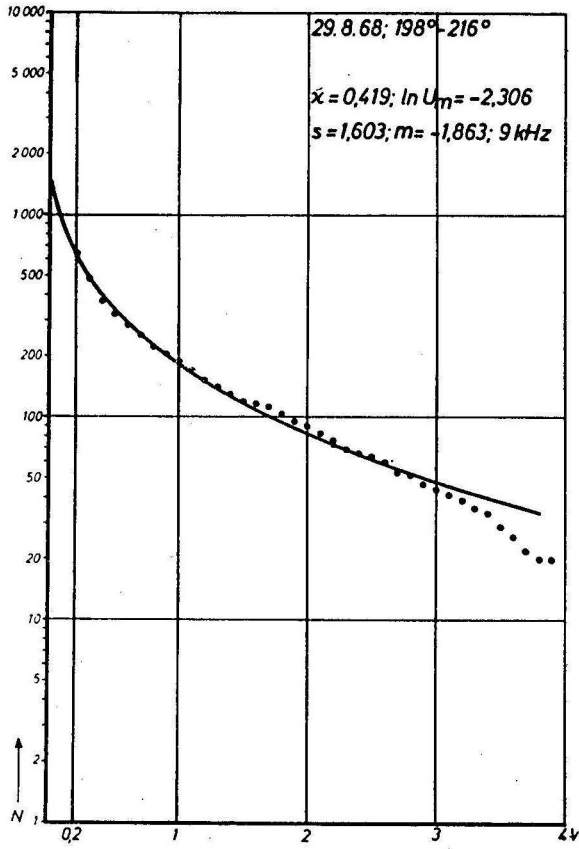
```

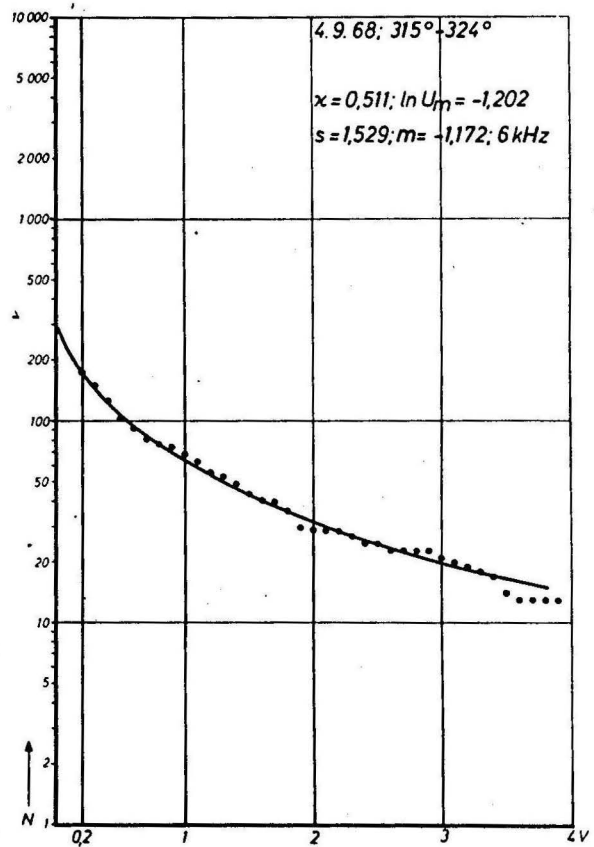
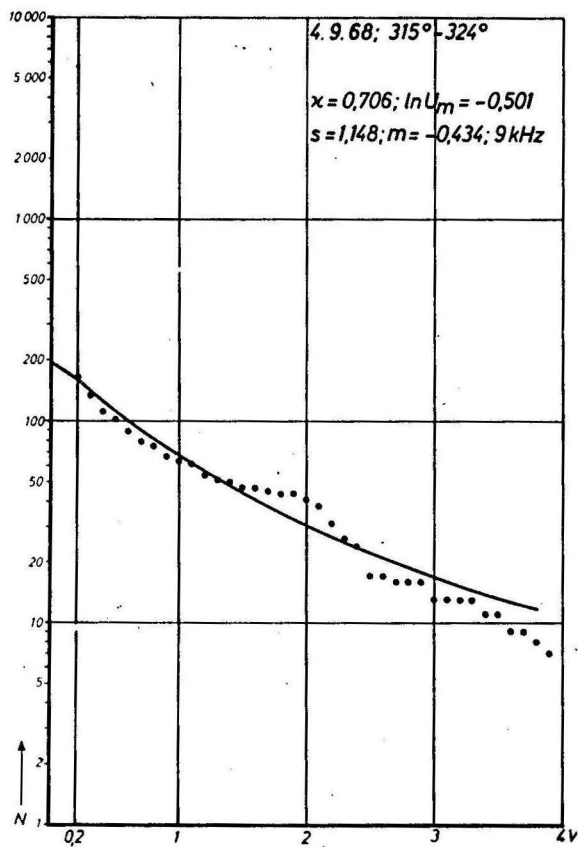
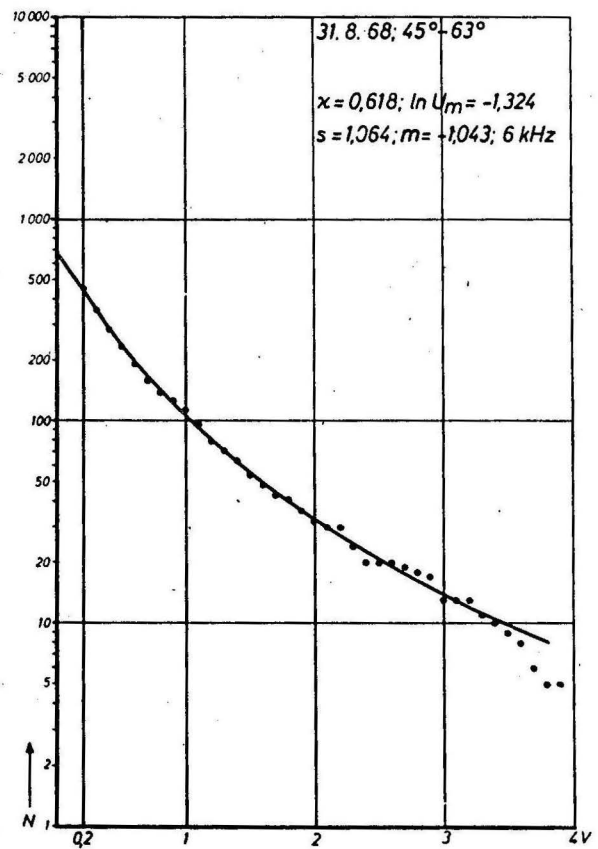
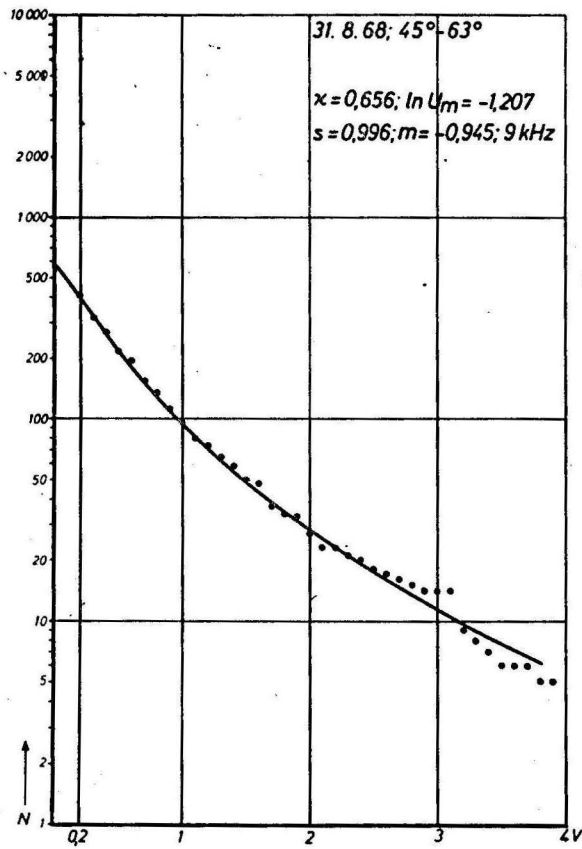
*COMMENT* ANFANG DES HAUPTPROGRAMMES;
FORM;
DACAPO:=READ(STAT);
*IF* STAT *LESS* 0 *THEY* *GO TO* FINE;
*COMMENT* STATION 1 IST BERLIN, 2 WEISSENAU, NEGATIVE ZAHL BEEENDET DIE RECHNUNG;
READ(TAG, MONAT, JAHR, FREQU, PEILOB, SEKTOR, FMITTE, DELTF, GODMAX);
*NOTEST*:=TAG *NOT EQUAL* 22 *AND* MONAT *NOT EQUAL* 2 *AND* JAHR *NOT EQUAL* 1969;
*IF* *NOTEST
*THEY* *BEGIN*
    PEILOB:=90+9-PEILOB;
    *IF* PEILOB *GREATER* 360 *THEY* PEILOB:=PEILOB-360;
    PRINT(STAT, TAG, MONAT, JAHR, FREQU, PEILOB, (PEILOB-SEKTOR), FMITTE, DELTF, GODMAX);
*END*
*ELSE* PRINT(0.001-FMITTE, 0.001-DELT);
DELTU:= 0.1;
READ(10, DELT1);
READ(%0);
I:=1;
DROP:=READ(N1);
*IF* I *EQUAL* 10 *THEY* *GO TO* STORE0;
I:=I+1;
*GO TO* DROP;
STORE0:=N[0]:=N[J1]:=N1;
XGJM1:=LN(10-DELTU);
YGJM1:=LN(1.0-41);
DIMEQ1:=*TRUE*;
REGR20;
*IF* SDEV *GREATER* .5
*THEY* *BEGIN*
    PRINT(999999);
    *GO TO* DACAPO;
*END* AUSSCHIEDUNG VON VERTEILUNGEN MIT ZU WENIGEN WERTEPAAREN NI UI;
JEND:=J;
PRINT(JEND, NP);
KAPPA:=1.0+SLOPE1;
*IF* KAPPA *NOT GREATER* .5
*THEY* *BEGIN*
    PRINT(999.999);
    *GO TO* DACAPO;
*END* AUSSCHIEDUNG VON VERTEILUNGEN MIT ZU KLEINEM KAPPA;
LNKA:=LN(KAPPA);
LNUM:=(LNKA-CONST)/KAPPA;
UAV:=EXP(XAV);
PRINT(KAPPA, LNUM, EXP(LNUM), XAV, UAV);
SIGMA:=(KAPPA-(LNUM-XAV) - 2.0-LNKA;
SIGMA:=EXP(0.5-SIGMA);
MY:=-XAV - (1.0/KAPPA) + KAPPA-SIGMA-SIGMA;
PRINT(0, SIGMA, MY);
DIMEQ1:=*FALSE*;
ITER:=1;
TRY:=REGR20;
DMY:=SLOPE1-SIGMA;
DS1:=SLOPE2-SIGMA-SIGMA;
NEXTMY:=MY-DMY;
NEXTS1:=SIGMA-DS1;
PRINT(ITER, NEXTS1, NEXTMY);
*IF* (ABS(DMY) *LESS* 0.01 *AND* ABS(DS1)/SIGMA *LESS* 0.05)
*OR* ITER *NOT LESS* 20
*THEY* *GO TO* EX;
MY:=NEXTMY;
SIGMA:=NEXTS1;
ITER:=ITER+1;
*GO TO* TRY;
EX:=NLGNO:=EXP(CONST);
PRINT(0.0, %0, NLGNO);
*IF* *NOTEST* *AND* ITER *LESS* 20
*THEY* *BEGIN*
    J:=0;
    ROW:=GJ:=(10+J-DELT1)-DELTU;
    XJ1:=LN(GJ);
    W:=(XJ1-NEXTMY)/NEXTS1;
    PROBAB;
    XJ2:=NLGNO-0;
    PRINT(GJ, W, J, ENTIER(XJ2*0.5));
    J:=J+1;
    *IF* J *NOT GREATER* JEND
    *THEY* *GO TO* ROW;
*END* TABELLENAUSGABE;
*GO TO* DACAPO;
FINE: *END* SCHAETZPROGRAMM MIT DOPPELTER REGRESSION;

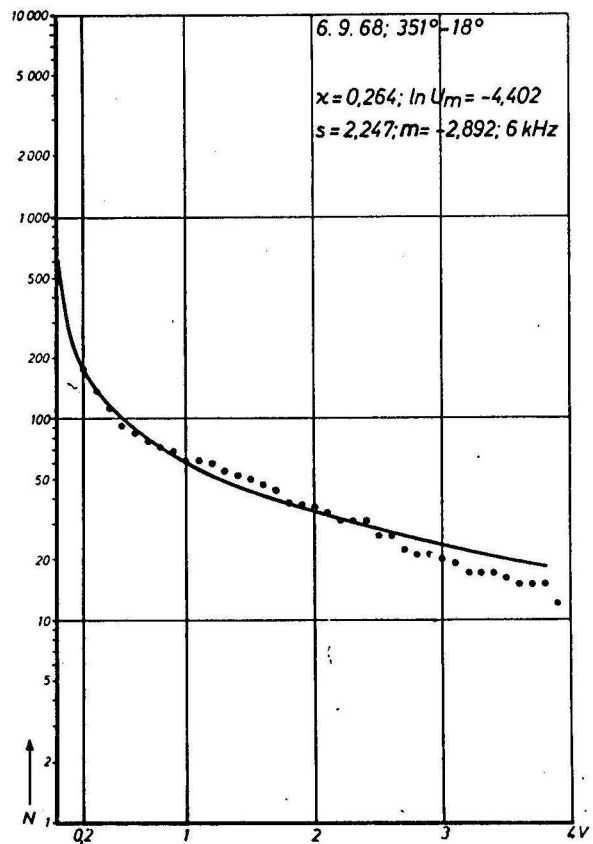
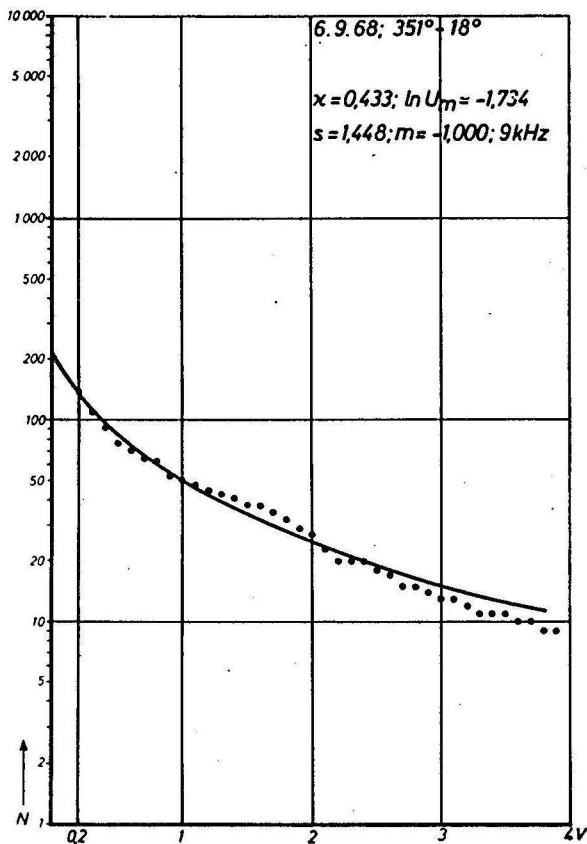
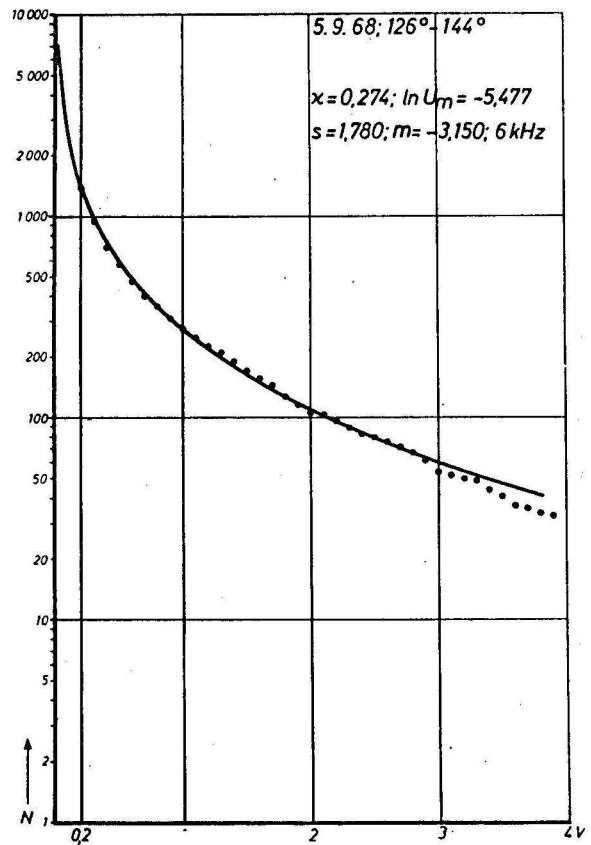
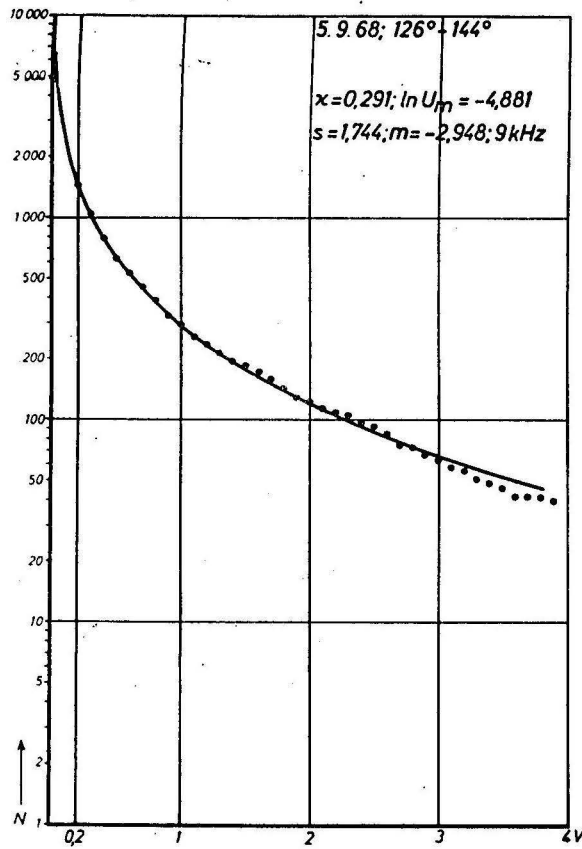
```

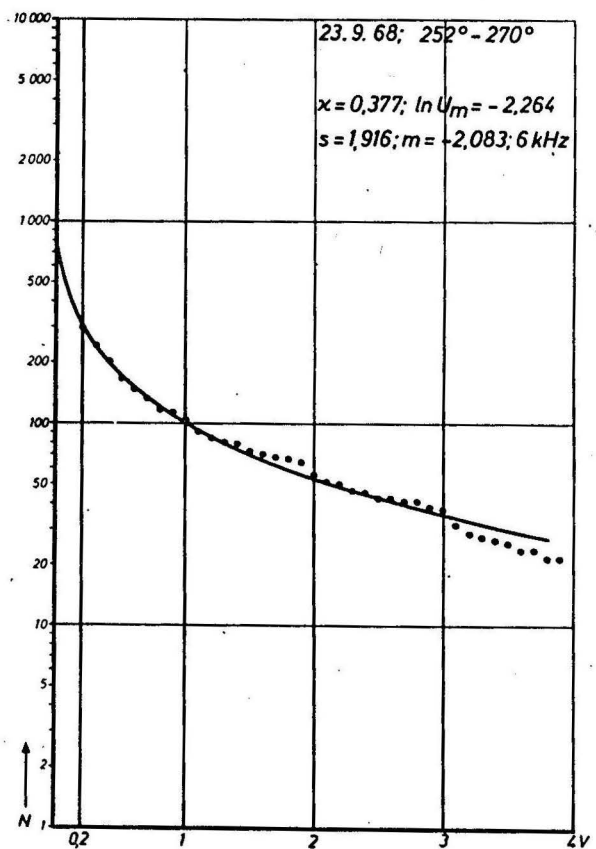
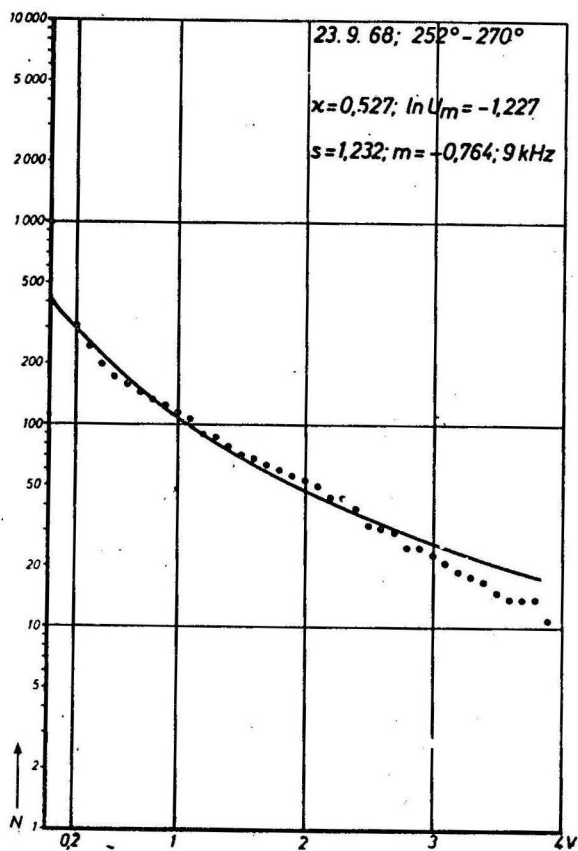
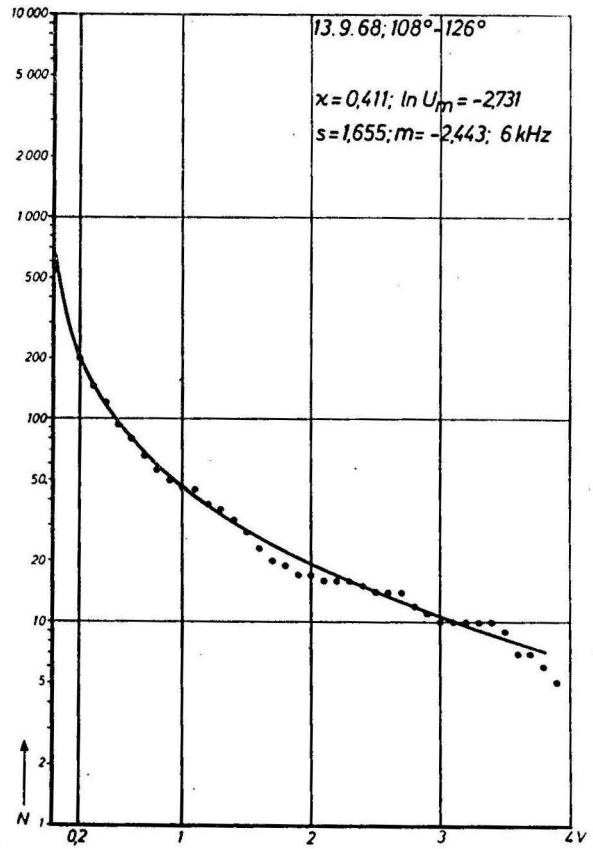
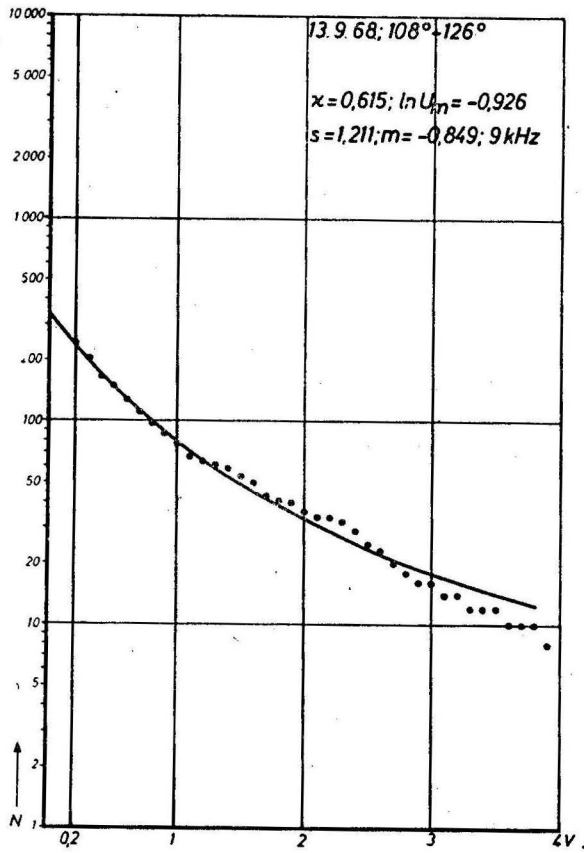














Statistische Parameter der Impulsspannung

U wird als Realisation der Zufallsvariablen  $\tilde{U}$  betrachtet, welche während der Meßzeit  $\Delta t$   $N_{tot}$ -mal realisiert wird.

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_U &= \int_{U=0}^{\infty} U z(U) dU = \text{Mittelwert} \\ \sigma_U^2 &= \int_{U=0}^{\infty} (U - \bar{u}_U)^2 z(U) dU = \text{Varianz} \end{aligned} \right\} \text{ von } \tilde{U}, \text{ mit } \tilde{U} = \frac{U}{IV} :$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \int_{U=0}^{\infty} \ln(u) z(u) du = \text{Mittelwert} \\ \sigma^2 &= \int_{U=0}^{\infty} (\ln(u) - \bar{u})^2 z(u) du = \text{Varianz} \end{aligned} \right\} \text{ von } \tilde{x} = \ln(\tilde{U})$$

$$\left. \begin{aligned} m_U \text{ und } s_U^2 \\ m \text{ und } s^2 \end{aligned} \right\} = \text{Schätzgrößen für } \left\{ \begin{aligned} \bar{u}_U \text{ und } \sigma_U^2 \\ \bar{u} \text{ und } \sigma^2 \end{aligned} \right.$$

w =  $\frac{\ln(u) - m}{s}$  = normierter Logarithmus der Impulsspannung,

w<sub>j</sub> = normierter Logarithmus der Schwellenspannung U<sub>j</sub>

Schätzfunktionen und Schätzgrößen

für	q(U)	z(U)	$\bar{u}_{N_{tot}}$	$\bar{u}_{N_j}$	= $\bar{u}_{N_{tot}} q(U)$
allgemein	Q(U)	Z(U)	$\bar{N}_{tot}$	$m_{N_j}$	= $\bar{N}_{tot} Q(U)$
exponential	$Q_{exp}(U)$	$Z_{exp}(U)$	$N_{expo}$	$N_{exp}(U_j)$	= $N_{expo} Q_{exp}(U_j)$
lognormal	$Q_{lgn}(u)$	$Z_{lgn}(u)$	$N_{ligno}$	$N_{lgn}(u_j)$	= $N_{ligno} Q_{lgn}(u_j)$

Als lognormal-Schätzfunktionen werden die in den Tabellen von Abramowitz-Stegun (1965), S. 932 ff angegebenen Funktionen Q und Z eingesetzt, wobei als Argument der normierte Logarithmus w einzusetzen ist.

$U_m$  und  $\chi$  = Parameter der Exponentialverteilung  $Q_{exp}(U)$

$m_0$  und  $s_0^2$  = Nullte Näherungen für m und  $s^2$

Berichtigung: S. 38, Gleichungen für  $\Delta_p^b$  und  $\Delta_p^c$  : vor  $g_j$  bzw.  $g_j x_{mj}^2$  fehlen Summenzeichen.

Anlage zum Technischen Bericht Nr. 110:

Übersicht über die Nomenklatur

Meßspannung und Unterteilung des Meßbereiches

- $U_A$  = Funktion  $U_A(t)$  der Zeit (t)  
 = gleichgerichteter Anzeigeimpuls für ein Atmospheric  
 $U$  = Impulsspannung = Maximalwert von  $U_A(t)$   
 $U_0$  = Untergrenze } des beobachtbaren Wertebereiches  
 $U_J$  = Obergrenze } der Impulsspannung U  
 $J$  = Zahl der Intervalle, in die der Meßbereich unterteilt wird  
 $\Delta U$  =  $(U_J - U_0)/J$  = Intervallbreite  
 $j$  = Laufnummer der Intervalle bzw. der Schwellenspannungen  
 $U_j$  =  $U_0 + j\Delta U$  = Schwellenspannung ( $j = 0 \dots J$ )  
 = Obergrenze } des j-ten Intervalles ( $j = 1 \dots J$ )  
 $U_{j-1}$  = Untergrenze }  
 $U_{mj}$  =  $\sqrt{U_{j-1}U_j}$  = (logarithmische) Mitte des j-ten Intervalles  
 $u$  =  $\frac{U}{IV}$ , entsprechend  $u_j$  und  $u_{mj}$   
 $x$  =  $\ln(u)$ , entsprechend  $x_j$  und  $x_{mj}$

Statistische Parameter der Zählimpulszahl und daraus abgeleiteter Größen

- ? : Buchstabe mit darübersetztem Fragezeichen symbolisiert.  
 Zufallsvariable  
 $\Delta t$  = Dauer einer Einzelbeobachtung eines Atmosphericherdes  
 $N_j$  = Realisation von  $\overset{?}{N}_j$  = Zahl der während  $\Delta t$  beobachteten  
 Impulse mit Impulsspannungen oberhalb  $U_j$  = "Zählimpulszahl"  
 $N_j/\Delta t$  = Zählimpulsrate  
 $N_{ij}$  = Ergebnis der i-ten Wiederholung }  
 $M$  = Zahl der Wiederholungen } der Bestimmung der Zähl-  
 impulszahl zur Schwelle  
 $S_{Nj}$  =  $\sum_{i=1}^M N_{ij}$  = Summe }  $U_j$ , - nur sinnvoll bei  
 vernachlässigbarem Trend  
 $\bar{N}_j$  =  $\frac{1}{M} S_{Nj}$  = Durchschnitt } aus M Bestimmungen der  
 Zählimpulszahl zur Schwel-  
 $\bar{s}_j^2$  =  $\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (N_{ij} - \bar{N}_j)^2$  } le  $U_j$ , - nur bestimmbar  
 im j. Idealfall vernach-  
 lässigbaren Trends  
 = quadratische Streuung  
 $\overset{u}{N}_j$  =  $\lim_{M \rightarrow \infty} \bar{N}_j$  = Mittelwert }  
 $\overset{6^2}{N}_j$  =  $\lim_{M \rightarrow \infty} \bar{s}_j^2$  = Varianz } der Zufallsvariablen  $\overset{?}{N}_j$   
 $\overset{u}{N}_j/\Delta t$  = mittlere Zählimpulsrate

$n_j = N_{j-1} - N_j = \text{Realisation von } \hat{N}_j = \hat{N}_{j-1} - \hat{N}_j$   
 $= \text{Intervallbesetzung des } j\text{-ten Intervalles}$

$\bar{u}_{nj} = \text{Mittelwert}$   
 $\sigma_{nj}^2 = \text{Varianz}$  } der Zufallsvariablen  $\hat{N}_j$

Zu unterscheiden sind

$\bar{N}_j$  und  $\bar{s}_j^2 = \text{experimentelle}$   
 $m_{Nj}$  und  $s_{Nj} = \text{theoretische}$  } Schätzgrößen für  $\bar{u}_{Nj}$  und  $\sigma_{Nj}^2$

Entsprechend sind

$m_{nj}$  und  $s_{nj} = \text{theoretische Schätzgrößen für}$   $\bar{u}_{nj}$  und  $\sigma_{nj}^2$

$y_j = \text{Realisation von } \hat{y}_j = \text{Funktion von } N_j \text{ und } n_j, \text{ die zur}$   
 Berechnung phänomenologischer Verteilungsparameter  
 gebraucht wird (Abschn. 4.22)

$s_{yj}^2 = \text{Schätzgröße für die Varianz von } \hat{y}_j$

$G_j = \text{const. } \frac{1}{s_{yj}^2} = \text{Gewicht des Wertepaares } y_j, x_{mj}$

### Impuls-Gesamtzahl und Wahrscheinlichkeiten

$N_0 = \text{Realisation von } \hat{N}_0 = \text{Zählimpulszahl zur niedrigsten}$   
 Schwelle  $U_0$  des meßbaren Bereiches

$N_{tot} = \text{Realisation von } \hat{N}_{tot} = \text{Gesamtzahl der während } \Delta t \text{ vom}$   
 beobachteten Herd ausgesendeten Impulse

$\bar{u}_{N_{tot}} = \text{Mittelwert von } \hat{N}_{tot}$

$\bar{u}_{N_{tot}} / \Delta t = \text{mittlere Impulsrate des Atmosphericsherd}$

$\frac{\bar{u}_{Nj}}{\bar{u}_{N_{tot}}} = q_j = \text{Funktion } q(U_j) \text{ der Schwellenspannung } U_j$   
 $= \text{Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein (während } \Delta t \text{ beobach-}$   
 teter) Impuls eine Impulsspannung oberhalb  $U_j$  hat

$\Phi(N_j, U_j) = \text{Wahrscheinlichkeit dafür, daß während } \Delta t \text{ oberhalb}$   
 der Schwelle  $U_j$   $N_j$  Impulse beobachtet werden.

$\frac{\bar{u}_{nj}}{\bar{u}_{N_{tot}}} = \int_{U_{j-1}}^{U_j} z(U) dU \approx z(U_{mj}) \Delta U$  wobei  $z(U) = \frac{dq}{dU}$

$= \text{Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein (während } \Delta t \text{ beobach-}$   
 teter) Impuls eine Impulsspannung hat, die in das  
 $j$ -te Intervall fällt

$w_p = p\%$ -Quantile der Normalverteilung



