

HEINRICH-HERTZ-INSTITUT FÜR SCHWINGUNGSFORSCHUNG
BERLIN-CHARLOTTENBURG

Technischer Bericht Nr. 121

Die Berechnung der Dämpfung elektromagnetischer Wellen
bei $\lambda = 5.77, 3.3$ und 2 mm unter besonderer Berücksichtigung
der Tropfengrößen-Verteilung

von

Dipl.-Ing. Jörgen Sander

B e r l i n

1 9 7 0

Die Berechnung der Dämpfung elektromagnetischer Wellen bei
 $\lambda = 5.77, 3.3$ und 2 mm unter besonderer Berücksichtigung
der Tropfengrößen-Verteilung.

Zusammenfassung

In diesem Bericht werden Angaben über Berechnungen gemacht, die sich mit der Dämpfung von mm-Wellen durch Regen unter besonderer Berücksichtigung der Tropfengrößen-Verteilung im Regen befassen. Grundlage für diese Berechnungen, die für die Wellenlängen $\lambda = 2, 3.3$ und 5.77 mm durchgeführt wurden, ist die Mie'sche Theorie.

Dargestellt werden die Wirkungsquerschnitte und Wirkungs-faktoren von kugelförmigen Tropfen als Funktion des Tropfenradius R für Radien zwischen 0 und 6 mm, die theoretisch möglichen oberen und unteren Grenzen der Regendämpfung als Funktion der Regenintensität, sowie diese Dämpfungen als Funktion der Regenintensität für die Tropfengrößen-Verteilungen nach Laws und Parsons, Marshall und Palmer und Deirmendjian. Schließlich werden Angaben über den Zusammenhang der Dämpfungen bei den 3 Wellenlängen und den Parametern einer durch 3 Konstanten gegebenen Funktion für die Tropfengrößen-Verteilung gemacht.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

Der Bearbeiter:

Jörgen Sander

(Dipl.-Ing. Jörgen Sander)



Der Abteilungsleiter

F.W. Gundlach
(Prof.Dr.-Ing. F.W. Gundlach)

Der Institutsdirektor

L. Cremer
(Prof.Dr.-Ing. L. Cremer)

Berlin-Charlottenburg, den 15. Juli 1970

Inhalt:

Benutzte Symbole

1. Einleitung
2. Die Berechnung der Wirkungsquerschnitte und Wirkungsfaktoren
 - 2.1 Definitionen
 - 2.2 Verlustbehaftete dielektrische Kugel im Feld einer ebenen elektromagnetischen Welle
 - 2.3 Die dielektrischen Eigenschaften von Wasser
 - 2.4 Das Programm zur Berechnung der Wirkungsquerschnitte und Wirkungsfaktoren
 - 2.5 Ergebnisse
3. Die Dämpfung von mm-Wellen durch Regen als Funktion der Regenintensität
 - 3.1 " Idealer " Regen mit Tropfen gleicher Größe
 - 3.2 Tropfengrößen-Verteilung
 - 3.3 Die Dämpfung durch Regen als Funktion der Regenintensität für die Tropfengrößen-Verteilungen nach Laws und Parsons, Marshall und Palmer und Deirmendjian.
4. Die Abhängigkeit der Dämpfung durch Regen bei $\lambda = 5.77, 3.3$ und 2 mm von den Parametern einer allgemeinen Verteilungsfunktion
 - 4.1 Die allgemeine Verteilungsfunktion
 - 4.2 Ergebnisse

Anhang

Literaturangaben

Benutzte Symbole :

a, a^*	Konstanten der Tropfengrößen-Verteilung $n(R)$
$\left. \begin{matrix} \frac{a}{n} \\ \frac{b}{n} \end{matrix} \right\}$	Komplexe Mie'sche Streukoeffizienten
b	Konstante in der allgemeinen Tropfengrößen-Verteilung
D	Dämpfungskoeffizient in $\text{dB} \cdot \text{km}^{-1}$
d	Tropfendurchmesser
F	Von der Welle "gesehene" Fläche in $\text{mm}^2 \cdot \text{m}^{-3}$ beim Durchlaufen eines Volumens
$G(\lambda, R)$	Dämpfungskoeffizient bei "idealem" Regen der Intensität $1 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$.
$H_n^{(2)} + 1/2^{(\rho)}$	Hankelfunktion halbzahliger Ordnung 2. Art mit dem Argument ρ
$h_n(\rho)$	sphärische Hankelfunktion
$J_{n+1/2}^{(\rho)}$	Besselfunktion halbzahliger Ordnung
$j_n(\rho)$	sphärische Besselfunktion
$\frac{k_1}{k_2}$	komplexe Wellenzahlen im Innen- u. Außenraum einer Kugel
M	Kondensierter Wassergehalt pro m^3
$\underline{m} = m_1 + jm_2$	Komplexer Brechungsindex von Wasser gegen Luft
N	Tropfenzahl pro m^3
$n(R)$	Tropfengrößen-Verteilungsfunktion in $\text{mm}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
$n'(R)$	Normierte Tropfengrößen-Verteilungsfunktion mit $\int_0^{\infty} n'(R) dR = 1$
P	Regenintensität in $\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$
Q_A	Absorptions-Querschnitt
Q'_A	Normierter Absorptions-Querschnitt
Q_S	Streuquerschnitt
Q'_S	Normierter Streuquerschnitt
Q_T	Gesamtverlustquerschnitt
Q'_T	Normierter Gesamtverlustquerschnitt
R	Tropfenradius
r	Betrag des Reflexionskoeffizienten
R_c	Lage des Maximums der Tropfengrößen-Verteilung
S	Energiefluß
T	Temperatur in $^{\circ}\text{C}$
$V(R)$	Tropfengeschwindigkeit in ms^{-1}
X	Prozentualer Anteil am Gesamtwasservolumen

$Z_n(\rho)$	Zylinderfunktion
$Z'_n(\rho)$	Ableitung der Zylinderfunktion nach ρ
α	Exponent in der Tropfenverteilungsfunktion
$\alpha(1)$	Extinktions-Koeffizient
$\Gamma(x)$	Gammafunktion mit dem Argument x
γ	Konstante in der Tropfengrößen-Verteilungsfunktion
$\underline{\epsilon}$	Komplexe Dielektrizitäts-Konstante
ϵ_0	Dielektrizitätskonstante in Vakuum
ϵ_1	Dielektrizitätskonstante in einer Kugel
$\left. \begin{matrix} \epsilon_0 \\ \epsilon_\infty \end{matrix} \right\}$	Konstanten in der Debye-Formel
λ	Wellenlänge
$\Delta\lambda$	Konstante in der Debye - Formel
μ	Mittelwert
ω	Kreisfrequenz
ρ	Argument der Zylinderfunktionen
σ	Radarrückstreuquerschnitt
σ'	Normierter Radarrückstreuquerschnitt
σ_1	Leitfähigkeit in einer Kugel
σ^2	Streuung der Tropfengrößen-Verteilungsfunktion

1. Einleitung

Seit dem Frühjahr 1969 werden am Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung Messungen zur Dämpfung von mm-Wellen durch meteorologische Niederschläge mit 3 auf einer 500 m langen Meßstrecke parallel arbeitenden Geräten durchgeführt. Die Sendefrequenzen sind 52, 90, 8 und 149, 9 GHz, das entspricht den Wellenlängen 5, 77, 3, 3 und 2 mm. Auf der von den ausgesendeten Signalen zweifach durchlaufenen Meßstrecke befinden sich 3 Meßstellen zur Erfassung der für die Auswertung notwendigen meteorologischen Daten, wie Regenintensität und Tropfengrößen-Verteilung im Regen. Die Geräte zur Erfassung der Tropfengrößen-Verteilung wurden am Heinrich-Hertz-Institut entwickelt und gebaut.

[Lammers, 1966; Schmidt, 1966; Lammers, 1969].

Als Grundlage für die Auswertung der Ergebnisse dieser Messungen wurden die im folgenden angegebenen Rechnungen durchgeführt. Die Rechnungen selbst basieren auf der Darstellung der Mie'sche Theorie durch Stratton [1941], auf den Rechnungen von Ryde und Ryde [1945], wie sie im Abschnitt 8.7 des Buches von Kerr [1951] zusammengefaßt werden, und auf Veröffentlichungen von Deirmendjian [1961, 1963]. In einer Veröffentlichung von Medhurst [1965] wird eine Übersicht über die bis zum Jahr 1962 durchgeführten Messungen zur Regendämpfung im cm- und mm-Wellen-Bereich gegeben. Besonders bei den längeren Wellenlängen wird die theoretisch zu erwartende maximale Dämpfung (aufgetragen über der Regenintensität) zum Teil erheblich überschritten, was die Frage nach dem Geltungsbereich der Mie'schen Theorie als Grundlage für die theoretische Behandlung der Dämpfung elektromagnetischer Wellen durch Regen aufwirft. Der Grund für diese Abweichungen scheint aber zunächst einmal eher in den Ungenauigkeiten bei der Bestimmung der jeweiligen Regenintensitäten zu suchen sein. Selbst, wenn man annimmt, daß die gebräuchlichen Intensitätsmesser die Regenintensitäten absolut genau auch in ihrem zeitlichen Verlauf registrieren, ist im allgemeinen die Anzahl der Stichproben gemessen an der Länge der Meßstrecke viel zu klein, um hier zuverlässige Angaben machen zu können. In einem Kommentar zu dem oben zitierten Artikel von Medhurst weist Ruthroft [1969] auf diese Tatsache hin. In seiner Antwort auf diesen Kommentar erwähnt Medhurst [1969], daß die bisherigen Messungen zur Regendämpfung auf eine Tendenz zur besseren Übereinstimmung von Theorie und Experiment mit kürzer werdender Wellenlänge hindeuten könnten. In diesem Zusammenhang werden auch die Unter-

suchungen bei 5,56 mm von Lammers [1966] zitiert, die hier am Heinrich-Hertz-Institut 1963 und 1964 durchgeführt wurden.

Wir hoffen, daß die derzeitig an unserem Institut laufenden Messungen einige weitere Anhaltspunkte zur Abschätzung des Geltungsbereiches der Mie'schen Theorie bringen werden.

2. Die Berechnung der Wirkungsquerschnitte und Wirkungsfaktoren

2.1 Definitionen

Trifft eine elektromagnetische Welle auf einen dielektrischen Körper, werden in diesem synchrone Schwingungen freier und gebundener Ladungen erzeugt, die ihrerseits ein sekundäres Feld innerhalb und außerhalb dieses Körpers aufbauen, das sich dem anregenden Feld überlagert. Der primären Welle wird also Energie entzogen, die durch das sekundäre Feld in alle Richtungen einschließlich der der primären Welle gestreut wird. Man definiert für den Körper einen Querschnitt Q_S , der das Verhältnis der gestreuten Leistung zu der Leistungsdichte des primären Feldes angibt.

Ist das Dielektrikum des Körpers verlustbehaftet, d. h. ist seine Dielektrizitätskonstante komplex, ergeben sich zusätzliche Verluste durch Absorption, die durch den Absorptionsquerschnitt Q_A beschrieben werden können: Q_A ist das Verhältnis der im verlustbehafteten Dielektrikum in Wärme umgesetzten Leistung zu Leistungsdichte des primären Feldes.

Der Gesamtverlustquerschnitt Q_T ist dann die Summe aus Q_S und Q_A . Das Produkt aus Q_T und der Energiedichte der primären Welle ergibt deren Energieverlust.

Für Radaranwendungen interessiert noch der sogenannte Rückstreuquerschnitt σ : σ ist die Fläche, die, multipliziert mit der Leistungsdichte der einfallenden Welle, die gesamte abgestrahlte Leistung eines isotropen Strahlers ergibt, der in die entgegengesetzte Richtung des Wellenvektors der primären Welle die gleiche Leistung ausstrahlt, wie dies der streuende Körper tut.

Q_S , Q_A , Q_T und σ haben die Dimension einer Fläche. Bezieht man diese Größen auf die von der primären Welle gesehene "Fläche", im Fall einer dielektrischen Kugel mit dem Radius R wäre das πR^2 , erhält man die Wir-

kungsfaktoren oder normierten Wirkungsquerschnitte.

2.2 Verlustbehaftete dielektrische Kugel im Feld einer ebenen elektromagnetischen Welle.

Die Lösung des Randwertproblems einer verlustbehafteten dielektrischen Kugel im Feld einer ebenen elektromagnetischen Welle wurde zuerst von Mie [1908] angegeben. Für die oben definierten Größen gilt [Stratton, 1941]:

$$Q_T = -\frac{\lambda^2}{2\pi} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (a_n + b_n) \quad (2.2.1)$$

$$Q_S = \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad (2.2.2)$$

$$Q_A = Q_T - Q_S \quad (2.2.3)$$

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{4\pi} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1) (a_n - b_n) \right|^2 \quad (2.2.4)$$

a_n und b_n sind die Mie'schen Streukoeffizienten.

$$a_n = -\frac{j_n(\varrho) [m\varrho \cdot j_n(m\varrho)]' - j_n(m\varrho) [\varrho j_n(\varrho)]'}{h_n^{(2)}(\varrho) [m\varrho j_n(m\varrho)]' - j_n(m\varrho) [\varrho h_n^{(2)}(\varrho)]'} \quad (2.2.5)$$

$$b_n = -\frac{m^2 j_n(m\varrho) [\varrho j_n(\varrho)]' - j_n(\varrho) [m\varrho j_n(m\varrho)]'}{m^2 j_n(m\varrho) [\varrho h_n^{(2)}(\varrho)]' - h_n^{(2)}(\varrho) [m\varrho j_n(m\varrho)]'} \quad (2.2.6)$$

mit $\varrho = \frac{2\hat{n}R}{\lambda}$;

R = Kugelradius

λ = Wellenlänge im Vakuum

m ist der komplexe Brechungsindex, er berechnet sich aus dem Verhältnis der Wellenzahlen im Innen- und Außenraum. Für eine dielektrische Kugel im Vakuum gilt

$$m = m_1 + jm_2 = \frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\epsilon_1 - j \frac{\sigma_1}{\omega \cdot \epsilon_0}} \quad (2.2.7)$$

ϵ_1, σ_1

Dielektrizität und

Leitfähigkeit der Kugel

weiterhin gilt

$$j_n(\varrho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\varrho}} J_{n+1/2}(\varrho)$$

$$h_n^{(2)}(\varrho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\varrho}} H_{n+1/2}^{(2)}(\varrho)$$

Die hier und im folgenden benutzten Beziehungen für Zylinderfunktionen sind dem "Handbook of Mathematical Functions" von Abramowitz, Stegun entnommen.

Nähere Angaben finden sich im Literaturhinweis.

$J_{n+1/2}^{(0)}$ und $H_{n+1/2}^{(0)}$ sind Bessel- bzw. Hankelfunktionen halbzahliger Ordnung, in den Gleichungen (2.2.5) und (2.2.6) sind ihre Argumente zum Teil komplex. Eine Zerlegung der Mie'schen Streukoeffizienten in Real- und Imaginärteil ist mit Hilfe der folgenden beiden für Zylinderfunktionen $Z_n(\varrho)$ geltenden Beziehungen möglich. Es ist

$$Z_{n+1}(\varrho) = (2n+1) \frac{Z_n(\varrho)}{\varrho} - Z_{n-1}(\varrho)$$

und
$$Z_n'(\varrho) = \frac{dZ_n(\varrho)}{d\varrho} = Z_{n-1}(\varrho) - (n+1) \frac{Z_n(\varrho)}{\varrho}$$

Hiermit erhält man aus den Gleichungen (2.2.5) und (2.2.6) (Deirmendjan, 1961)

$$\underline{a}_n = - \frac{[m A_n(m\varrho) + \frac{n}{\varrho}] J_{n+1/2}(\varrho) - J_{n-1/2}(\varrho)}{[m A_n(m\varrho) + \frac{n}{\varrho}] [J_{n+1/2}(\varrho) + j(-1)^n J_{-n-1/2}(\varrho)] + \frac{-J_{n-1/2}(\varrho) + j(-1)^n J_{-n+1/2}(\varrho)}{}} \quad (2.2.8)$$

$$\underline{b}_n = - \frac{[\frac{A_n(m\varrho)}{m} + \frac{n}{\varrho}] J_{n+1/2}(\varrho) - J_{n-1/2}(\varrho)}{[\frac{A_n(m\varrho)}{m} + \frac{n}{\varrho}] [J_{n+1/2}(\varrho) + j(-1)^n J_{-n-1/2}(\varrho)] + \frac{-J_{n-1/2}(\varrho) + j(-1)^n J_{-n+1/2}(\varrho)}{}} \quad (2.2.9)$$

$$\text{mit } \underline{A}_n(\underline{m}\varrho) = - \left(\frac{n}{\underline{m}\varrho} \right) + \frac{J_{n-1/2}(\underline{m}\varrho)}{J_{n+1/2}(\underline{m}\varrho)} \quad (2.2.10)$$

Für die $\underline{A}_n(\underline{m}\varrho)$ gilt die Rekursionsbeziehung

$$\underline{A}_n(\underline{m}\varrho) = - \left(\frac{n}{\underline{m}\varrho} \right) + \frac{1}{\left(\frac{n}{\underline{m}\varrho} \right) - \underline{A}_{n-1}(\underline{m}\varrho)} \quad (2.2.11)$$

mit dem Anfangswert

$$\begin{aligned} \underline{A}_0(\underline{m}\varrho) &= \frac{J_{-1/2}(\underline{m}\varrho)}{J_{+1/2}(\underline{m}\varrho)} = \text{ctg}(\underline{m}\varrho) \\ &= - \frac{2 \sin(2\underline{m}_1 \varrho)}{2 \cos(2\underline{m}_1 \varrho) - (e^{2\underline{m}_2 \varrho} + e^{-2\underline{m}_2 \varrho})} \\ &\quad + j \frac{e^{2\underline{m}_2 \varrho} - e^{-2\underline{m}_2 \varrho}}{2 \cos(2\underline{m}_1 \varrho) - (e^{2\underline{m}_2 \varrho} + e^{-2\underline{m}_2 \varrho})} \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Bei Deirmendjian (1961) entspricht die Gleichung (5) für \underline{a}_n der hier angegebenen Gleichung (2.2.9) für \underline{b}_n .

Aus Gründen der Programmierungstechnik werden die Funktionen $J_{n-1/2}(\varrho)$ und $J_{-n+1/2}(\varrho)$ in den Gleichungen (2.2.8) und (2.2.9) durch die folgenden Ausdrücke ersetzt

$$\begin{aligned} J_{n-1/2}(\varrho) &= \frac{(2n+1)}{\varrho} J_{n+1/2}(\varrho) - J_{(n+1)+1/2}(\varrho) \\ J_{-n+1/2}(\varrho) &= - \frac{(2n+1)}{\varrho} J_{-n-1/2}(\varrho) - J_{-(n+1)-1/2}(\varrho) \end{aligned}$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \underline{a}_n = & \frac{\left[\underline{m} \underline{A}_n(\underline{m}\varrho) - \frac{(n+1)}{\varrho} \right] J_{n+1/2}(\varrho) + J_{(n+1)+1/2}(\varrho)}{\left[\underline{m} \underline{A}_n(\underline{m}\varrho) - \frac{(n+1)}{\varrho} \right] \left[J_{n+1/2}(\varrho) + j(-1)^n J_{-n-1/2}(\varrho) \right] + J_{(n+1)+1/2}(\varrho) +} \\ & \underline{- j(-1)^n J_{-(n+1)-1/2}(\varrho)} \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

$$b_n = - \frac{\left[\frac{A_n(m\rho)}{m} - \frac{(n+1)}{\rho} \right] \mathcal{J}_{n+\frac{1}{2}}(\rho) + \mathcal{J}_{(n+1)+\frac{1}{2}}(\rho)}{\left[\frac{A_n(m\rho)}{m} - \frac{(n+1)}{\rho} \right] \left[\mathcal{J}_{n+\frac{1}{2}}(\rho) + j(-1)^n \mathcal{J}_{-n-\frac{1}{2}}(\rho) \right] + \mathcal{J}_{(n+1)+\frac{1}{2}}(\rho) - j(-1)^n \mathcal{J}_{-(n+1)-\frac{1}{2}}(\rho)}$$

(2.2.14)

Die weitere Zerlegung der Gleichungen (2.2.13) und (2.2.14) in Real- und Imaginärteil ist einfach. Die endgültigen Beziehungen werden hier wegen ihrer Länge und Unübersichtlichkeit nicht gebracht.

2.3 Die dielektrischen Eigenschaften von Wasser.

Die Dielektrizitätskonstante von Wasser ist frequenz- und temperaturabhängig.

Die Frequenz-Abhängigkeit wird beschrieben durch die Debye -Formel, (Debye 1929),

$$\underline{\epsilon} = \frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{1 + j \frac{\Delta\lambda}{\lambda}} + \epsilon_\infty \quad (2.3.1)$$

ϵ_0 , ϵ_∞ und $\Delta\lambda$ sind temperaturabhängige Konstanten, die von Saxton und Lane (1946) für den cm-Wellen-Bereich gemessen wurden. Diese Konstanten sind bei Kerr (1951) veröffentlicht. Hiernach gilt

$\frac{T}{^\circ\text{C}}$	ϵ_0	ϵ_∞	$\frac{\Delta\lambda}{\text{cm}}$
0	88	5,5	3,59
10	84	5,5	2,24
18	81	5,5	1,66

Tab. 1

Messungen bei 6,2 mm (Lane u. Saxton 1952) und bei 2 mm (Stanevich u. Yaroslavskii, 1961) unterstützen die Annahme, daß Gl.(2.3.1) zusammen

mit den Konstanten der Tabelle 1 auch für den mm-Wellen-Bereich gelten.

Nach Gleichung (2. 2. 7) gilt für den Brechungsindex \underline{m}

$$\underline{m} = m_1 + j m_2 = \sqrt{\underline{\epsilon}}$$

Für $\lambda = 2, 3.3$ und 5.77 mm , $T = 0, 10$ und 18° C und m_1 und m_2 erhält man die folgenden Werte

$\frac{\lambda}{\text{mm}}$	$\frac{T}{^\circ\text{C}}$	m_1	$-m_2$
2	0	2.5604	0,8947
	10	2.7735	1.2536
	18	2.9751	1.5069
3.3	0	2.8224	1.3322
	10	3.2066	1.7649
	18	3.5397	2.0395
5.77	0	3.3586	1.9243
	10	4.0003	2.3702
	18	4.5131	2.5941

Tab. 2

2.4 Das Programm zur Berechnung der Wirkungsquerschnitte und Wirkungskfaktoren

Das Programm zur Berechnung der Größen Q_S, Q_T, Q_A, σ sowie der Wirkungskfaktoren wurde in Fortran II geschrieben. Die Rekursionsbeziehung zur Bestimmung der \underline{A}_n ($\underline{m}\rho$) wurde bereits mit den Gleichungen (2. 2. 11) und (2. 2. 12) angegeben. Die Besselfunktionen $J_{-n-1/2}(\rho)$ und $J_{-(n+1)-1/2}(\rho)$ werden mit der Rekursionsbeziehung

$$J_{-(n+1)-1/2}(\rho) = -\frac{2n+1}{\rho} J_{-n-1/2}(\rho) + J_{-(n-1)-1/2}(\rho)$$

und den Anfangswerten

$$J_{-1/2} = -\sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} \frac{1}{\rho} \left[\frac{\cos \rho}{\rho} + \sin \rho \right]$$

$$J_{-5/2} = -\sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} \left[\left(1 - \frac{3}{\rho^2}\right) \cos \rho - \frac{3}{\rho} \sin \rho \right]$$

berechnet.

Im Programm werden die Summierungen nach den Gleichungen (2. 2. 1) - (2. 2. 4) abgebrochen , wenn die Beträge der Realteile der Mie'schen Streukoeffizienten

\underline{a}_n und $\underline{b}_n < 10^{-8}$ sind. (Die Beträge der Imaginärteile der \underline{a}_n und \underline{b}_n sind für $\rho \geq 1$ jeweils kleiner als die der Realteile, (Penndorf, 1957)).

Für $\rho = 1.0$ wird die Reihe bei der geforderten Genauigkeit von 10^{-8} nach dem 6. Glied abgebrochen. Bei einer 12-stelligen Rechnung und den üblichen Verfahren der Vorwärts-Rekursion zur Berechnung der $J_{n+1/2}(\rho)$ weichen diese aber schon in der 8. Stelle und die $J_{(n+1)+1/2}(\rho)$ in der 7. Stelle von ihrem wahren Funktionswert ab. Für $\lambda = 2$ mm und die im Regen vorkommenden Tropfengrößen wird ρ maximal 10.00. Zur Erreichung der oben geforderten Genauigkeit benötigt man hier 20 Glieder der Reihenentwicklung. Bei einer Anwendung der Vorwärtsrekursion weichen hier $J_{20+1/2}(10.00)$ in der 7. Stelle und $J_{21+1/2}(10.00)$ in der 6. Stelle von ihren wahren Funktionswerten ab. Die Genauigkeit von 10^{-8} ist also mit diesem Verfahren nicht zu erreichen.

Nur wenig mehr Aufwand als das Verfahren der Vorwärtsrekursion benötigt man für die bei Abramowitz, Stegun auf Seite 452 angegebene Methode zur Berechnung von Besselfunktionen halbzahliger Ordnung :

Für eine Zahl N^* , die größer als die Ordnung N der zu berechnenden Funktion $J_{N+1/2}(\rho)$ ist, werden versuchsweise $J_{(N^*+1)+1/2}(\rho) = 0$ und $J_{N^*+1/2}(\rho) = 1$ gesetzt; für alle $n < N^*$ berechnet man nun nach der folgenden für Besselfunktionen geltenden Beziehung die Funktionen

$$J'_{(n-1)+1/2}(\rho) = \frac{(2n+1)}{\rho} J'_{n+1/2}(\rho) - J'_{(n+1)+1/2}(\rho)$$

Es ist $J_{+1/2}(\rho) = \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} \frac{\sin(\rho)}{\rho}$

mit $J_{+1/2}(\rho) = A \cdot J'_{+1/2}(\rho)$

wird $A = \frac{\sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} \frac{\sin(\rho)}{\rho}}{J'_{+1/2}(\rho)}$

Man erhält eine 1. Näherung für die $J_{n+1/2}^{(\rho)}$ durch Multiplikation aller $J_{n+1/2}^{(\rho)}$ mit A. Erhöht man nun beispielsweise N^* um 5, führt die oben beschriebene Operation ein 2. Mal durch und vergleicht den Funktionswert $J_{N+1/2}^{(\rho)}$ der 1. Näherung mit dem aus der 2. Näherung gewonnenen, so ist die Differenz beider Näherungen gleich der Abweichung ε der 1. Näherung von dem wahren Funktionswert. (Corbato, Uretsky 1959). Die Genauigkeit, mit der die Funktionen $J_{n+1/2}^{(\rho)}$ berechnet werden können, ist bei diesem Verfahren direkt beschränkt durch die Wortlänge des Rechners. Die Wirkungsquerschnitte und Wirkungsfaktoren für die 3 Wellenlängen wurden in folgenden Intervallen berechnet:

$$\lambda = 5.77 \text{ mm} \quad 0 (0.05) \quad 1.6 (0.2) \quad 3.4 \text{ mm}$$

$$\lambda = 3.3 \text{ mm} \quad 0 (0.025) \quad 1.0 (0.1) \quad 3.4 \text{ mm}$$

$$\lambda = 2 \text{ mm} \quad 0 (0.01) \quad 1.0 (0.05) \quad 3.4 \text{ mm}$$

Zur Berechnung der Dämpfung durch Regen als Funktion der Regenintensität bei 0, 10 und 18° C für verschiedene Tropfengrößen-Verteilungen wurden die Q_T -Werte zusätzlich für $R = 0(0.01) 6 \text{ mm}$ auf Lochstreifen ausgegeben.

2.5 Ergebnisse

Ein Teil der Rechenergebnisse ist am Ende dieses Berichts in Diagrammen dargestellt. Die Abbildungen 1, 2 und 3 zeigen den Verlauf der Wirkungsfaktoren Q'_T , Q'_S und Q'_A für die Temperaturen 0, 10 und 18° C und die oben angegebenen Wellenlängen als Funktion des Tropfenradius R. Üblich ist an sich eine Darstellung über der dimensionslosen Größe $\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)$, das würde aber hier den Vergleich der Verhältnisse bei den 3 Wellenlängen erschweren.

Abb. 1 gilt für $\lambda = 5.77 \text{ mm}$. Die Zunahme der Streuung mit der Temperatur bei gleichzeitiger Abnahme der Absorption führt zu einer relativ geringen Temperatur-Abhängigkeit der resultierenden Größe Q'_T . Da der weitaus größte Teil der im Regen vorkommenden Tropfen-Größen zwischen $R = 0$ und 0,7 mm liegt, wird die Temperaturabhängigkeit der Dämpfung durch Regen sehr schwach sein. Wie bei den anderen

beiden Wellenlängen überwiegen für $R > \frac{\lambda}{2\pi}$ die Verluste durch Streuung die durch Absorption.

Nach Abb. 3 für $\lambda = 2$ mm ist der Einfluß der Temperatur auf den normierten Gesamtverlust - Querschnitt für $R > 0,75$ mm praktisch Null, d. h. die Temperatur-Abhängigkeiten von Streuung und Absorption heben sich auf. Die Vorzeichenänderung für die Temperatur-Abhängigkeit der Absorption bei $R \approx \frac{\lambda}{2\pi}$ führt ebenfalls wie bei 5.77 mm praktisch zu einem Aufheben der resultierenden Temperatur-Abhängigkeit der Dämpfung durch Regen.

Abb. 4 zeigt den Vergleich der Verlustfaktoren Q'_T über R für die 3 Wellenlängen. Das Verhältnis der Dämpfung durch natürlichen Regen bei den 3 Wellenlängen ist im wesentlichen bestimmt durch den Verlauf der Verlustfaktoren im Bereich $0 < R < 1.0$ mm.

Der Imaginärteil des Brechungsindex \underline{m} , der ja die Absorption bestimmt, nimmt mit λ zu (vgl. Tab. 2 in 2.3). Der Einfluß der Absorption auf die Schwingungsamplituden der Q_T im Resonanzgebiet $R \approx \frac{\lambda}{2\pi}$ ist aus Abb. 4 schwach zu erkennen.

Die Abbildungen 5, 6 und 7 zeigen die Wirkungsquerschnitte Q_T , Q_S und Q_A bei 10^0 C als Funktion von R für die 3 Wellenlängen. Es gilt $Q = \pi \cdot R^2 \cdot Q'$. Abb. 8 zeigt analog zu Abb. 4 die Q'_T - Verläufe für die 3 Wellenlängen.

Die Abhängigkeit des Radarrückstreuquerschnitts vom Tropfenradius interessiert im Zusammenhang mit unseren Dämpfungsmessungen wenig, die Diagramme für die 3 Wellenlängen werden hier nur der Vollständigkeit halber gebracht. Die Abbildungen 9, 10 und 11 zeigen den auf die Fläche πR^2 normierten Rückstreuquerschnitt σ' als Funktion von R . Für große R nähern sich die Funktionen dem Wert des Reflexionsgrads r einer ebenen Fläche mit den dielektrischen Eigenschaften der Kugel. (Mit $\underline{m} = m_1 + jm_2$ ist $r = \frac{(m_1 - 1)^2 + m_2^2}{(m_1 + 1)^2 + m_2^2}$

Für große R und $T = 10^0$ C ist r für $\lambda = 5.77$ mm 0.5248, für $\lambda = 3.3$ mm 0.3837 und für $\lambda = 2$ mm 0.2983).

Abb. 12 zeigt die Rückstreuquerschnitte $\sigma = \pi R^2 \sigma'$ für die 3 Wellenlängen bei $T = 10^0$ C.

3. Die Dämpfung von mm-Wellen durch Regen als Funktion der Regenintensität.

Mit der Tropfengrößen-Verteilungsdichte $n(R)$ ist $n(R) \cdot dR$ die räumliche Dichte der Tropfen mit dem mittleren Radius R im Größenbereich $R \pm \frac{dR}{2}$.

Hiermit erhält man für die Regenintensität

$$P = 15,1 \cdot 10^{-2} \int_0^{\infty} n(R) R^3 v(R) dR \quad (3.1)$$

P in $\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$, $n(R) dR$ in m^{-3} , $v(R)$ in $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. $v(R)$ ist die von der Tropfengröße abhängige Endgeschwindigkeit der Tropfen.

Das Produkt aus dem Gesamtverlustquerschnitt $Q_T(R, \lambda)$ eines Tropfens und dem Energiefluß S des primären Feldes bestimmt nach dem unter 2.1 gesagten den Energieverlust pro Zeit einer ebenen Welle durch Streuung und Absorption. Die Änderung dS dieses Energieflusses beim Durchlaufen einer gemäß der Verteilungsdichte $n(R)$ mit Tropfen durchsetzten Schicht der Dicke dl ist dann

$$dS = - S dl Q_T(R, \lambda) n(R) dR$$

Durch Integration erhält man hieraus

$$S = S_0 e^{-2 \cdot \int_0^l \alpha(l) dl}$$

$$\text{mit } \alpha(l) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} Q_T(R, \lambda) \cdot n(R) \cdot dR$$

$\alpha(l)$ ist der sogenannte Extinktions-Koeffizient. Hat α die Dimension Neper $\cdot \text{km}^{-1}$, erhält man für den Dämpfungskoeffizienten D der Welle in $\text{dB} \cdot \text{km}^{-1}$

$$D = 8,68 \cdot \alpha$$

Für Q_T in mm^2 und $n(R)$ in $\text{mm}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$ erhält man

$$D = 4,34 \cdot 10^{-3} \int_0^{\infty} Q_T(R, \lambda) n(R) dR \quad (3.2)$$

Ein Vergleich der Gleichungen (3.1) und (3.2) zeigt, daß die Dämpfung durch Regen der Regenintensität im allgemeinen nicht proportional sein wird.

3.1 " Idealer " Regen mit Tropfen gleicher Größe

Die nach der Mie'schen Theorie zu erwartenden unteren und oberen Grenzen der Dämpfung durch Regen bei den verschiedenen Wellenlängen als Funktion der Regenintensität werden durch die Annahme, der Niederschlag falle jeweils in einer Tropfengröße, abgeschätzt.

Mit den Gleichungen (3.1) und (3.2) erhält man dann für D

$$D = 0.2874 \cdot \underbrace{\frac{Q_T(R, \lambda)}{R^3 \cdot v(R)}}_{G(R, \lambda)} \cdot P \quad (3.1.1)$$

Die Funktion $G(R, \lambda)$ ist demnach gleich der Dämpfung der Welle in $\text{dB} \cdot \text{km}^{-1}$ bei einer Regenintensität von 1 mm/h .

$G(R, \lambda)$ wurde in Schritten von

0 (0.0025) 0.0625 (0.05) 1.6 (0.2) 3.4 mm für $\lambda = 5.77 \text{ mm}$
 0 (0.0025) 0.0625 (0.025) 1 (0.1) 3.4 mm für $\lambda = 3.3 \text{ mm}$
 und 0 (0.0025) 0.0625 (0.01) 1 (0.05) 3.4 mm für $\lambda = 2 \text{ mm}$

berechnet. $v(R)$ wurde jeweils durch Interpolation aus der von Gunn u. Kinzer(1949) angegebenen Kurve für die Endgeschwindigkeiten von Wassertropfen als Funktion vom Tropfenradius gewonnen (Abb. 13). Die Abbildungen 14, 15, 16 und 17 zeigen den Verlauf von $G(R, \lambda)$ über R für die 3 Wellenlängen.

Läßt man in diesen Diagrammen den Bereich bis zum ersten Minimum außer acht, erhält man für die jeweils zu erwartende maximale und minimale Dämpfung bei den 3 Wellenlängen und 10° C die folgenden Werte

λ mm	$\frac{D_u}{\text{dB} \cdot \text{km}^{-1}}$	$\frac{D_o}{\text{dB} \cdot \text{km}^{-1}}$
5.77	0.0764	0.613
3.3	0.0727	1.648
2	0.0691	4.001

Tab. 3

Die Werte minimaler Dämpfung sind die $G(R, \lambda)$ für $R = 3.4$ mm. Sie zeigen, daß bei vorwiegend großen Tropfen die Dämpfung bei $\lambda = 2$ mm niedriger sein kann als bei 3.3 und 5.77 mm. (vgl. auch Abb. 4).

Die Werte der Tabelle 3 entsprechen in etwa der Abb. 2 bei Medhurst (1965), jedoch ist festzuhalten, daß dies nicht die "extremen, äußeren Grenzen" der zu erwartenden Dämpfung sind, wie Medhurst schreibt. Allerdings lassen sie das Konzept des "idealen Regens" als Hilfe zur Abschätzung der jeweils zu erwartenden Dämpfung eher gerechtfertigt erscheinen. In den später folgenden Abbildungen der Funktionsverläufe $D = f(P)$ für verschiedene Tropfengrößen-Verteilungen sind jeweils die Werte der Tabelle 3 als theoretisch zu erwartende untere und obere Grenzen angegeben.

3.2 Tropfengrößen-Verteilung im natürlichen Regen

Zur Feststellung der Tropfengrößen-Verteilung im natürlichen Regen sind im Laufe der letzten Jahrzehnte außerordentlich umfangreiche Untersuchungen mit den verschiedensten Meßverfahren unternommen worden. Obwohl die Verhältnisse bei sehr kleinen Tropfen ($R \rightarrow 0$) immer noch nicht geklärt sind, lassen sich heute Tropfengrößen-Verteilungen angeben, die die Verteilungen im natürlichen Regen im Mittel relativ gut annähern (Diem, 1969), (Dingle u. Hardy, 1962), (Dyer, 1968), (Hardy, 1963, 1967).

Laws und Parsons (1943) veröffentlichten experimentell bestimmte Kurven, die für verschiedene Regenintensitäten den jeweiligen prozentualen Anteil X am Gesamtwasservolumen von Tropfen verschiedener Größe in jeweils 0.25 mm - Durchmesserintervallen darstellen (Abb. 18). Aus diesen Kurven erhält man die Tropfengrößen-Verteilungsfunktion $n(R)$ über die folgende Beziehung

$$n(R) = \frac{x \cdot P}{1.508 \cdot R^3 v(R) \Delta R_m} \quad (3.2.1)$$

$$n(R) \text{ in } \text{mm}^{-1} \text{m}^{-3}$$

$$x \text{ in } \%$$

$$P \text{ in } \text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$$

$$R \text{ in } \text{mm}$$

$$v(R) \text{ in } \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\Delta R_m = 0.125 \text{ mm}$$

$n(R)$ nach Gleichung (3.2.1) wird für $R > 0.75$ mm durch die Marshall-Palmer-Vertei-

lung (1948) gut angenähert. Es gilt hier

$$n(d) \, d \, d = 8 \cdot 10^3 \exp(-4,1 \cdot P^{-0,21} \cdot d) \cdot d \, d$$

damit wird

$$n(R) = 16 \cdot 10^3 \exp(-8,2 \cdot P^{-0,21} \cdot R) \quad (3.2.2)$$

Unabhängig von der Regenintensität P wird in dieser Gleichung $n(0) = 16 \cdot 10^3$, was die wahren Verhältnisse kaum richtig wiedergeben dürfte, aber für längere Wellenlängen nur eine geringe Bedeutung hat.

Die Verteilungen (3.2.1) und (3.2.2) werden in der Radarmeteorologie vorwiegend benutzt. Deirmendjian (1963) nimmt für seine Berechnungen zur Regendämpfung eine aus der allgemeinen Verteilungsdichte

$$n(R) = a \cdot R^\alpha \exp(-b \cdot R^\beta) \quad (3.2.3)$$

abgeleitete Funktion

$$n(R) = 5.333 \cdot 10^5 \cdot R \exp(-8.944 \sqrt{R}) \quad (3.2.4)$$

für die Tropfengrößen-Verteilung im Regen.

Mit Gleichung (3.1) und der Tropfen-Endgeschwindigkeit nach Abb 13 erhält man die Regenintensität dieser speziellen Verteilung. Es ist hier $P = 12.0703 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$.

Das Integral

$$5.333 \cdot 10^5 \int_0^\infty R \exp\{-8.944 \cdot \sqrt{R}\} \, dR = 1000$$

gibt die Tropfenzahl pro m^3 .

Andere Regenintensitäten und auch Tropfenzahlen pro m^3 erhält man durch Änderung der Konstanten a (nach Gleichung (3.2.3)). Ein Vergleich der Gleichungen (3.1) und (3.2) mit $n(R)$ nach Gleichung (3.2.4) zeigt, daß damit die Regendämpfung direkt proportional zur Regenintensität ist.

Die 3 Verteilungen sind in Abb. 19 über dem Tropfendurchmesser aufgetragen. Während sich bei der Laws- u. Parsons-Verteilung und der Verteilung nach Marshall-Palmer mit der Regenintensität auch jeweils der logarithmische Abfall von $n(R)$ bzw. $n(d)$ zu großen d -Werten hin ändert, würde eine Änderung von P bei der Deirmendjian-Verteilung nur eine Parallelverschiebung der eingezeichneten Kurven in Richtung der $n(d)$ -Achse zur Folge haben. Die Deirmendjian-Verteilung hat ein Maximum bei $d = 0.1 \text{ mm}$, im Vergleich zu den beiden anderen Verteilungen hat sie einen höheren Anteil an großen Tropfen.

Zu der Marshall-Palmer Verteilung ist noch folgendes zu sagen. Führt man nach Gl. (3.1) die Integration

$$P' = 15,1 \cdot 10^{-3} \cdot 16 \cdot 10^3 \int_0^{R_0} \exp(-8,2 P^{-0,21} \cdot R) v(R) \cdot R^3 \cdot dR$$

mit $v(R)$ nach der von Gunn u. Kinzer gemessenen Kurve durch, wobei die $v(R)$ - Werte für Radien zwischen den Stützpunkten dieser Kurve jeweils aus einer quadratischen Interpolation gewonnen werden, erhält man für $R_0 = 6$ mm (das Integral ist hier auf mindestens 10^{-4} genau bestimmt) folgende Werte für P und P'

P mm . h ⁻¹	P' mm . h ⁻¹
0,25	0.2882
1,25	1.4828
2.50	2.9687
5.00	5.9023
12.50	14.4797
25.00	28.2954
50.00	54.8391
100.00	105.3559
150.00	153.7099

Tab. 4

Es ergeben sich Abweichungen von maximal 18.7 % ($P = 2.5$ mm . h⁻¹).

Es ist anzunehmen, daß Marshall u. Palmer bei der Ableitung ihrer Beziehung für $v = f(R)$ eine lineare Näherung genommen haben. In ihrer Veröffentlichung (1948) ist nichts darüber gesagt. Auf jeden Fall sind in den noch zu diskutierenden Diagrammen zur Regen-Dämpfung die errechneten Werte des Dämpfungskoeffizienten jeweils über P' aufgetragen.

3.3 Die Dämpfung durch Regen als Funktion der Regenintensität für die Tropfengrößen-Verteilungen nach Laws und Parsons, Marshall und Palmer und Deirmendjian.

Nach Gleichung (3.2) gilt für den Dämpfungskoeffizienten

$$D = 4,34 \cdot 10^{-3} \cdot \int_0^{\infty} Q_T(R, \lambda) n(R) dR$$

Abb. 20 zeigt als Beispiel die Integranden $Q_T(R, \lambda) \cdot n(R)$ für $\lambda = 2$ mm und $T = 10^\circ\text{C}$ einmal für die Tropfenverteilung nach Marshall-Palmer ($P = 14.5$ mm . h⁻¹) zum zweiten für die nach Deirmendjian ($P = 12.1$ mm . h⁻¹). Der relativ glatte Kurvenverlauf ist günstig für die numerische Integration; die obere Integrationsgrenze ist schon durch $R \approx 3.5$ mm ersetzbar; gut zu erkennen ist die Bevorzugung der großen Tropfen .

durch die Deirmendjian-Verteilung.

Da die Q_T -Werte für die 3 Frequenzen und Temperaturen jeweils für $R = 0$ (0.01) 6 mm auf Lochstreifen vorlagen, wurden sämtliche Integrationen mit der Schrittweite 0.01 für Tropfenradien zwischen 0 und 6 mm durchgeführt, wobei die Zwischenwerte der durch Stützpunkte vorgegebenen Laws - u. Parsons-Verteilung jeweils über eine quadratische Interpolation gewonnen wurden.

Die Abbildungen 21 - 23 zeigen die Dämpfung als Funktion der Regenintensität für jeweils eine Frequenz und die 3 Tropfenverteilungen. Die strichpunktierten Linien zeigen die theoretisch zu erwartende maximale und minimale Dämpfung. (Vgl. Abschnitt 3.1). Die Zahlenwerte, nach denen diese Diagramme gezeichnet wurden, finden sich in der Tabelle 5. Die Abb. 24 ermöglicht den direkten Vergleich der Dämpfungs-Koeffizienten bei den 3 Wellenlängen. Die Zunahme ΔD der Dämpfung bei $\lambda = 3.3$ und 2 mm relativ zur Dämpfung bei $\lambda = 5.77$ mm zeigt Tabelle 6.

Mit wachsender Frequenz nehmen, wie erwartet, die Einflüsse bestimmter Merkmale der Tropfengrößenverteilung auf die Dämpfung zu ; hierauf wird noch in Abschnitt 4. näher eingegangen. Besonders bei geringen und mittleren Regenintensitäten nähert sich bei $\lambda = 5.77$ mm die theoretisch zu erwartende maximale Dämpfung der sich aus der Laws- u. Parsons-Verteilung ergebenden Dämpfung. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei praktischen Messungen diese Grenze überschritten wird, nimmt damit zu. Diese Tendenz dürfte sich zu größeren Wellenlängen hin verstärken. (Vgl. Abschnitt 1). Die Deirmendjian-Verteilung ergibt wegen der Bevorzugung der großen Tropfen bis zu mittleren Regenintensitäten relativ zu niedrige Dämpfungswerte.

Im Abschnitt 2.5 wurde schon darauf hingewiesen, daß in dem hier behandelten Frequenzbereich und bei den im Regen vorkommenden Tropfengrößen zu einem Teil die Verluste durch Absorption, für große Tropfendurchmesser aber die Verluste durch Streuung überwiegen, was teilweise zu einer Aufhebung der Temperatur-Abhängigkeit führt. Die Tabelle 7 zeigt den Einfluß der Temperatur auf die Dämpfung durch Regen. Es sind jeweils für die 3 Tropfenverteilungen die Dämpfungswerte in Abhängigkeit von der Regenintensität bei 10 °C, sowie die prozentualen Abweichungen von diesen Werten bei 0 und 18 °C angegeben. Bei der Deirmendjian-Verteilung sind diese Abweichungen konstant. (Vgl. Abschnitt 3.2).

$\frac{P}{\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}}$	Dämpfung in dB · km ⁻¹ für die Laws - u. Parsons-Verteilung								
	$\lambda = 5.77 \text{ mm}$			$\lambda = 3.3 \text{ mm}$			$\lambda = 2 \text{ mm}$		
	0° C	10° C	18° C	0° C	10° C	18° C	0° C	10° C	18° C
0.25	0.1317	0.1297	0.1287	0.3288	0.3417	0.3416	0.4991	0.5229	0.5313
1.25	0.6485	0.6424	0.6343	1.2449	1.2688	1.2611	1.5787	1.6195	1.6323
2.50	1.2524	1.2386	1.2196	2.1171	2.1425	2.1266	2.5277	2.5782	2.5934
5.00	2.3777	2.3406	2.2980	3.6097	3.6325	3.5989	4.1351	4.2065	4.2247
12.50	5.3224	5.2254	5.1232	6.9867	6.9892	6.9219	7.5039	7.5923	7.6140
25.00	9.4712	9.2910	9.1143	11.4687	11.4588	11.3574	11.8601	11.9285	11.9385
50.00	16.6301	16.2964	15.9945	19.3214	19.3019	19.1352	19.6921	19.7658	19.7629
100.00	28.9510	28.3806	27.8795	33.2816	33.2772	33.0033	33.8107	33.9024	33.8811
150.00	40.3506	39.5579	38.8709	46.2012	46.2326	45.8703	47.1826	47.3490	47.3352

Tabelle 5 a

$\frac{P}{\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}}$	Dämpfung in dB $\cdot \text{km}^{-1}$ für die Marshall-Palmer - Verteilung								
	$\lambda = 5.77 \text{ mm}$			$\lambda = 3.3 \text{ mm}$			$\lambda = 2 \text{ mm}$		
	0° C	10° C	18° C	0° C	10° C	18° C	0° C	10° C	18° C
0.29	0.1353	0.1324	0.1316	0.3584	0.3767	0.3788	0.6039	0.6432	0.6589
1.48	0.7235	0.7196	0.7148	1.5345	1.5874	1.5888	2.1317	2.2016	2.2279
2.97	1.4375	1.4293	1.4161	2.7285	2.8007	2.7965	3.5241	3.6053	3.6341
5.90	2.7704	2.7490	2.7162	4.7166	4.8066	4.7890	5.7141	5.8029	5.8315
14.48	6.2749	6.2029	6.1109	9.3609	9.4622	9.4057	10.5678	10.6591	10.6811
28.30	11.2259	11.0663	10.8849	15.3422	15.4324	15.3202	16.5889	16.6762	16.6864
54.84	19.5074	19.1840	18.8499	24.7137	24.7641	24.5610	25.8006	25.8801	25.8714
105.36	33.0323	32.4235	31.8402	39.2502	39.2183	38.8732	39.8475	39.9195	39.8833
153.71	44.4780	43.6209	42.8290	51.1693	51.0631	50.6028	51.2563	51.3265	51.2700

Tabelle 5 b

$\frac{P}{\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}}$	Dämpfung in dB $\cdot \text{km}^{-1}$ für die Deirmendjian-Verteilung								
	$\lambda = 5.77 \text{ mm}$			$\lambda = 3.3 \text{ mm}$			$\lambda = 2 \text{ mm}$		
	0° C	10° C	18° C	0° C	10° C	18° C	0° C	10° C	18° C
0.25	0.0748	0.0735	0.0723	0.0946	0.0950	0.0942	0.1004	0.1010	0.1011
1.25	0.3738	0.3676	0.3614	0.4729	0.4747	0.4712	0.5018	0.5048	0.5053
2.50	0.7476	0.7351	0.7228	0.9457	0.9495	0.9424	1.0036	1.0097	1.0106
5.00	1.4953	1.4703	1.4456	1.8914	1.8989	1.8848	2.0071	2.0193	2.0212
12.0703	3.6097	3.5493	3.4898	4.5660	4.5841	4.5501	4.8453	4.8747	4.8792
25.00	7.4764	7.3513	7.2281	9.4571	9.4946	9.4242	10.0356	10.0965	10.1058
50.00	14.9528	14.7026	14.4561	18.9142	18.9892	18.8483	20.0711	20.1930	20.2116
100.00	29.9056	35.4930	28.9123	37.8284	37.9783	37.6967	40.1423	40.3859	40.4232
150.00	44.8584	44.1079	43.3684	56.7426	56.9675	56.5450	60.2135	60.5789	60.6348

Tabelle 5 c

Laws u. Parsons - Verteilung :

P in mm. h ⁻¹	D _{λ=5.77mm} in dB. km ⁻¹	Δ D _{λ=3.3 mm} in %	Δ D _{λ=2 mm} in %
0.25	0.1297	163.45	303.16
1.25	0.6424	97.51	152.10
2.50	1.2386	72.98	108.15
5.00	2.3406	55.20	79.72
12.50	5.2254	33.75	45.30
25.00	9.2910	23.33	28.39
50.00	16.2964	18.44	21.29
100.00	28.3806	17.25	19.46
150.00	39.5579	16.87	19.70

Marshall u. Palmer-Verteilung :

P in mm . h ⁻¹	D _{λ = 5.77 mm} in dB . km ⁻¹	Δ D _{λ = 3.3 mm} in %	Δ D _{λ = 2 mm} in %
0.29	0.1324	184.52	385.80
1.48	0.7196	120.59	205.95
2.97	1.4293	95.95	152.24
5.90	2.7490	74.85	111.09
14.48	6.2029	52.54	71.84
28.30	11.0663	39.45	50.69
54.84	19.1840	29.09	34.90
105.36	32.4235	20.96	23.12
153.71	43.6209	17.06	17.66

Deirmendjian - Verteilung:

P in mm . h ⁻¹	D _{λ = 5.77 mm} in dB . km ⁻¹	Δ D _{λ = 3.3 mm} in %	Δ D _{λ = 2 mm} in %
0.25	0.0735	29.16	37.34
1.25	0.3676	↓	↓
2.50	0.7351	↓	↓
5.00	1.4703	↓	↓
12.0703	3.5493	↓	↓
25.00	7.3513	↓	↓
50.00	14.7026	↓	↓
100.00	29.4052	↓	↓
150.00	44.1079	↓	↓

Zunahme Δ D der Dämpfung bei λ = 3.3 und 2 mm relativ zur Dämpfung bei λ = 5.77 mm.
(T = 10° C).

Tabelle 6

L.-P- Verteilung P [mm.h ⁻¹]	$\lambda = 5.77 \text{ mm}$			$\lambda = 3.3 \text{ mm}$			$\lambda = 2 \text{ mm}$		
	ΔD [%]	D [dB.km ⁻¹]	ΔD [%]	ΔD [%]	D [dB.km ⁻¹]	ΔD [%]	ΔD [%]	D [dB.km ⁻¹]	ΔD [%]
	0° C	10° C	18° C	0° C	10° C	18° C	0° C	10° C	18° C
0.25	1.54	0.1297	- 0.77	- 3.78	0.3417	- 0.03	- 4.55	0.5229	+ 1.61
1.25	0.95	0.6424	- 1.26	- 1.88	1.2688	- 0.61	- 2.52	1.6195	+ 0.79
2.50	1.11	1.2386	- 1.53	- 1.19	2.1425	- 0.74	- 1.96	2.5782	+ 0.59
5.00	1.59	2.3406	- 1.82	- 0.63	3.6325	- 0.92	- 1.70	4.2065	+ 0.43
12.50	1.86	5.2254	- 1.96	- 0.02	6.9892	- 0.96	- 1.16	7.5923	+ 0.29
25.00	1.94	9.2910	- 1.91	+ 0.09	11.4588	- 0.88	- 0.57	11.9285	+ 0.08
50.00	2.05	16.2964	- 1.85	+ 0.10	19.3019	- 0.86	- 0.37	19.7658	- 0.01
100.00	2.01	28.3806	- 1.77	+ 0.01	33.2772	- 0.82	- 0.27	33.9024	- 0.06
150.00	2.00	39.5579	- 1.74	- 0.07	46.2326	- 0.78	- 0.35	47.3490	- 0.03

Tabelle 7 a

M.-P.- Verteilung P[mm.h ⁻¹]	$\lambda = 5.77 \text{ mm}$			$\lambda = 3.3 \text{ mm}$			$\lambda = 2 \text{ mm}$		
	$\Delta D [\%]$ 0° C	D[dB.km ⁻¹] 10° C	$\Delta D [\%]$ 18° C	$\Delta D [\%]$ 0° C	D[dB.km ⁻¹] 10° C	$\Delta D [\%]$ 18° C	$\Delta D [\%]$ 0° C	D[dB.km ⁻¹] 10° C	$\Delta D [\%]$ 18° C
	0.29	2.19	0.1324	- 0.60	- 4.86	0.3767	+0.56	- 6.11	0.6432
1.48	0.54	0.7196	- 0.67	- 3.33	1.5874	+ 0.09	- 3.17	2.2016	+ 1.19
2.97	0.57	1.4293	- 0.92	- 2.58	2.8007	- 0.15	- 2.25	3.6053	+ 0.80
5.90	0.78	2.7490	- 1.19	- 1.87	4.8066	- 0.37	- 1.53	5.8029	+ 0.49
14.48	1.16	6.2029	- 1.48	- 1.07	9.4622	- 0.60	- 0.86	10.6591	+ 0.21
28.30	1.44	11.0663	- 1.64	- 0.58	15.4324	- 0.73	- 0.52	16.6762	+ 0.06
54.84	1.69	19.1840	- 1.74	- 0.20	24.7641	- 0.82	- 0.31	25.8801	- 0.03
105.36	1.88	32.4235	- 1.80	+ 0.08	39.2183	- 0.88	- 0.18	39.9195	- 0.09
153.71	1.96	43.6209	- 1.82	+ 0.21	51.0631	- 0.90	- 0.14	51.3265	- 0.11

Tabelle 7 b

D. - Verteilung P[mm . h ⁻¹]	$\lambda = 5.77 \text{ mm}$			$\lambda = 3.3 \text{ mm}$			$\lambda = 2 \text{ mm}$		
	$\Delta D [\%]$ 0° C	D[dB . km ⁻¹] 10° C	$\Delta D [\%]$ 18° C	$\Delta D [\%]$ 0° C	D[dB . km ⁻¹] 10° C	$\Delta D [\%]$ 18° C	$\Delta D [\%]$ 0° C	D[dB . km ⁻¹] 10° C	$\Delta D [\%]$ 18° C
0.25	1.7	0.0735	- 1.68	- 0.39	0.0950	- 0.74	- 0.60	0.1010	0.09
1.25	↓	0.3676	↓	↓	0.4747	↓	↓	0.5048	↓
2.50		0.7351			0.9495			1.0097	
5.00		1.4703			1.8989			2.0193	
12.0703		3.5493			4.5841			4.8747	
25.00		7.3513			9.4946			10.0965	
50.00		14.7026			18.9892			20.1930	
100.00		35.4930			37.9783			40.3859	
150.00	↓	44.1079	↓	↓	56.9675	↓	↓	60.5789	↓

Tabelle 7 c

4. Die Abhängigkeit der Dämpfung durch Regen bei $\lambda = 5.77$, 3.3 und 2 mm von den Parametern einer allgemeinen Verteilungsfunktion.

Nach den Ergebnissen des Abschnitts 3.3 liegt es nahe, den Einfluß bestimmter Merkmale der Tropfengrößen-Verteilung im Regen auf die Dämpfung bei $\lambda = 5.77$, 3.3 und 2 mm systematischer zu erfassen; das auch, um zu prüfen, ob durch die Messung der Dämpfungen bei diesen 3 Wellenlängen in der Umkehrung Aussagen über die jeweilige Tropfengrößen-Verteilung zu machen sind. Man benötigt hierfür eine Verteilungsfunktion, die über ihre Parameter hinsichtlich der Lage ihres Maximums, in der Stärke ihres Abfalls zu großen Tropfen hin und in der Gesamtzahl der durch sie vorgegebenen Ereignisse, das sind hier die Tropfenzahlen, steuerbar ist. Wegen der 3 Wellenlängen soll die Anzahl ihrer Parameter nicht größer als 3 sein.

Diese Forderungen werden durch eine allgemeinere Form der Deirmendjian-Verteilung erfüllt. Auf den ersten Blick erschien zunächst auch die logarithmische Normalverteilungsfunktion als geeignet, es wäre hier

$$n(R) = a \cdot n'(R)$$

mit
$$n'(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \frac{1}{R} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\ln R - \mu)^2 \right\}$$

und
$$\mu - \sigma^2 = \ln R_c$$

 σ^2 ist die Streuung, μ der Mittelwert, bei $R = R_c$ hat die Verteilung ihr Maximum.

Der Verlauf dieser Funktion für $R = R_c$ ist aber an die bisher im Regen gemessenen Bedingungen nicht anzupassen.

4.1 Die allgemeine Verteilungsfunktion

Aus Gleichung (3.2.3) läßt sich die folgende Funktion für die Tropfengrößen-Verteilung ableiten

$$n_1(R) = a \cdot R \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{R}{R_c} \right)^\gamma \right\} \quad (4.1.1)$$

Einige ihrer Eigenschaften werden zusammen mit denen einer ihr verwandten Funktion $n_2(R)$ im Anhang beschrieben.

Gleichung (4.1.1) läßt sich so normieren, daß gilt

$$n_1(R) = a^* \cdot n'_1(R) \quad (4.1.2)$$

mit
$$\int_0^\infty n'_1(R) \cdot dR = 1 \quad (4.1.3)$$

$$\text{und } n'_1(R) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{\gamma}\right) R_c^2 \gamma^{\frac{2}{\gamma}-1}} R \cdot \exp\left\{-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{R}{R_c}\right)^\gamma\right\} \quad (4.1.4)$$

Die Stärke des Abfalls dieser Funktion zu großen Tropfen hin ist abhängig von R , R_c und γ . Um die Einflüsse einmal der Lage des Maximums und zum anderen der Steigung der Funktion für $R > R_c$, die ja nach Laws und Parsons und Marshall-Palmer abhängig von der Regenintensität ist, besser voneinander trennen zu können, wird γ durch die Größe σ^2 ersetzt, die analog zur Statistik ein Maß für die "Streuung" der Verteilung ist.

Die Definition von σ^2 ist (Bronstein, Semendjajew, 1964)

$$\sigma^2 = \int_0^\infty R^2 n'_1(R) dR - \left[\int_0^\infty R n'_1(R) dR \right]^2 \quad (4.1.5)$$

Die Abb. 25 zeigt $\sigma^2 = f(\gamma)$ nach Gl. (4.1.5) für verschiedene R_c ; in Abb. 26 sind als Beispiel die Verteilungen $n'_1(R)$ für $R_c = 0.025, 0.15$ und 0.3 sowie $\gamma = 0.75, 1, 2$ und 3 eingezeichnet, ein Vergleich der dort angegebenen σ^2 -Werte zeigt, daß die Verteilungen aufgrund der Transformation nach σ^2 besser vergleichbar werden. Mit den Gleichungen (4.1.1) - (4.1.5) ist eine Funktion definiert, die die im vorigen Abschnitt gestellten Forderungen erfüllt, und über eine Änderung von R_c , σ^2 und a^* die Untersuchung der Dämpfung durch Regen bei den 3 Wellenlängen unter einer großen Anzahl von, sicherlich idealisierten, Bedingungen erlaubt.

4.2 Ergebnisse

Mit den Gleichungen (3.2), (4.1.2) und (4.1.4) erhält man für den Dämpfungs-

Dämpfungskoeffizienten D in dB · km⁻¹

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{4.34 \cdot 10^{-3} \cdot a^*}{\Gamma\left(\frac{2}{\gamma}\right) R_c^2 \gamma^{\frac{2}{\gamma}-1}} \int_0^{\infty} R \exp\left[-\frac{1}{\gamma} \left(\frac{R}{R_c}\right)^\gamma\right] Q_T(R, \lambda) dR \\
 &= F(a^*, R_c, \gamma, \lambda) \quad (4.2.1) \\
 &= F(a^*, R_c, \sigma^2, \lambda) \quad \text{mit Gleichung (4.1.5)}
 \end{aligned}$$

Die Untersuchung von D hinsichtlich der Änderung irgendeines Parameters der Tropfengrößen-Verteilung ist rein formal durch Bildung der Ableitungen nach a, R_c und σ² möglich. Hauptsächlich um Rechenzeit zu sparen, wurde direkt D als Funktion von R_c und σ² für die 3 Wellenlängen berechnet. Die Konstante a* wird hierbei nicht konstant gehalten, sondern als Funktion von R_c und σ² jeweils so geändert, daß bestimmte physikalische Bedingungen erhalten bleiben. Zu diesen physikalischen Bedingungen können gehören

a) die Tropfenzahl N pro m³

$$N = a^* \int_0^{\infty} n'(R) \cdot dR \quad (4.2.2)$$

b) die von der elektromagnetischen Welle jeweils "gesehene" Fläche F in mm² pro m³

$$F = a^* \pi \int_0^{\infty} R^2 n'(R) dR \quad (4.2.3)$$

c) das Gesamt-Wasservolumen M in mm³ · m⁻³

$$M = a^* \frac{4}{3} \pi \int_0^{\infty} R^3 n'(R) dR \quad (4.2.4)$$

und d) die Regenintensität P in mm/h

$$P = a^* \cdot 15.1 \cdot 10^{-3} \int_0^{\infty} R^3 n'(R) v(R) dR \quad (4.2.5)$$

(vgl. Gleichung (3.1))

Die Abbildungen 27 - 29 zeigen für die 3 Wellenlängen bei 10°C, D als Funktion von σ^2 mit dem Parameter R_c , wobei nach Gl. (4.2.4)

$$d^* = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi} \frac{1}{\int_0^{\infty} R^3 n'(R) dR} \quad \text{mit } M = 500 \text{ mm}^3 \cdot \text{m}^{-3}$$

ist.

Für die Abbildungen 30 - 32 gilt nach Gleichung (4.2.5)

$$a^* = \frac{P}{15.1 \cdot 10^{-3}} \frac{1}{\int_0^{\infty} R^3 n'(R) v(R) dR} \quad \text{mit } P = 12.0703 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$$

Diese Werte für M und P ergeben sich aus der Integration über die Deirmendjian-Verteilung nach Gleichung (3.2.4), sie wurden in dieser Größe deshalb gewählt, um die Ergebnisse des Abschnitts 3.3 als Testwerte für das neue Rechenprogramm nehmen zu können.

Gerechnet wurde jeweils für die R_c - Werte 0.01, 0.025, 0.05 (0.05) 0.5 mm, wobei für jeden dieser Werte eine obere und untere Grenze der Streuung σ^2 existiert. Die obere Grenze ist festgelegt durch die Forderung, daß die Integrale nach Gleichung (4.2.1) für $R = 6$ mm als oberer Grenze konvergieren müssen, hiermit wird berücksichtigt, daß Regentropfen mit Radien > 6 mm praktisch nicht existieren. (Vgl. auch Abschnitt 3.3). Die Rechnung wurde zu großen σ^2 - Werten hin abgebrochen, wenn die Größe

$$\Delta F = \left(1 - \frac{\int_0^6 n(R) R^2 dR}{\int_0^{\infty} n(R) R^2 dR} \right) \cdot 100\% \quad (4.2.6)$$

die 5 %-Grenze überschritt.

Es ist

$$Q_T(R, \lambda) = Q'_T(R, \lambda) \cdot \pi R^2$$

und
$$\int_6^{\infty} Q_T(R, \lambda) n(R) dR \leq Q'_T(6, \lambda) \int_6^{\infty} n(R) R^2 dR$$

Zusammen mit Gleichung (4.2.6) läßt sich zeigen, daß der maximale Fehler bei der Bestimmung der jeweiligen Dämpfungswerte dann ebenfalls bei 5 % liegt. Die von R_c und γ abhängige Grenze für große σ^2 - Werte ist in Abb. 25 eingezeichnet.

Die untere Grenze bezüglich der σ^2 - Werte ist direkt proportional zu R_c^2 . Ist zum Beispiel $R_c = 0.5$ mm, kann selbst bei einer Steigung von $-\infty$ für $R > R_c$ wegen der relativ großen Teilfläche zwischen $R = 0$ und R_c ein bestimmter σ^2 - Wert nicht unterschritten werden. Auch diese Grenze entspricht im gewissen Sinn den physikalischen Forderungen an die Verteilungsfunktion.

Die Abbildungen 27 - 29 ($M = \text{const}$) zeigen zunächst für relativ kleine σ^2 - Werte, d.h. für Verteilungen mit vorwiegend kleinen Tropfen, eine Abnahme der Dämpfung bei wachsendem R_c . Für $\sigma^2 > 2.6 \cdot 10^{-2}$ bei $\lambda = 5.77$ mm

$$\sigma^2 > 0.9 \cdot 10^{-2} \text{ bei } \lambda = 3.3 \text{ mm}$$

$$\text{und } \sigma^2 > 0.4 \cdot 10^{-2} \text{ bei } \lambda = 2 \text{ mm}$$

kehrt sich diese Abhängigkeit um. R_c beeinflußt die Lage der Maxima der Funktionen $D = f(\sigma^2)$ offensichtlich nur bis zu Werten von etwa 0.1 mm. Für $R_c > 0.5$ mm bei $\lambda = 5.77$ mm, $R_c > 0.3$ mm bei 3.3 mm und $R_c > 0.25$ mm bei 2 mm ist die Dämpfung praktisch unabhängig von der Lage des Maximums der Tropfengrößenverteilung.

Den gleichen Einfluß von R_c zeigen die Abbildungen 30 - 32 ($P = \text{const}$). Die Dämpfungsmaxima verschieben sich hier durch die zusätzliche Bewertung mit der Tropfenendgeschwindigkeit nach Gleichung (4.2.5), bei 2 mm - Wellenlänge werden sie ganz aufgehoben.

Die Bewertung mit $v(R)$ ist auch der Grund für das starke Ansteigen der Dämpfung mit kleiner werdendem σ^2 . Man erreicht hier als Grenze schließlich die mit 12 multiplizierten $G(\lambda, R)$ - Werte für kleine Tropfenradien nach Abb. 17. (Vgl. auch Abschnitt 3.1). -

Die 3 Konstanten a^* , R_c und σ^2 der allgemeinen Verteilung (4.1.2) müßten bei einer absolut exakten Messung der Dämpfungswerte bei den 3 Wellenlängen eindeutig bestimmbar sein. Eliminiert man durch Bildung der Quotienten

$$\frac{D_{\lambda=2\text{mm}}}{D_{\lambda=5.77\text{mm}}} \quad , \quad \frac{D_{\lambda=2\text{mm}}}{D_{\lambda=3.3\text{mm}}} \quad , \quad \frac{D_{\lambda=3.3\text{mm}}}{D_{\lambda=5.77\text{mm}}}$$

die Konstante a^* und zeichnet Linien $\frac{D_A}{D_B} = \text{konst.}$ in der $R_c - \sigma^2$ - Ebenen, bieten die Winkel unter denen sich die 3 Kurvenscharen schneiden, eine Möglichkeit zur Abschätzung der Genauigkeit, mit der die Konstanten R_c und σ^2 der Verteilung mit einem realen Meß-

system zu bestimmen sind.

Die Abb. 33 zeigt einige dieser Linien $\frac{D_A}{D_B} = \text{Konst.}$ Man sieht, daß die Dämpfungsverhältnisse in weiten Bereichen nur eine Funktion von σ^2 sind, wobei die Abhängigkeit $\frac{D_A}{D_B}$ von σ^2 mit größer werdendem Unterschied in den Frequenzen f_A und f_B zunimmt. (Unter der Voraussetzung, daß diese Frequenzen im Mie-Bereich liegen). Die Schnittwinkel der Kurvenscharen sind relativ klein ;die Abschätzung der Art der Tropfengrößen-Verteilung dürfte allein über die Messung der Dämpfungskoeffizienten bei den vorliegenden Wellenlängen nur sehr grob möglich sein. Die Auswertung unserer Meßergebnisse wird hierzu sicherlich noch Anhaltspunkte liefern. Eine weitere Frage ist, ob nicht Frequenzkombinationen existieren, die ein selektiveres System zur Bestimmung gewisser Merkmale von Tropfengrößen-Verteilungen im Regen über die Messung des Dämpfungskoeffizienten bieten.

Anhang

Eigenschaften der allgemeinen Verteilungsfunktion.

Nach Gleichung (3.2.3) war

$$n(R) = a \cdot R^\alpha \cdot \exp(-b \cdot R^\gamma)$$

Das Maximum dieser Verteilung liegt bei

$$R_c = \left(\frac{\alpha}{\gamma \cdot b} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Damit ist b zu ersetzen durch

$$b = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{1}{R_c^\gamma}$$

Man erhält

$$n(R) = a R^\alpha \exp \left[- \frac{\alpha}{\gamma} \left(\frac{R}{R_c} \right)^\gamma \right] \quad (A.1)$$

Indem man α oder γ gleich 1 setzt und berücksichtigt, daß die Dimension von a nicht abhängig von α sein soll, erhält man aus Gleichung (A.1) zwei Verteilungsfunktionen, die jeweils durch 3 Konstanten bestimmt sind:

$$n_1(R) = a \cdot R \exp \left[- \frac{1}{\gamma} \left(\frac{R}{R_c} \right)^\gamma \right] \quad (A.2)$$

(mit den Konstanten $a = 5.333 \cdot 10^5$, $\gamma = 0.5$ und $R_c = 0.05$ mm erhält man hieraus die Deirmendjian-Verteilung).

$$n_2(R) = a' \left(\frac{R}{R_c} \right)^\alpha \exp \left[-\alpha \left(\frac{R}{R_c} \right) \right] \quad (A.3)$$

Für die Ableitungen $\frac{d}{dR} [\ln n_{1,2}(R)]$ erhält man

$$\frac{d}{dR} [\ln n_1(R)] = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_c} \left(\frac{R}{R_c} \right)^{\gamma-1} \quad (A.4)$$

und
$$\frac{d}{dR} [\ln n_2(R)] = \alpha \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_c} \right) \quad (A.5)$$

Die Stärke des Abfalls dieser Funktionen zu großen Tropfen hin ist also abhängig von R, R_c und γ bzw. α ; d.h. ändert man in einer der Verteilungen R_c und hält γ (oder α) konstant, ändert sich mit R_c auch der Abfall dieser Funktion für $R > R_c$.

Die Gleichungen (A.2) und (A.3) lassen sich so normieren, daß gilt

$$n(R) = a^* \cdot n'(R)$$

mit
$$\int_0^{\infty} n'(R) dR = 1$$

Es ist
$$\int_0^{\infty} R^{\alpha} \exp[-b R^{\gamma}] dR = \frac{b^{-\frac{\alpha+1}{\gamma}}}{\gamma} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\gamma}\right) \quad (\text{A.8})$$

(Bronstein, Semendjajew 1964)

Hier ist $\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\gamma}\right)$ die Gammafunktion mit dem Argument $\left(\frac{\alpha+1}{\gamma}\right)$.

Man erhält mit Gleichung (A.8) für $n'_1(R)$ und $n'_2(R)$

$$n'_1(R) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{\gamma}\right) R_c^2 \gamma^{\frac{2}{\gamma}-1}} R \exp\left[-\frac{1}{\gamma} \left(\frac{R}{R_c}\right)^{\gamma}\right] \quad (\text{A.9})$$

$$n'_2(R) = \frac{d^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1) R_c} \left(\frac{R}{R_c}\right)^{\alpha} \exp\left[-\alpha \left(\frac{R}{R_c}\right)\right] \quad (\text{A.10})$$

Die Streuung σ^2 ist in der Theorie der Statistik definiert durch die Beziehung

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} x^2 \cdot w(x) dx - \left[\int_0^{\infty} x w(x) dx \right]^2 \quad (\text{A.11})$$

(Bronstein, Semendjajew 1964)

$w(x)$ ist die Wahrscheinlichkeits-Dichte. Ersetzt man $w(x)$ durch $n'(R)$, erhält

man mit dem Integral (A. 8)

$$\sigma_1^2 = R_c^2 \gamma^{\frac{2}{\gamma}} \left[\frac{\Gamma(\frac{4}{\gamma})}{\Gamma(\frac{2}{\gamma})} - \frac{\Gamma^2(\frac{3}{\gamma})}{\Gamma^2(\frac{2}{\gamma})} \right] \quad (\text{A. 12})$$

und

$$\sigma_2^2 = R_c^2 \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\Gamma^2(\alpha+2)}{\Gamma^2(\alpha+1)} \right] \quad (\text{A. 13})$$

$$= R_c^2 \cdot \frac{\alpha+1}{\alpha^2}$$

mit $\Gamma(\alpha+1) = (\alpha+1) \cdot \Gamma(\alpha)$

Man erhält für α

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{R_c^2}{\sigma^2} + \sqrt{\frac{R_c^2}{\sigma^2} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{R_c^2}{\sigma^2} \right)} \quad (\text{A. 14})$$

Die Gleichung (A. 12) ist nicht nach γ aufzulösen.

Für $a = \frac{a'}{R_c}$ und $\alpha = \gamma = 1$ sind die Gleichungen (A. 2) und (A. 3) identisch.

Die Krümmung von $\ln n_1 (R) \left(\sim \frac{d^2 \ln n_1 (R)}{dR^2} \right)$ kann je nach Wahl von γ im Bereich $R > R_c$ positives oder negatives Vorzeichen haben, während das Vorzeichen der Krümmung von $\ln n_2 (R)$ für positive α im Bereich $R > 0$ negativ bleibt.

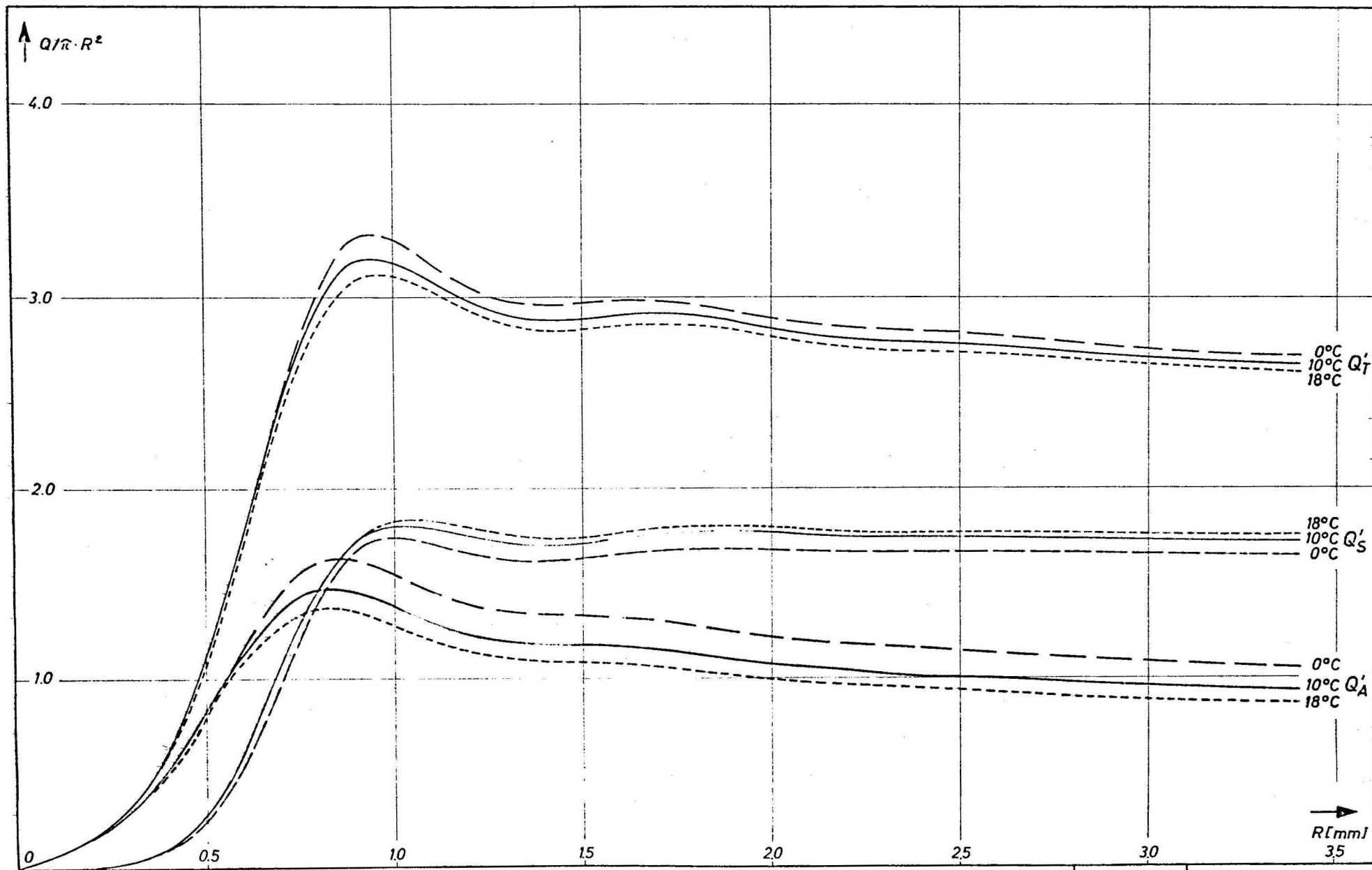
Die beiden Verteilungen $n_1 (R)$ und $n_2 (R)$ erfüllen die im Abschnitt 4. gestellten Forderungen; um den Anschluß an einen Teil der im Abschnitt 3.3 beschriebenen Ergebnisse zu erhalten, wurde für die Rechnungen des Abschnitts 4.2 die Verteilung nach Gleichung (A. 2) genommen. Die Verteilung nach Gleichung (A. 3) bringt im Grundsatz gleiche Ergebnisse.

Literaturangaben

- Abramowitz, M. u.
Stegun, A. J. (1965) Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Inc. New York.
- Bronstein, I. u.
Semendjajew, K. (1964) Taschenbuch der Mathematik, 4. Auflage. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/M. u. Zürich.
- Corbato, F. J. u.
Uretsky, J. L. (1965) " Generation of Spherical Bessel Functions in Digital Computers ", J. Assoc. Comp. Mach., Vol. 6, Seite 366-375.
- Debye, P. (1929) Polare Molekeln, Verlag S. Hirzel, Leipzig.
- Deirmendjian, D.,
Clasen, R. u.
Viezee, W. (1961) " Mie Scattering with Complex Index of Refraction " J. Opt. Soc. A., Vol. 51, No. 6, Juni 1961, S. 620 - 633.
- Deirmendjian, D. (1963) Complete Microwave Scattering and Extinction Properties of Polydispersed Cloud and Rain Elements, The Rand Corporation. Report R - 422 - PR, Dezember 1963. Bemerkungen zu den Verteilungsfunktionen finden sich auch in Milton Kerker (ed.), Electromagnetic Scattering, Pergamon Press, New York, 1963, Seite 171 - 189.
- Diem, M. (1969) " Physik der Niederschlagsbildung", Met. Rundschau, 22. Jahrgang, Heft 5, 1969, Seite 134 - 138.
- Dingle, A. N. u.
Hardy, K. R. (1962) " The Description at Rain by Means of Sequential Raindrop-Size Distributions", Quart, J. Roy. Meteorol. Soc., Vol. 88, Juli 1962, S. 301 - 314.
- Dyer, Rosemary (1968) " Doppler Measurements in Stratiform Rain" zu erhalten über die Verfasserin bei den Air Force Cambridge Research Laboratories, Boston, USA.
- Gunn, R. u.
Kinzer, D. (1948) " The Terminal Velocity of Fall for Water Droplets in Stagnant Air " J. Meteorol., Vol. 6, August 1949, S. 243-248.

- Hardy, K. R. (1963) " The Development of Raindrop-Size-Distributions and Implications Related to the Physics of Precipitation", J. Atm. Sc., Vol. 20, No.4, Juli 1963, S. 229 - 312.
- - - - (1967) " Radar Studies of Precipitation ", Vortrag gehalten beim N. A. T. O. Advanced Study Institute on the Structure of the Lower Atmosphere and Electromagnetic Wave Propagations, 2.-15. Sept. 1967, Aberystwyth, Wales.
- Kerr, D. E. (1951) Propagation of Short Radio Waves, MIT-Band 13 Mc Graw - Hill Book Company, Inc..
- Lammers, U. H. W. (1965) Untersuchungen über Niederschlagseinflüsse auf die mm-Wellenausbreitung, Dissertation D 83 an der Technischen Universität Berlin.
- - - - (1966) " Die Bestimmung von Regenintensität und Tropfenverteilung mittels elektronischer Verfahren" Vortrag im Kolloquium Radiometeorologie März 1966, Schloß Kleinheubach.
- - - - (1969) " Electrostatic Analysis of Raindrop Distributions", J. Appl. Met., Vol. 8, No. 3, Juni 1969, S. 330 - 334.
- Lane, J. A. u. (1952) " Dielectric Dispersion in Pure Solar Liquids Saxton, J. A. at Very High Radio Frequencies", Proc. Roy. Soc. A 213, S. 400.
- Laws, J. O. u. (1943) " The Relation of Raindrop-Size to Intensity", Parsons, D. A. Trans. Am. Geophy. Union, Vol. 24, 1943, S. 452 - 460.
- Marshall, J. S. u. (1948) " The Distribution of Raindrop with Size", Palmer, W. McK. J. Meteorol., Vol. 5, August 1948, S. 165-166.
- Medhurst, R. G. (1965) " Rainfall Attenuation of Centimetre Waves: Comparison of Theory and Measurement ". IEEE Trans. Ant. Prop., Vol. AP 13, No. 4, Juli 1965, S. 550-564.
- - - - (1969) Antwort des Autors auf den Beitrag von Ruthroff, Proc. IEEE, Juni 1969, S. 1236-1237.

- Penndorf, R. B. (1957) " New Tables of Total Mie Scattering Coefficients for Spherical Particles of Real Refractive Indexes ($1.33 \leq n \leq 1.50$)", J. Opt. Soc. Am., Vol. 47, No. 11, November 1957, S. 1010 - 1015.
- Ruthroff, C. L. (1969) " Microwave Attenuation and Rain Gauge Measurements", Proc. IEEE, Juni 1969, S. 1235.
- Ryde u. Ryde (1945) Attenuation of Centimetre and Millimetre Waves by Rain, Hail, Fog and Clouds, GEC Report No. 8670, Mai 1945.
- Saxton, J. A. u. Lane, J. A. (1946) " The Anomalous Dispersion of Water at Very High Radio Frequencies ", in Meteorological Factors in Radio-Wave Propagation, The Physical Society, London 1946, S. 278.
- Schmidt, F. (1966) " Der Regenanalyser, ein elektronisches Gerät zum Messen und Registrieren der Tropfengrößen im Regen" Techn. Bericht Nr. 91 des Heinrich-Hertz-Instituts für Schwingungsforschung.
- Stanewich, A. E. u. Yaroslavskii, N. G. (1961) " Absorption of Liquid Water in the Long-Wavelength Part of the Infrared Spectrum ($42 - 2000 \mu$)", Optics and Spectroscopy, Vol. 10, No. 4, April 1961, S. 278 - 279.
- Stratton, J. A. (1941) Electromagnetic Theory, Mc Graw-Hill Book Company, S. 563 - 573.

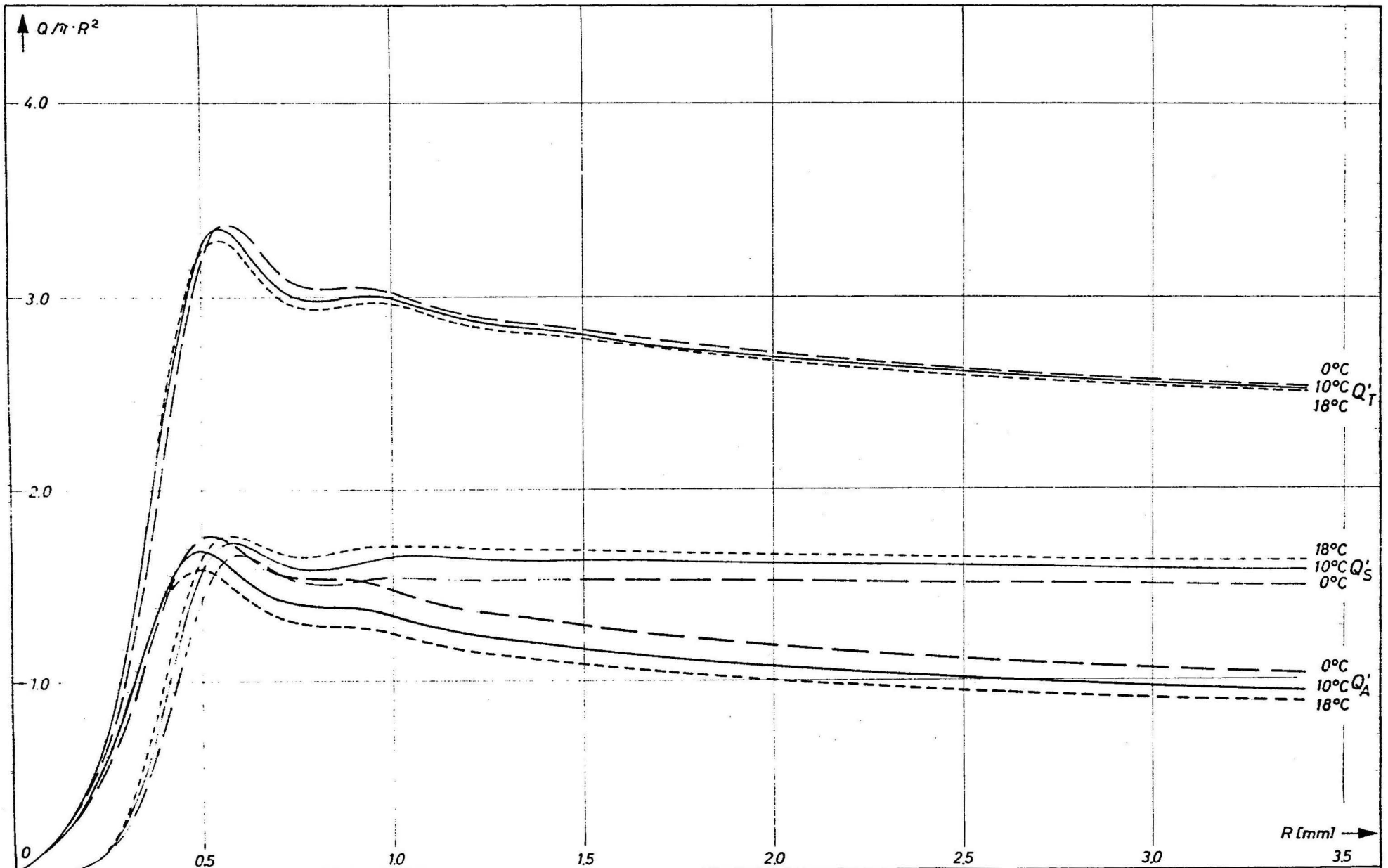


Normierter Verlust-, Streu- und Absorptionsquerschnitt für kugelförmige Wassertropfen als Funktion des Tropfen-Radius $\lambda = 5,77 \text{ mm}$, $T = 0; 10$ und 18°C .

Abb. 1

Blatt-Nr: 10
Datum: Feb 70

Heinrich-Hertz-Institut
1 Berlin 10, Einsteinufer 35

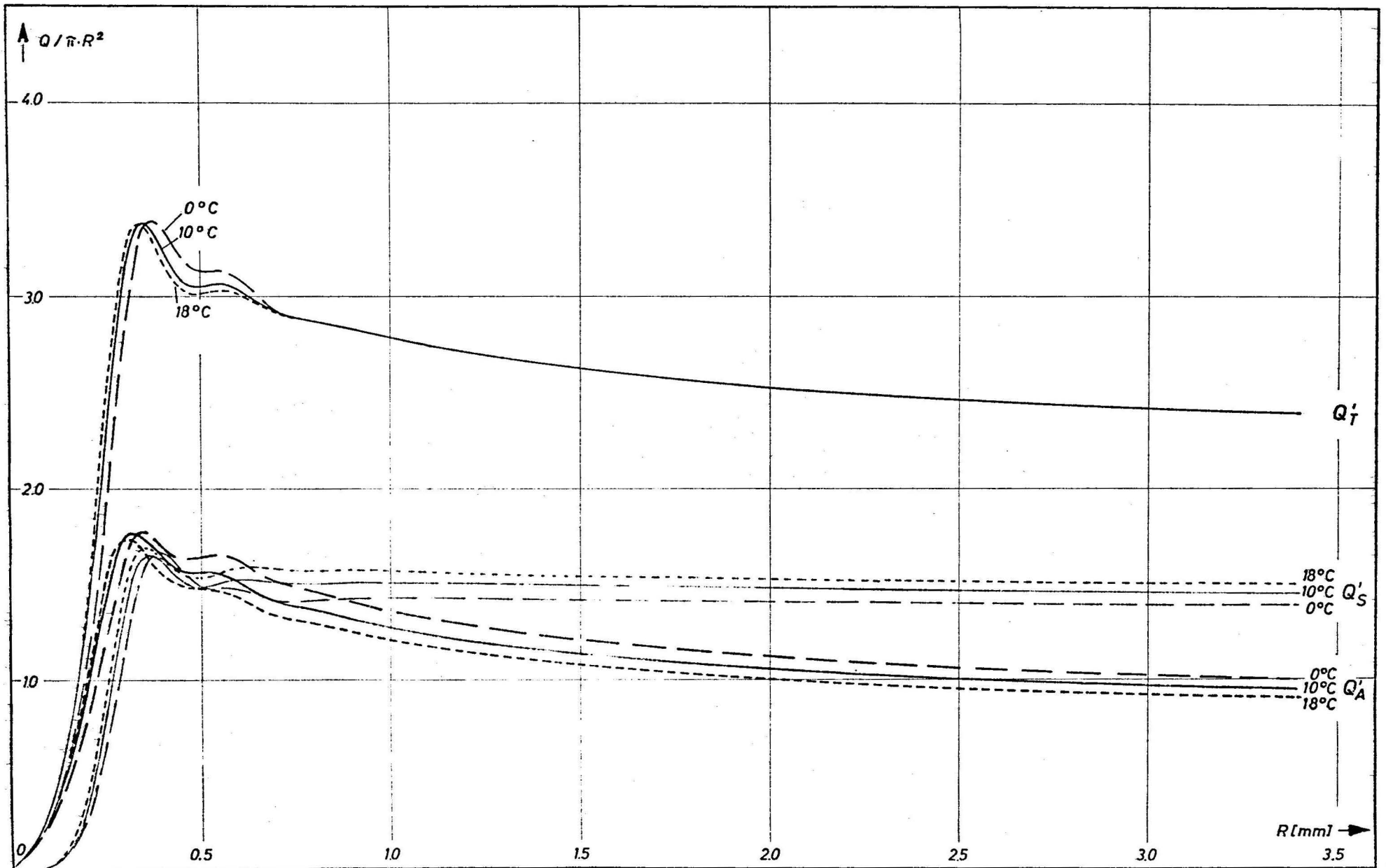


Normierter Verlust-, Streu- und Absorptionsquerschnitt für kugelförmige Wassertropfen als Funktion des Tropfen-Radius. $\lambda = 3,30$ mm, $T = 0, 10$ und 18° C.

Abb. 2

Blatt-Nr. 11
Datum: Feb 70

Heinrich-Hertz-Institut
1 Berlin 10, Einsteinufer 35

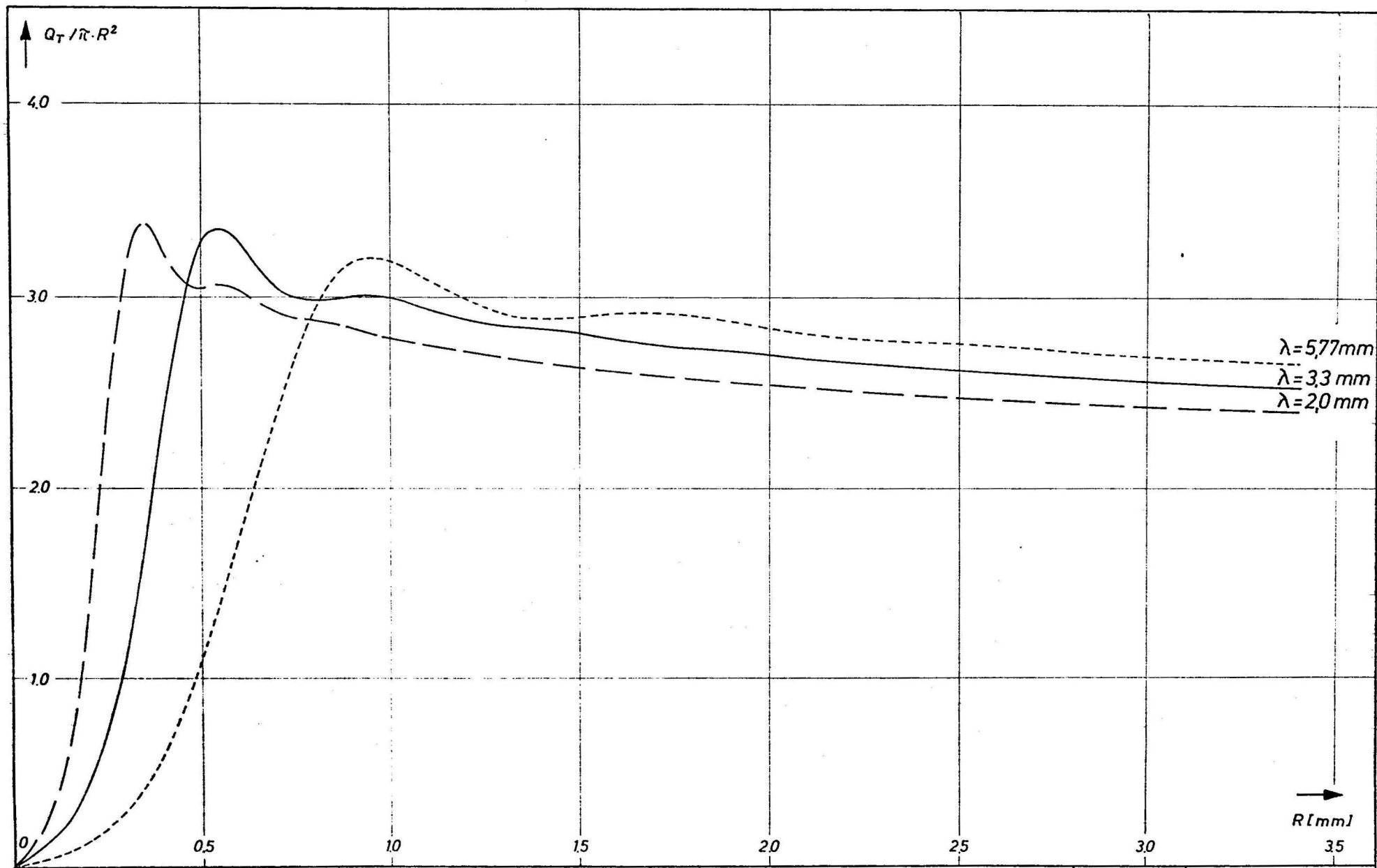


Normierter Verlust-, Streu- und Absorptionsquerschnitt für kugelförmige Wassertropfen als Funktion des Tropfenradius. $\lambda = 200 \text{ mm}$, $T = 0; 10 \text{ und } 18^\circ \text{C}$.

Abb. 3

Blatt-Nr.: 12
Datum: Feb 70

Heinrich-Hertz-Institut
1 Berlin 10, Einsteinufer 35

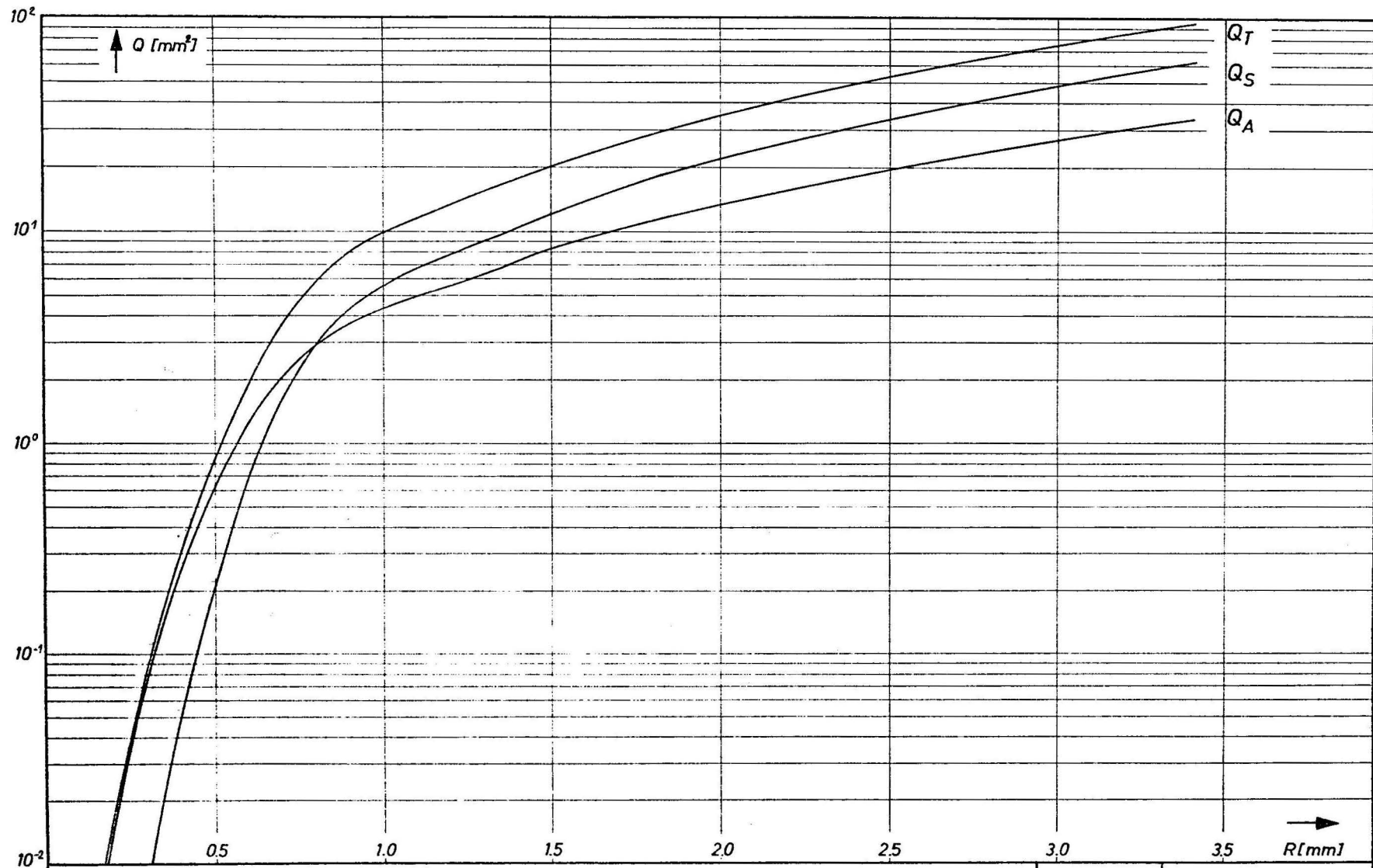


Normierter Verlustquerschnitt für kugelförmige Wassertropfen als Funktion des Tropfen - Radius. $\lambda = 5,77; 3,30$ und $2,00$ mm und $T = 10^\circ \text{C}$.

Abb. 4

Blatt-Nr. 14
Datum: Feb 70

Heinrich-Hertz-Institut
1 Berlin 10 Einsteinufer 35

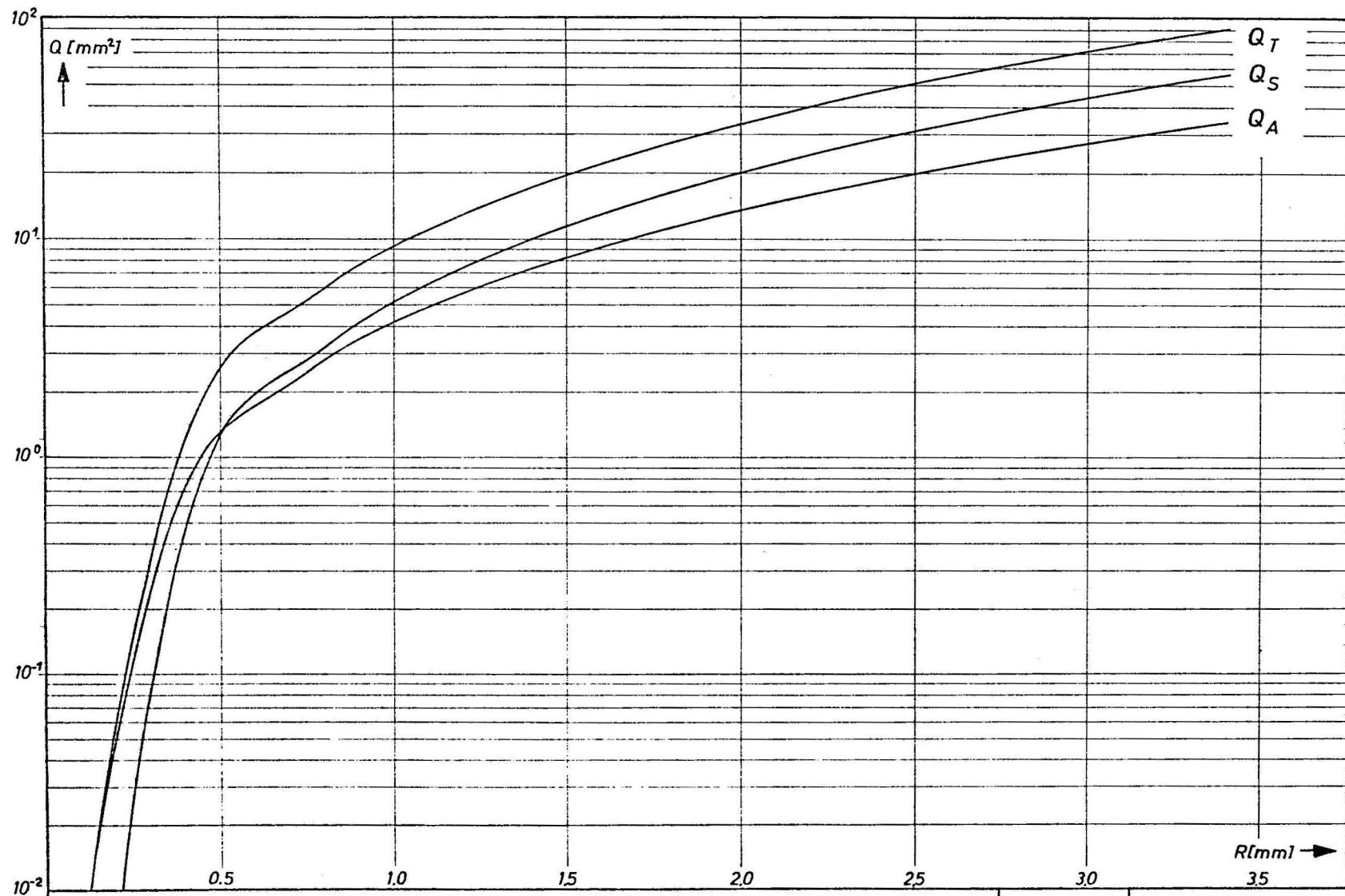


Verlust-, Streu- und Absorptionsquerschnitt für kugelförmige Wassertropfen als Funktion des Tropfen-Radius $\lambda = 5,77 \text{ mm}$, $T = 10^\circ \text{ C}$.

Abb. 5

Blatt-Nr.: 6
Datum: Feb. 70

Heinrich-Hertz-Institut
1 Berlin 10, Einsteinufer 35

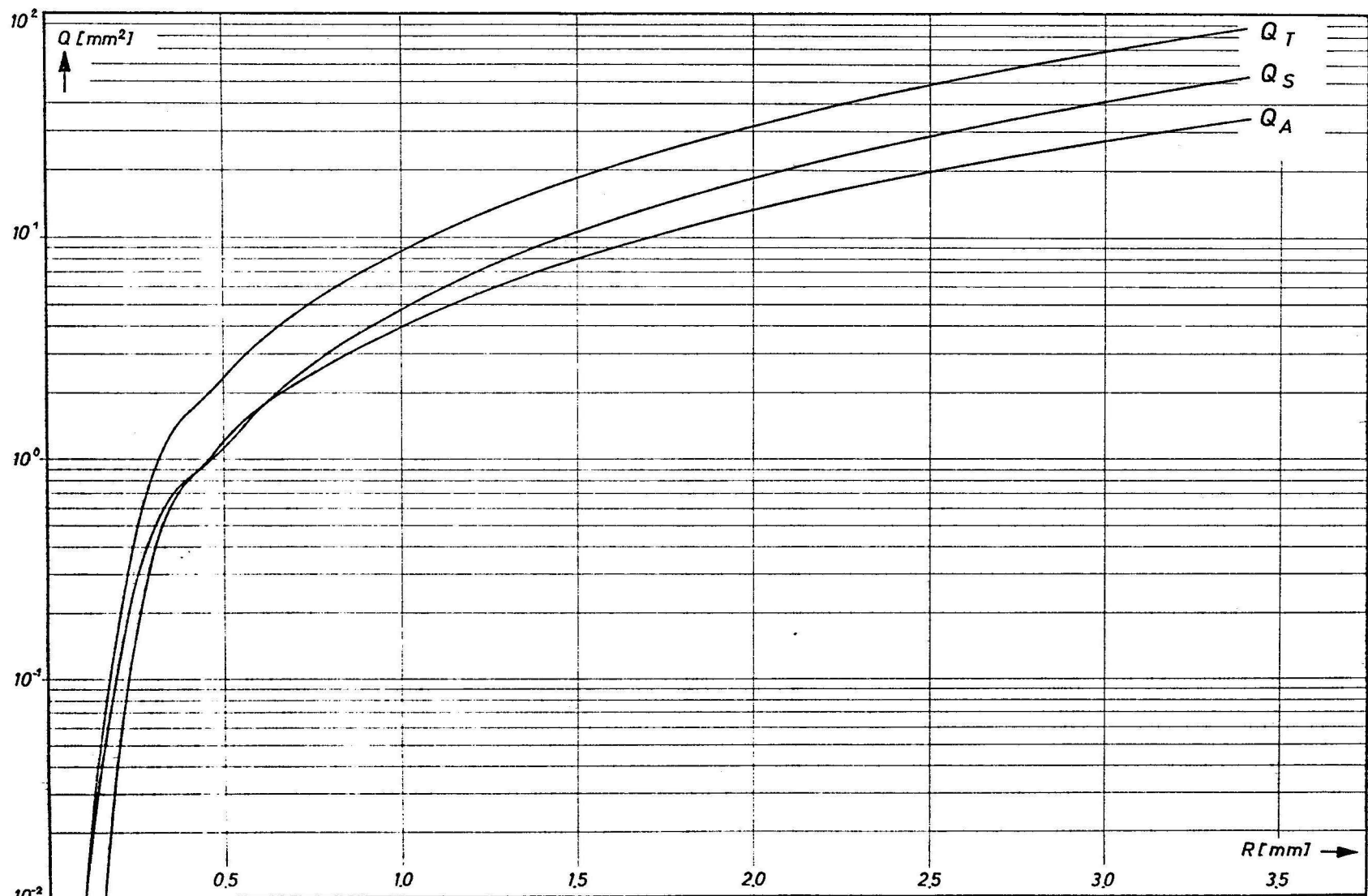


Verlust-, Streu- und Absorptionsquerschnitt für kugelförmige Wassertropfen als Funktion des Tropfen-Radius. $\lambda = 3,30 \text{ mm}$. $T = 10^\circ \text{C}$.

Abb. 6

Blatt-Nr.: 4
Datum: Feb 70

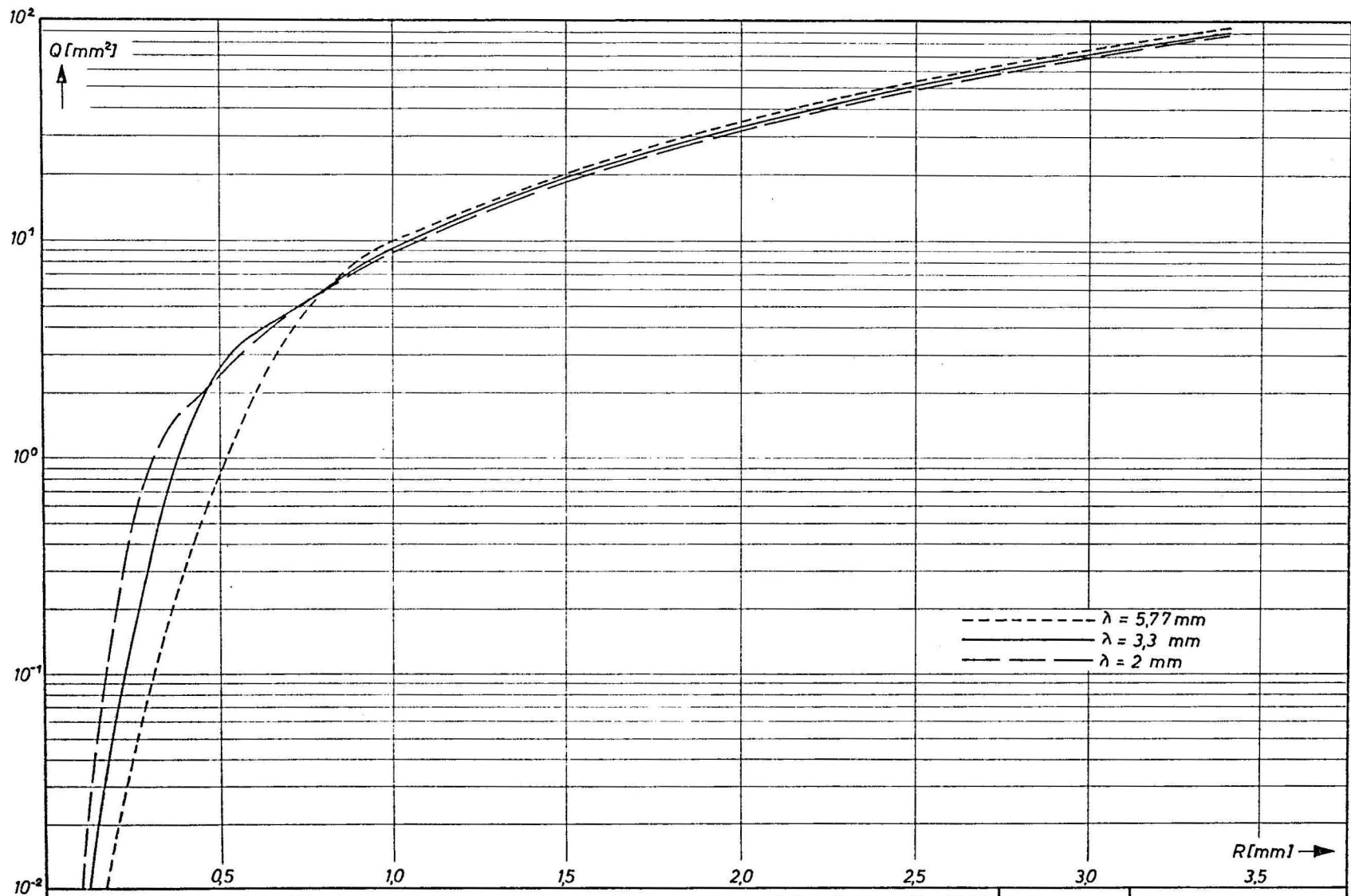
Heinrich-Hertz-Institut
1 Berlin 10, Einsteinufer 35



Verlust-, Streu- und Absorptionsquerschnitt für kugelförmige Wassertropfen als Funktion des Tropfen-Radius. $\lambda = 2,00\text{mm}$, $T = 10^\circ\text{C}$. Abb. 7

Blatt-Nr: 5
Datum: Feb 70

Heinrich-Hertz-Institut
1 Berlin 10, Einsteinufer 35

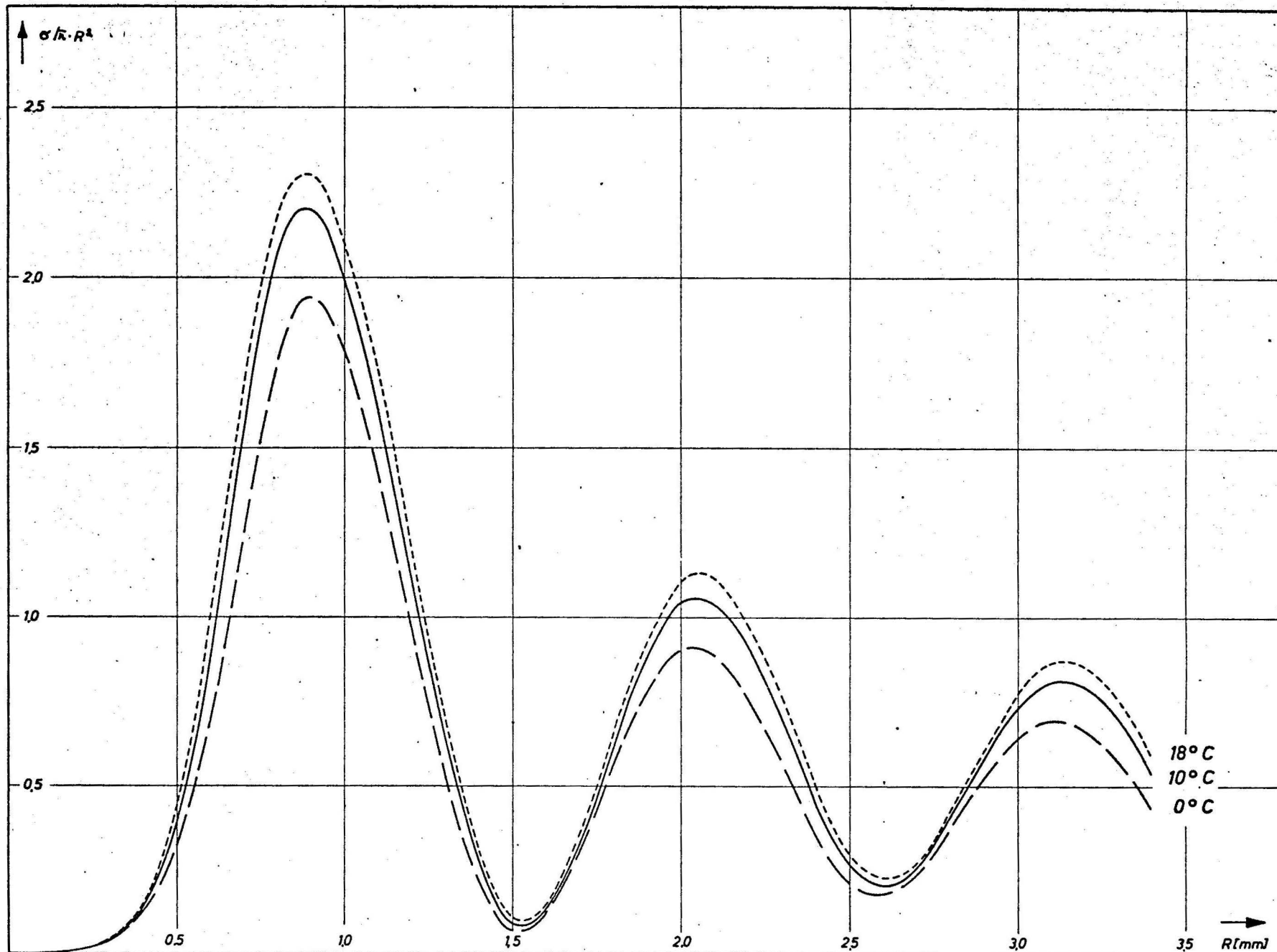


Verlustquerschnitt für kugelförmige Wassertropfen, $\lambda = 5,77; 3,3$ u. 2 mm $T = 10^\circ\text{C}$.

Abb. 8

Blatt-Nr.:
Datum:

Heinrich-Hertz-Institut
1 Berlin 10 Einsteinufer 35

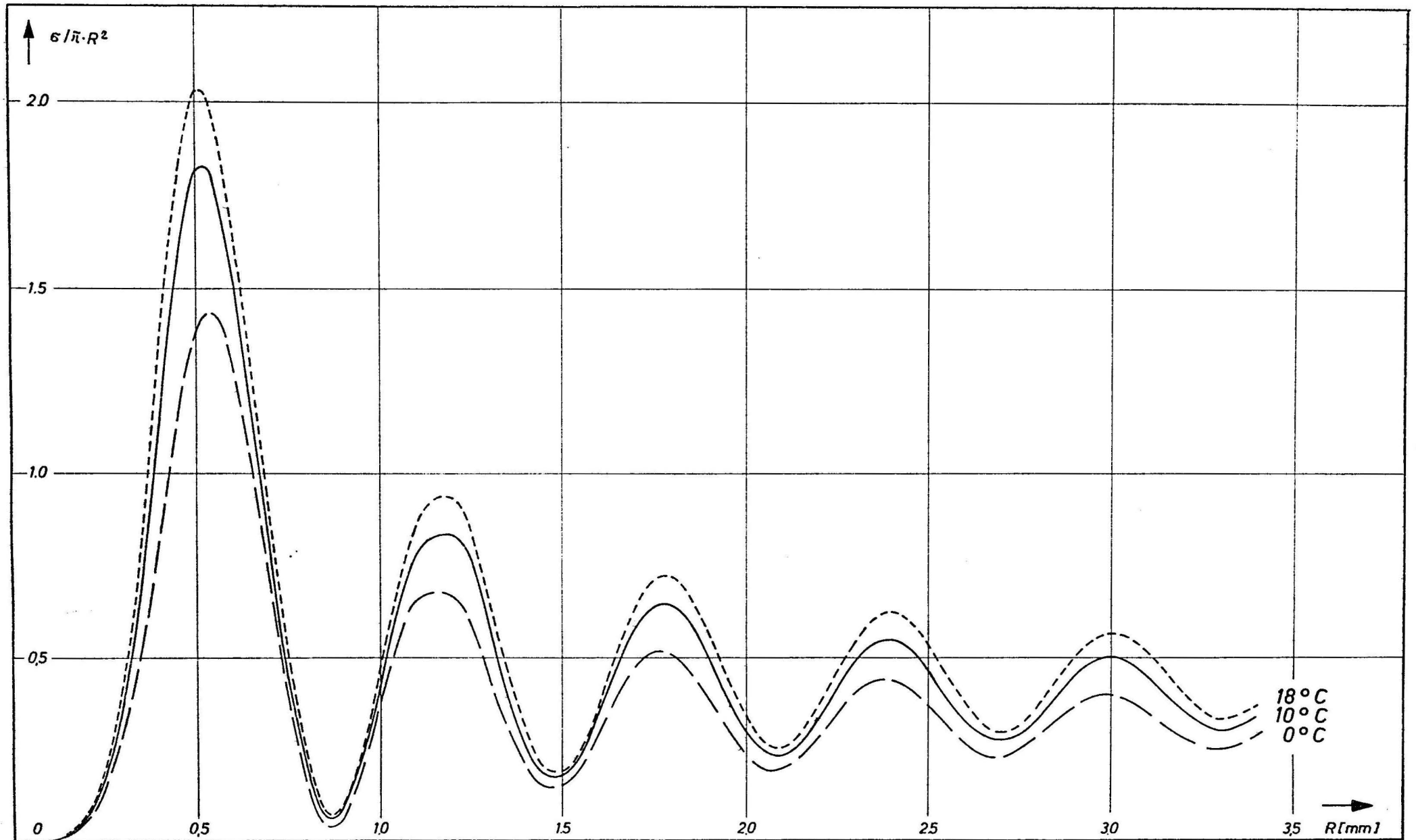


Normierter Rückstreuquerschnitt für kugelförmige Wassertropfen als Funktion des Tropfen-Radius. $\lambda = 5,77 \text{ mm}$; $T = 0; 10 \text{ und } 18^\circ \text{ C}$.

Abb. 9

Blatt-Nr.: 20
Datum: Feb 70

Heinrich-Hertz-Institut
1 Berlin 10, Einsteinufer 35

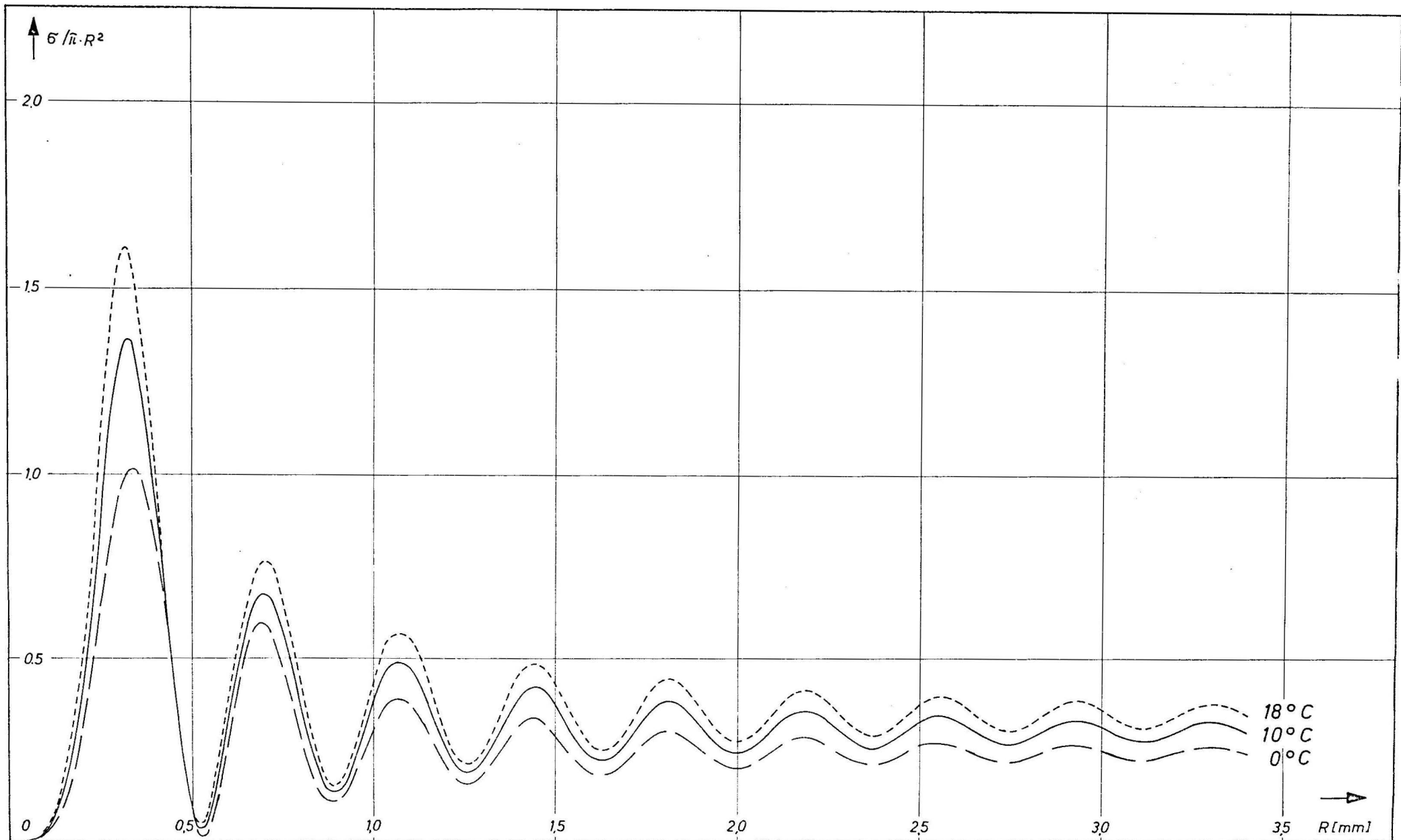


Normierter Rückstreuquerschnitt für kugelförmige Wassertropfen als Funktion des Tropfen - Radius, $\lambda = 3,30 \text{ mm}$; $T = 0; 10 \text{ und } 18^\circ \text{ C}$.

Abb. 10

Blatt-Nr. 24
Datum: Feb 70

Heinrich-Hertz-Institut
1 Berlin 10, Einsteinufer 35

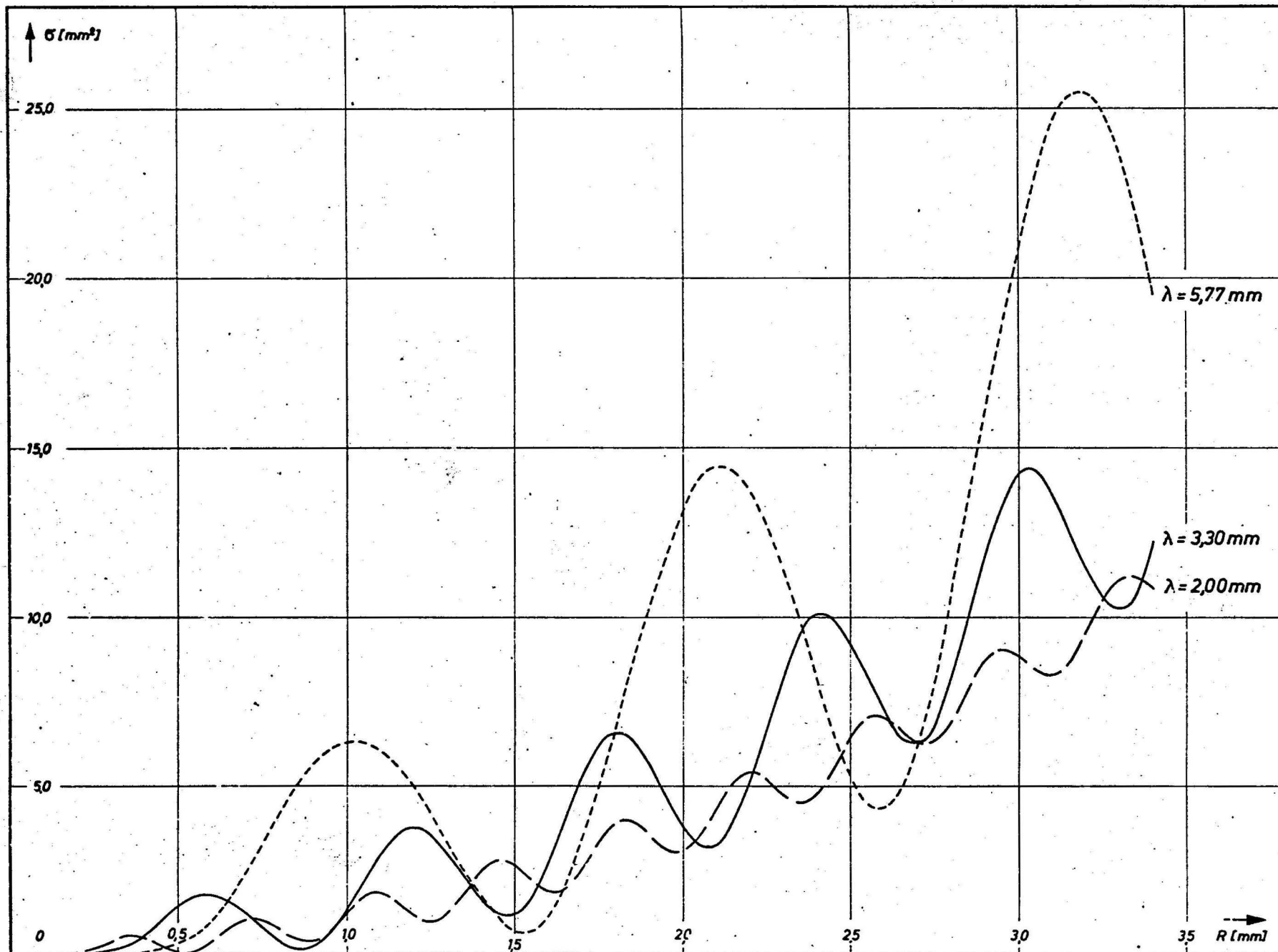


Normierter Rückstreuquerschnitt für kugelförmige Wassertropfen als Funktion des Tropfen-Radius. $\lambda = 2,00$ $T = 0; 10$ und 18°C .

Abb. 11

Blatt-Nr: 24
Datum: Feb 70

Heinrich-Hertz-Institut
1 Berlin 10, Einsteinufer 35

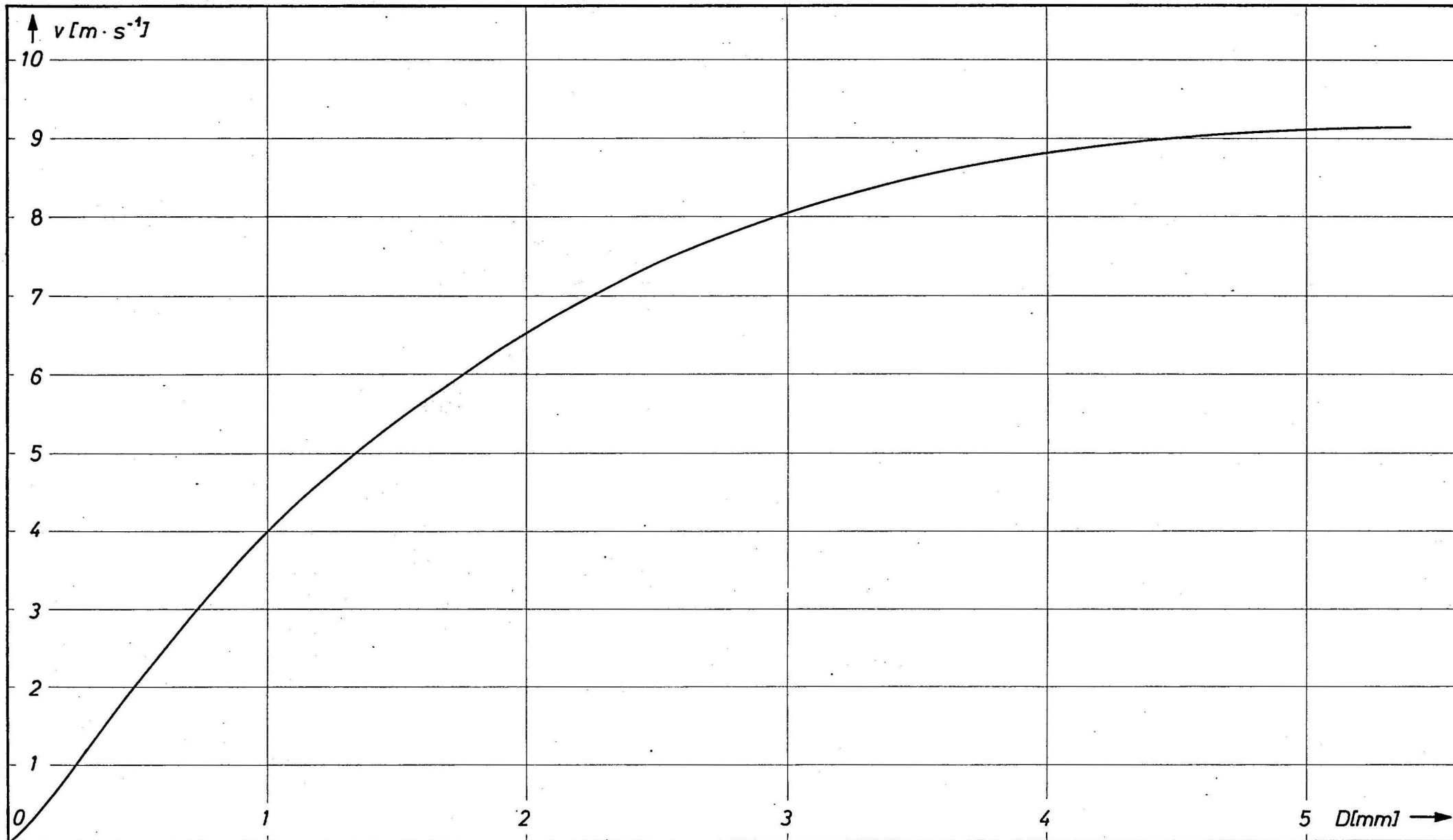


Rückstreuquerschnitt für kugelförmige Wassertropfen als Funktion des Tropfen-Radius
 $\lambda = 5,77; 3,30$ und $2,00 \text{ mm}, T = 10^\circ \text{C}$.

Abb. 12

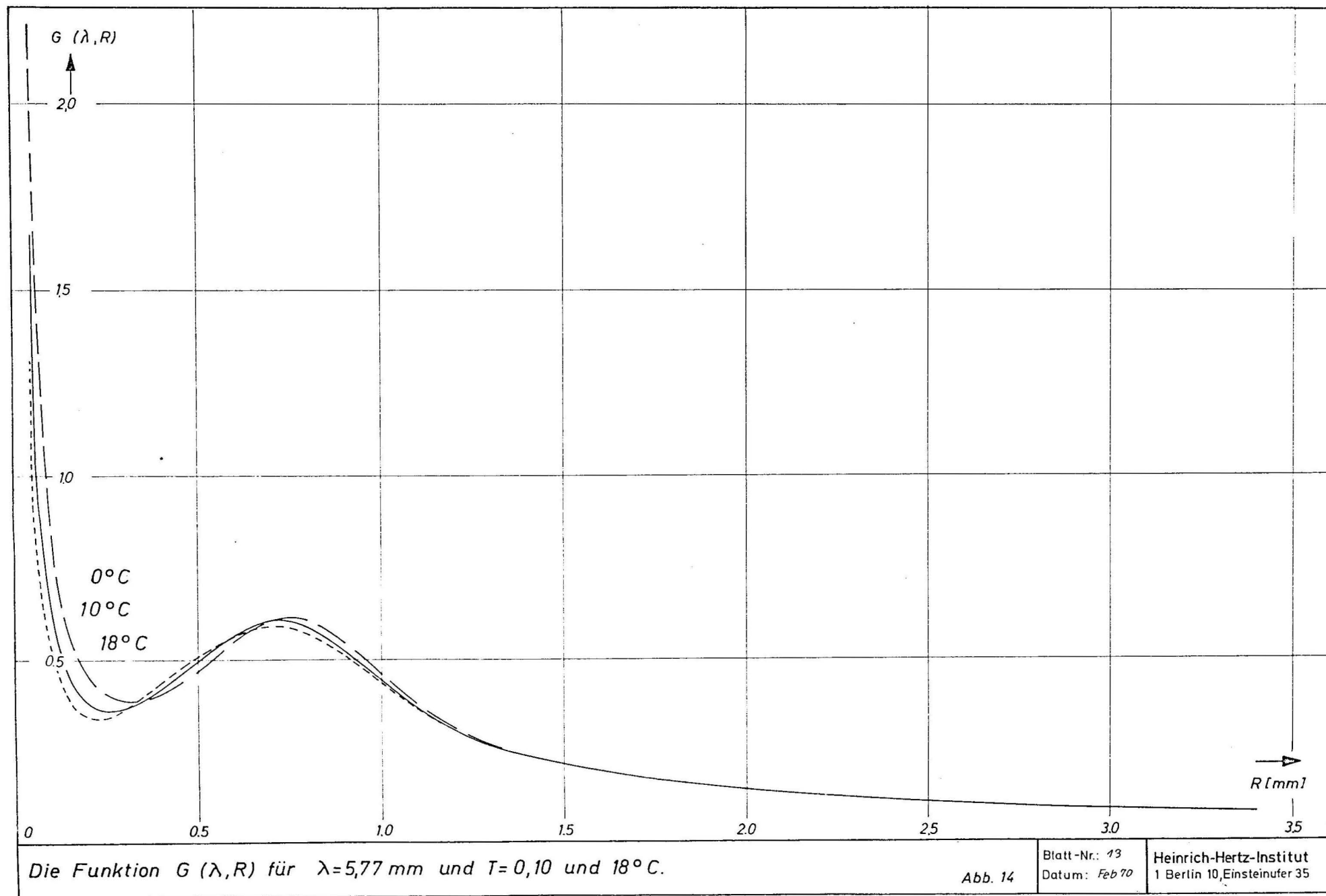
Blatt-Nr. 18
 Datum: Feb 70

Heinrich-Hertz-Institut
 1 Berlin 10, Einsteinufer 35



Endgeschwindigkeit von Wassertropfen in Abhängigkeit von ihrem Durchmesser.
(Nach Gunn u. Kinzer, 1949)

Abb. 13



Die Funktion $G(\lambda, R)$ für $\lambda = 5,77 \text{ mm}$ und $T = 0, 10$ und 18°C .

Abb. 14

Blatt-Nr.: 13
Datum: Feb 70

Heinrich-Hertz-Institut
1 Berlin 10, Einsteinufer 35

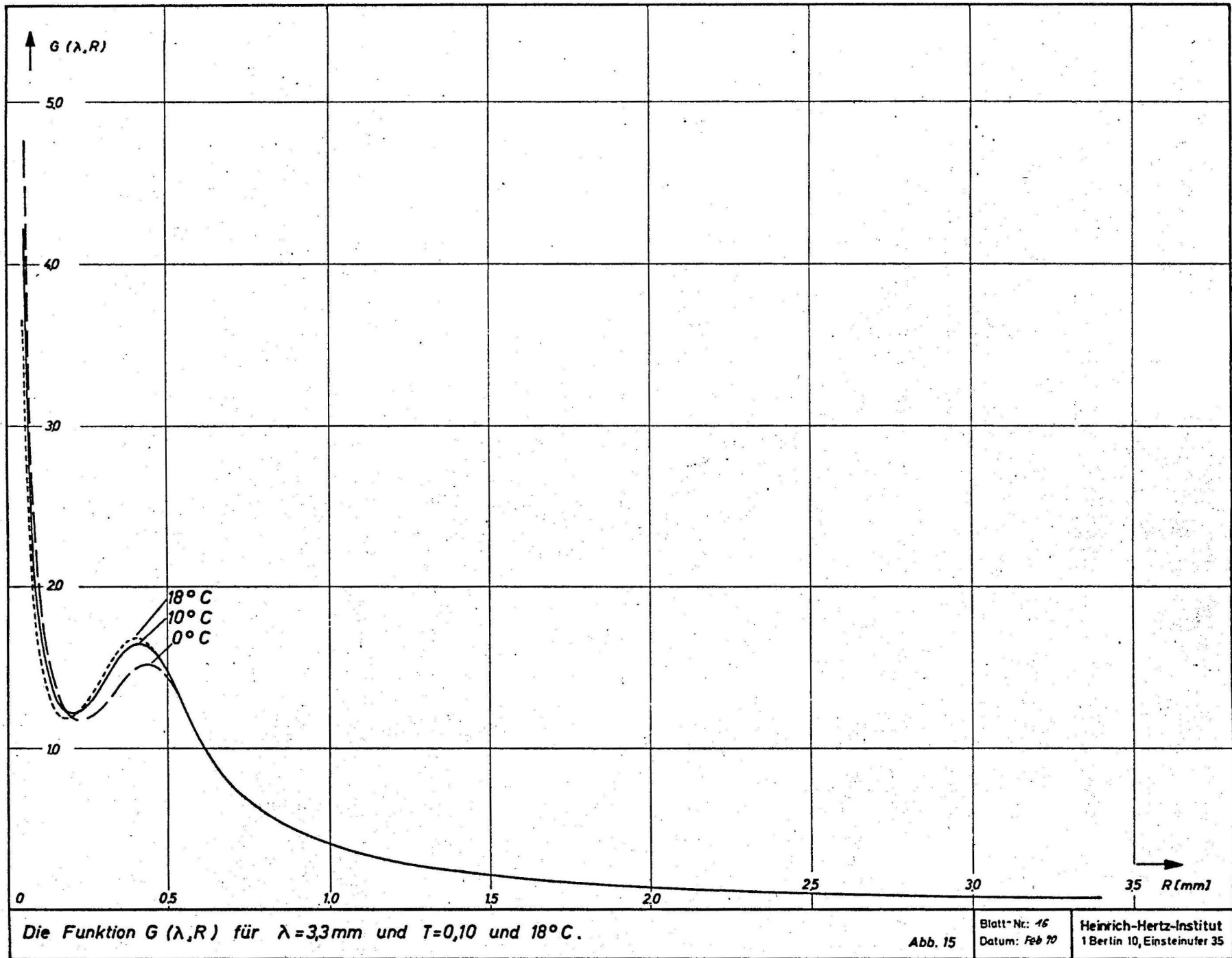
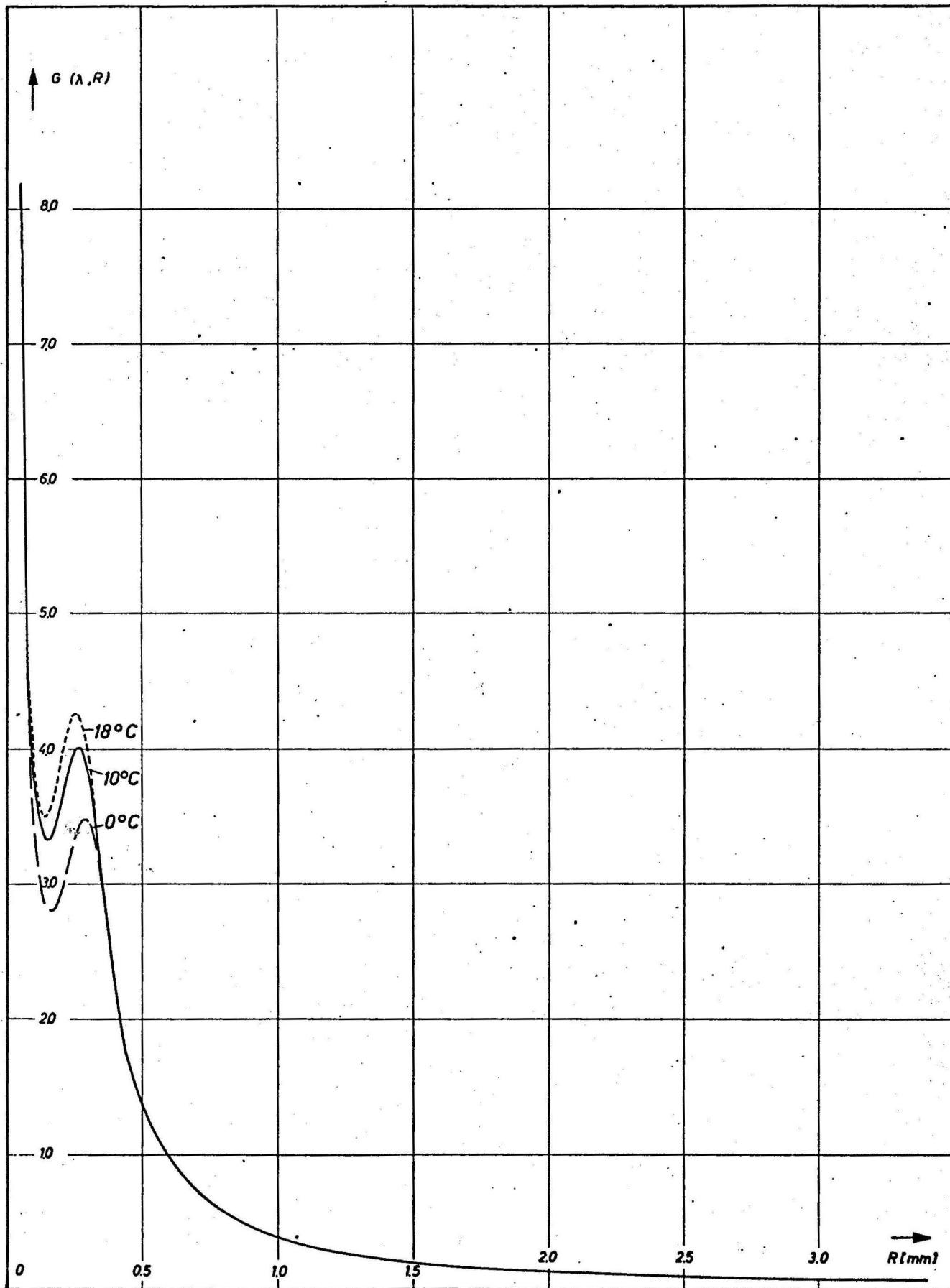


Abb. 15

Blatt-Nr: 16
Datum: Feb 70

Heinrich-Hertz-Institut
1 Berlin 10, Einsteinufer 35

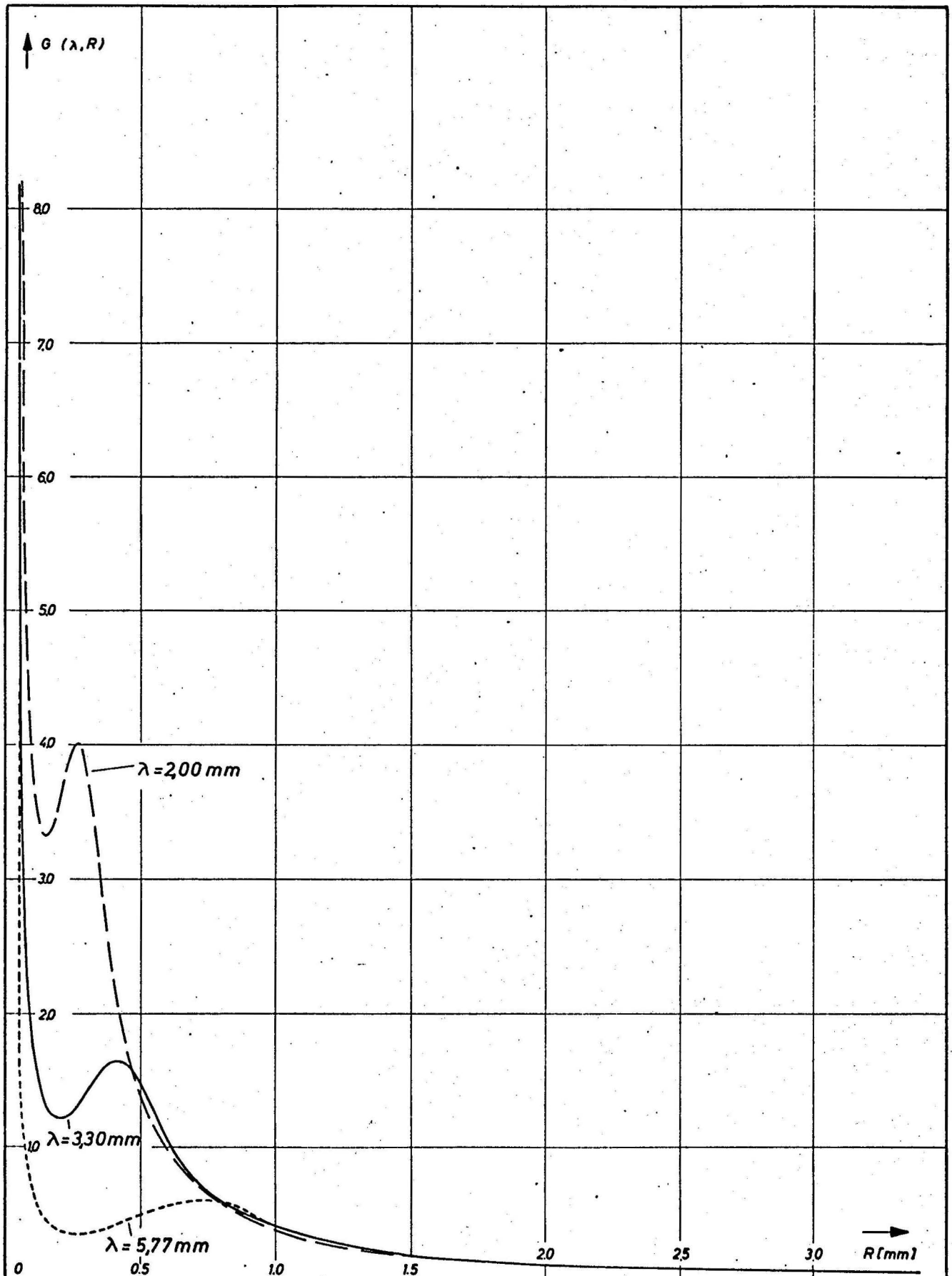


Funktion $G(\lambda, R)$ für $\lambda = 2\text{mm}$ und $T = 0, 10$ und 18°C .

Abb. 16

Blatt-Nr: 8
Datum: Feb 70

Heinrich-Hertz-Institut
1 Berlin 10, Einsteinufer 39

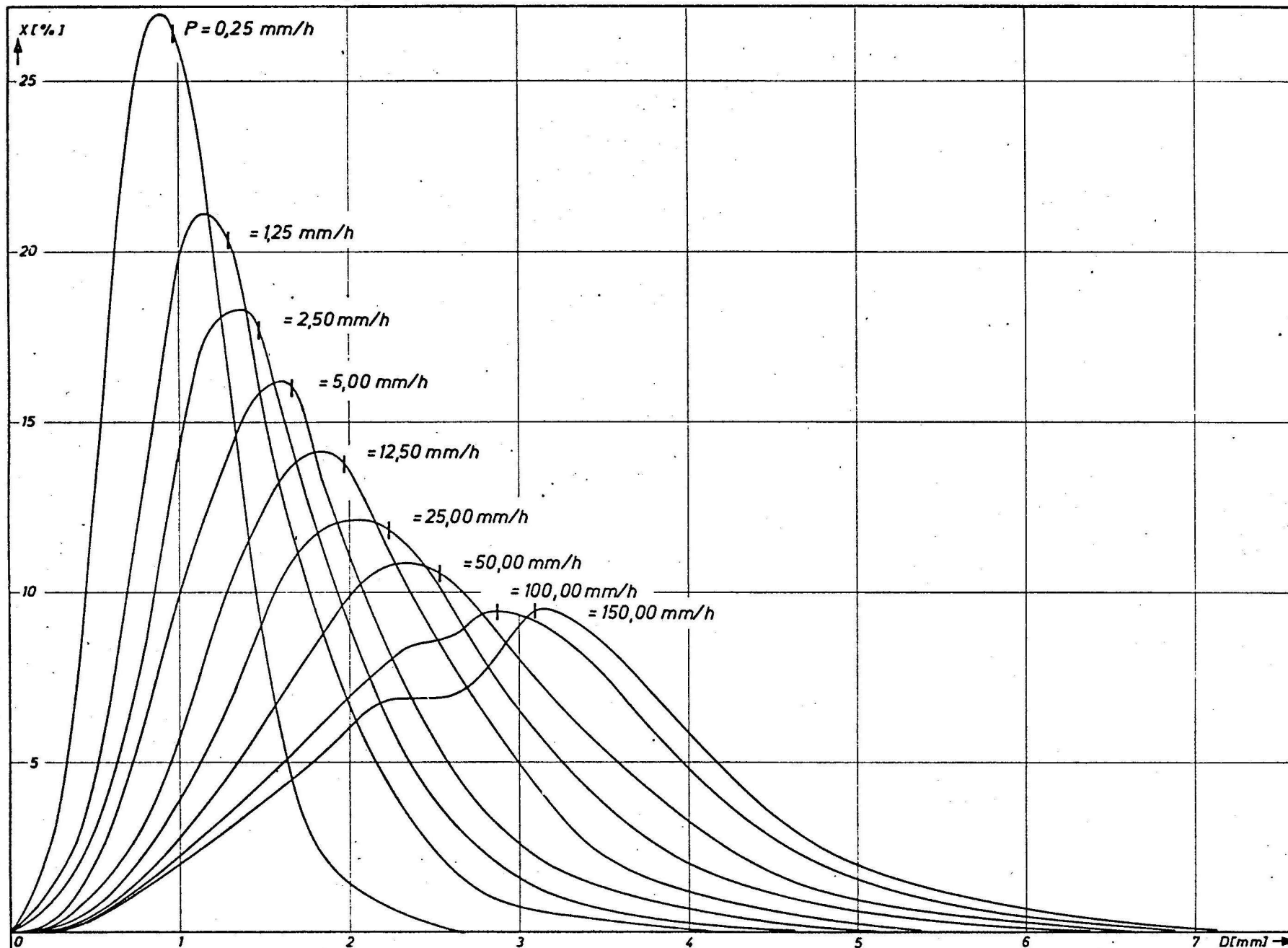


Die Funktion $G(\lambda, R)$ für $\lambda = 200; 330$ und 577 mm und $T = 10^\circ\text{C}$.

Abb. 17

Blatt-Nr: 9
Datum: Feb 70

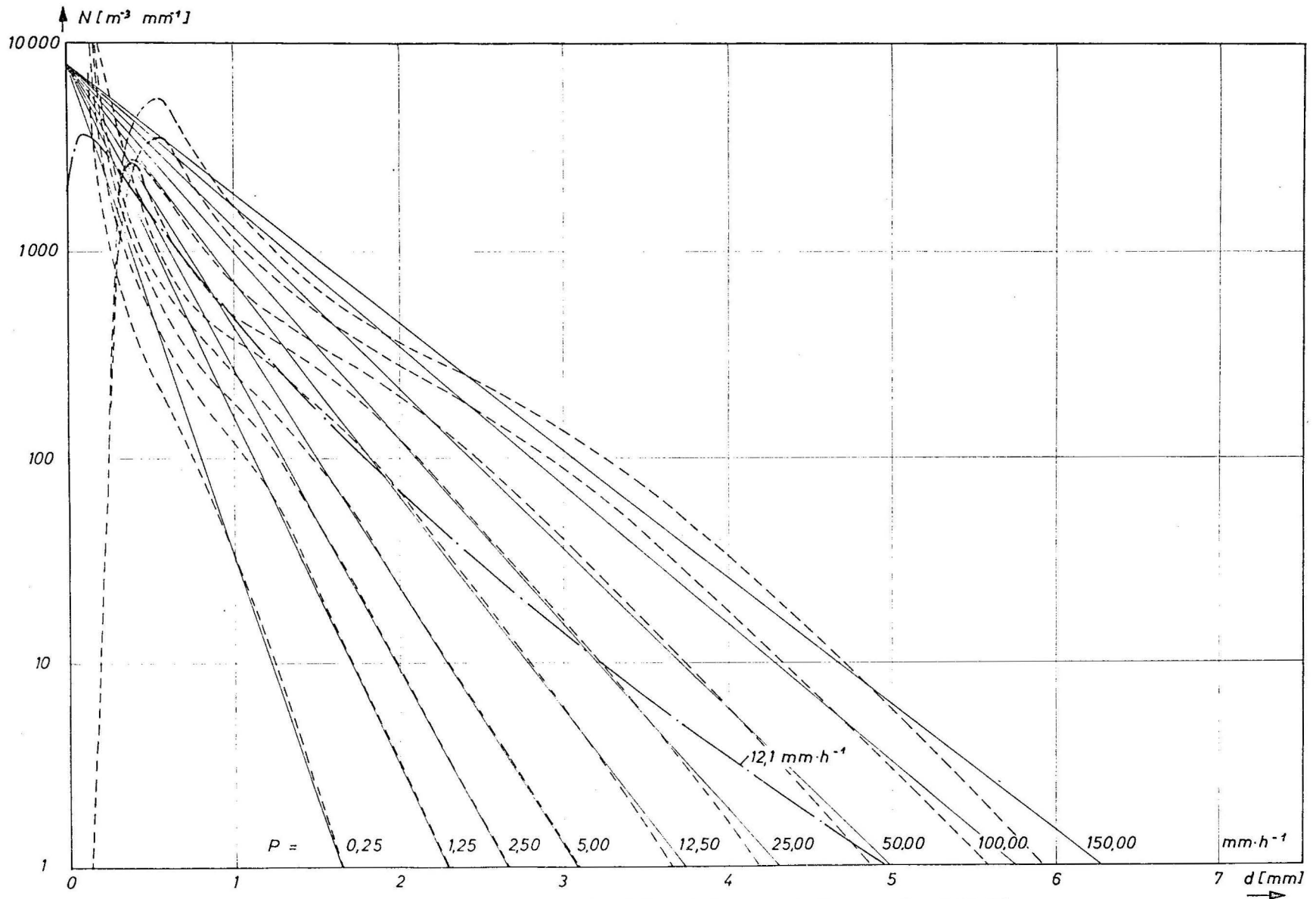
Heinrich-Hertz-Institut
1 Berlin 10 Einsteinufer 35



Relativer Volumenanteil x in Prozent von Tropfen in einem jeweiligen Durchmesserbereich von $0,25$ mm in Abhängigkeit vom Tropfendurchmesser. Parameter ist die Regenintensität R in [mm/h]. (nach Laws u. Parsons)

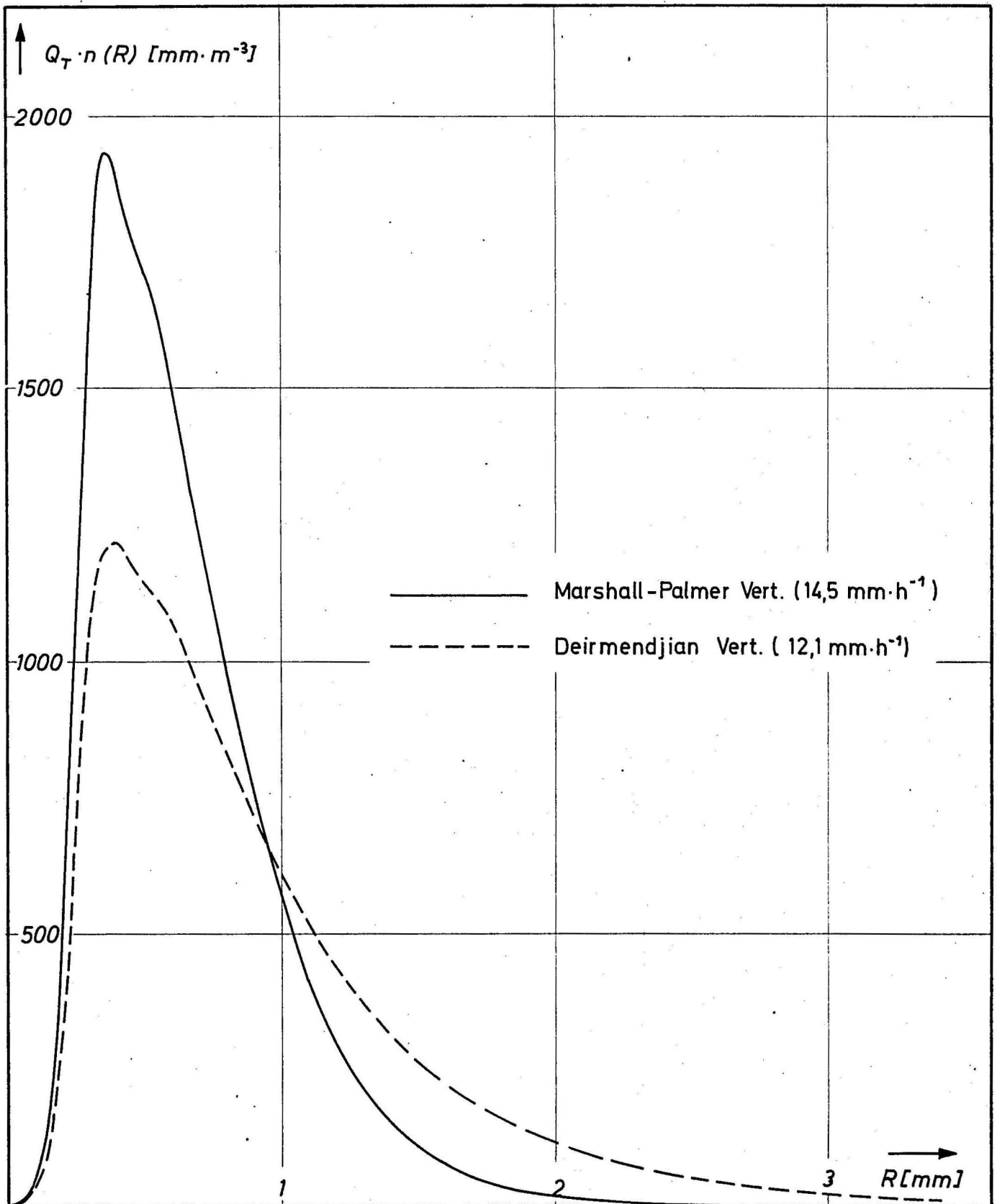
Blatt-Nr.: 7
Datum: Feb. 70

Heinrich-Hertz-Institut
1 Berlin 10, Einsteinufer 35



Tropfenverteilung in Abhängigkeit von der Regenintensität nach Laws und Parsons (gestrichelt), Marshall und Palmer (durchgezogene Linien) und Deirmendjian (strichpunktiert).

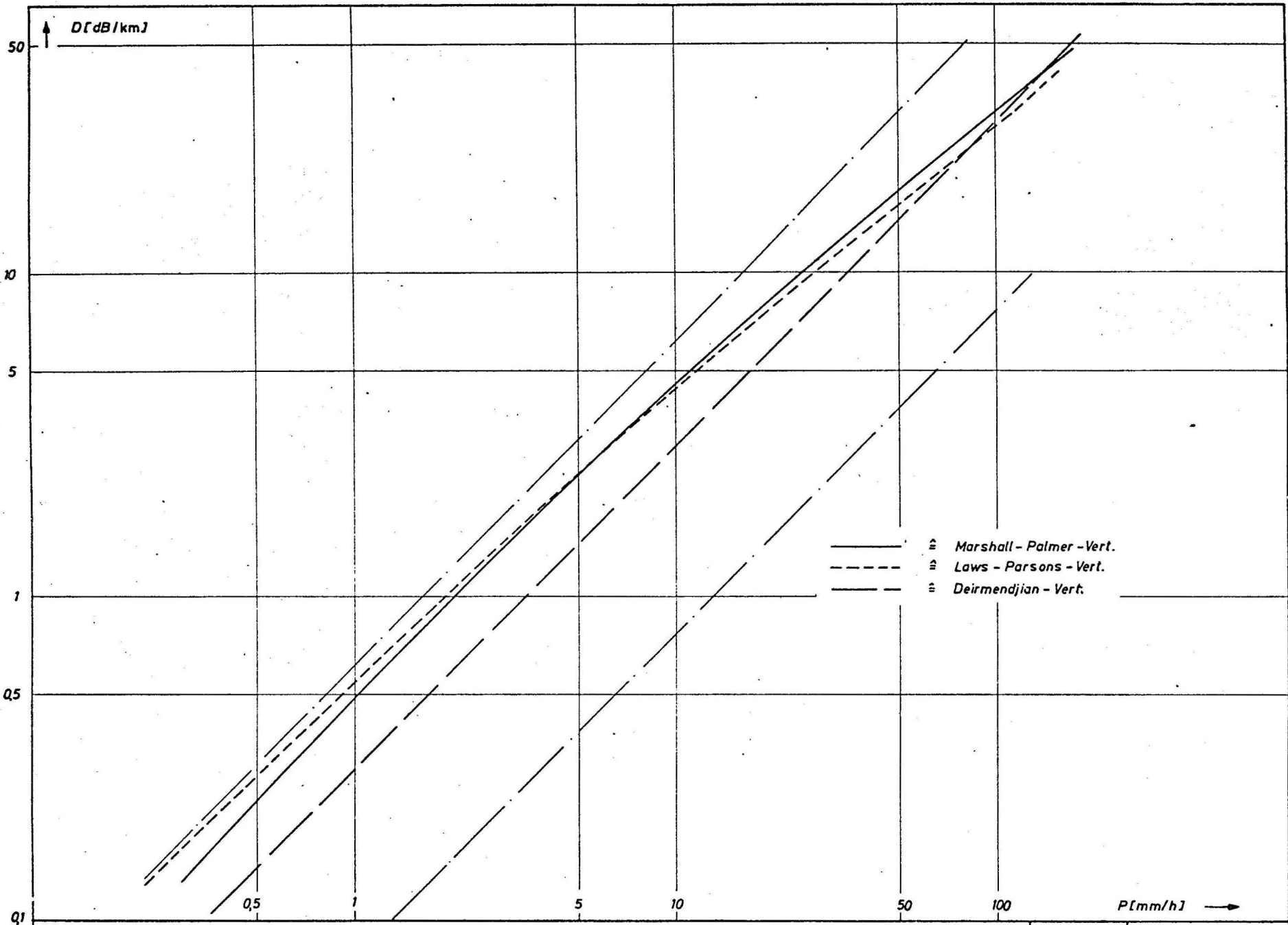
Abb. 19



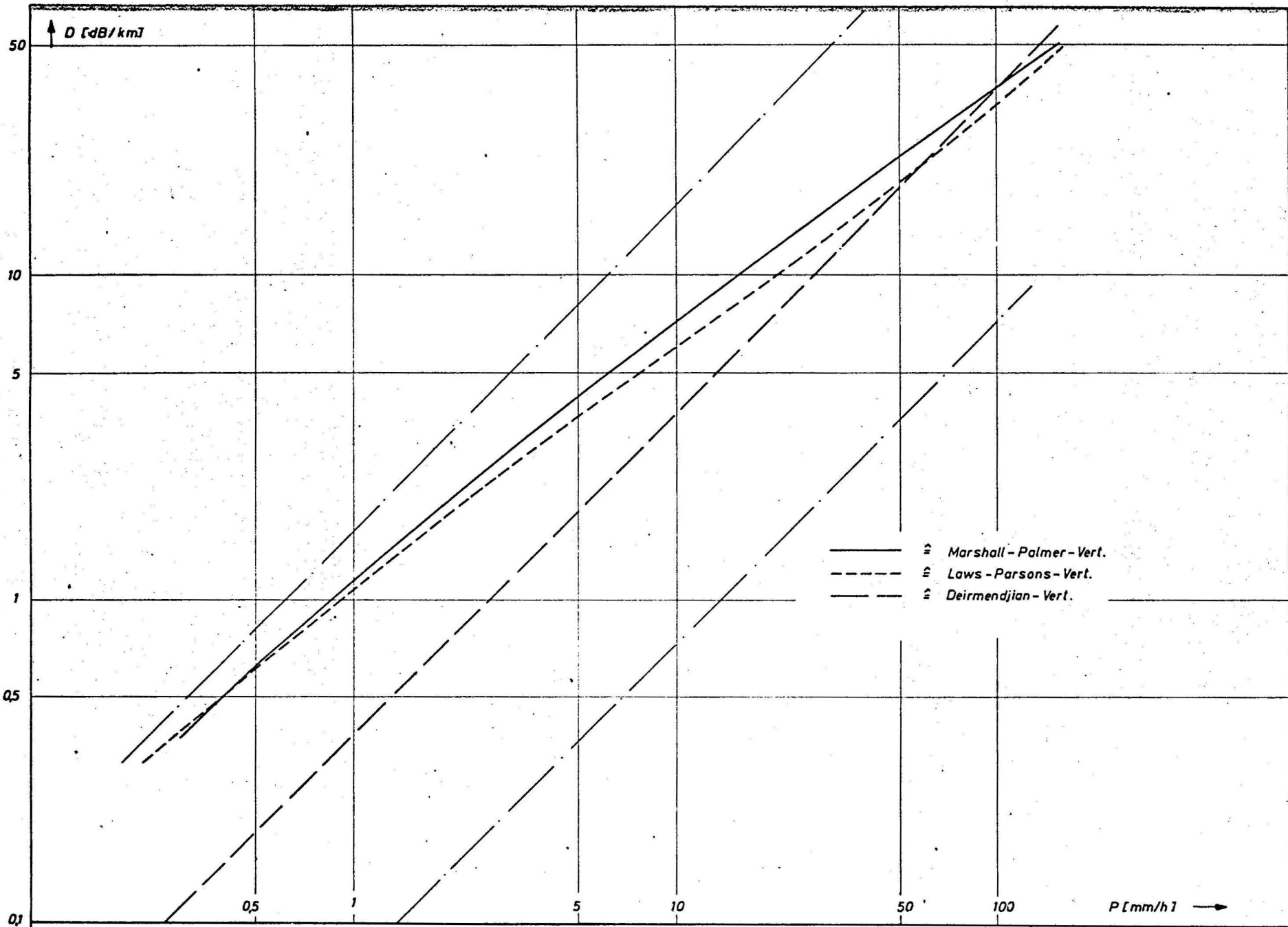
Integrand $Q_T(\lambda, R) \cdot n(R)$ für $\lambda = 2 \text{ mm}$
und $T = 10^\circ \text{C}$.

Abb. 20

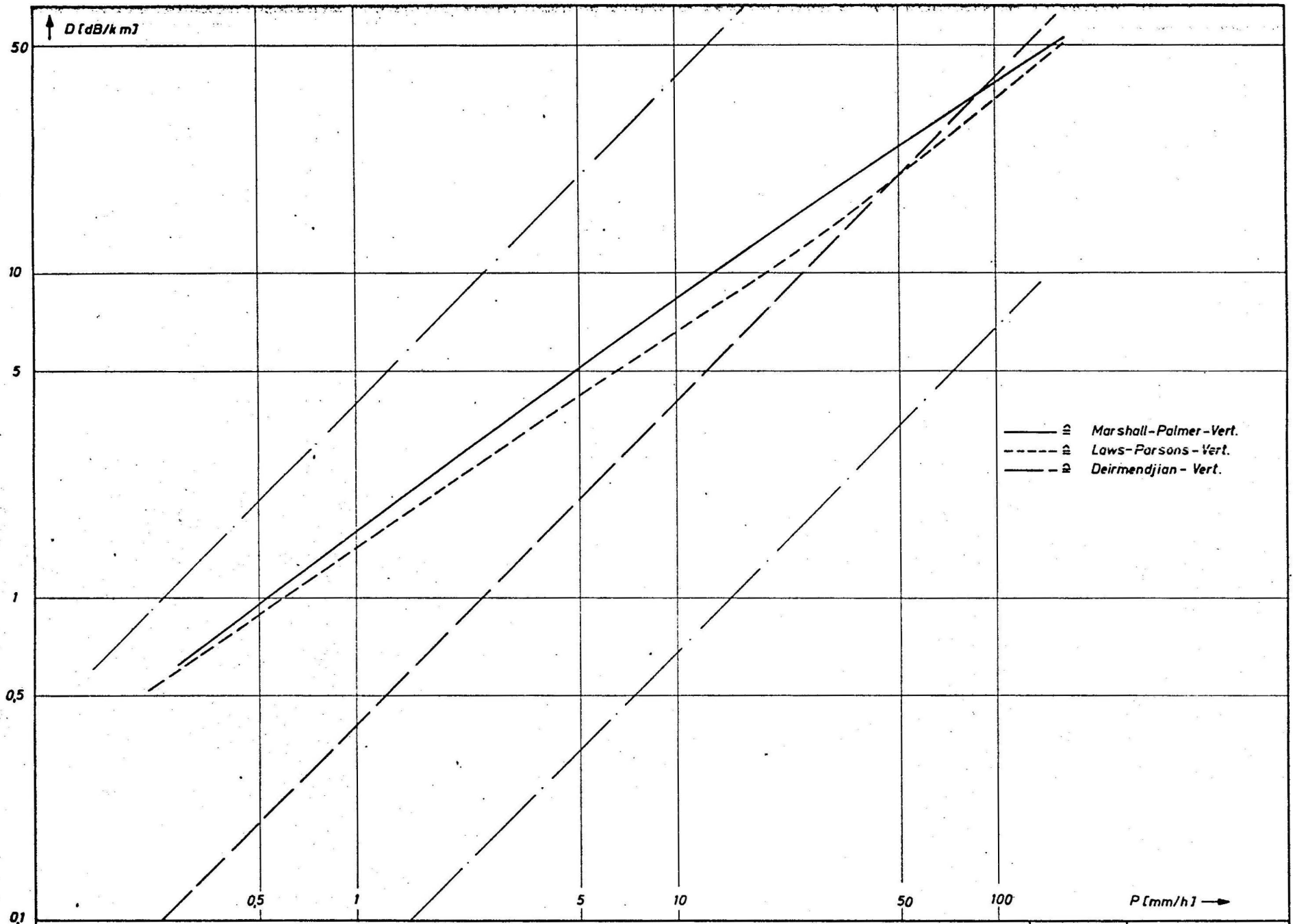
Heinrich-Hertz-Institut
1 Berlin 10, Einsteinufer 35



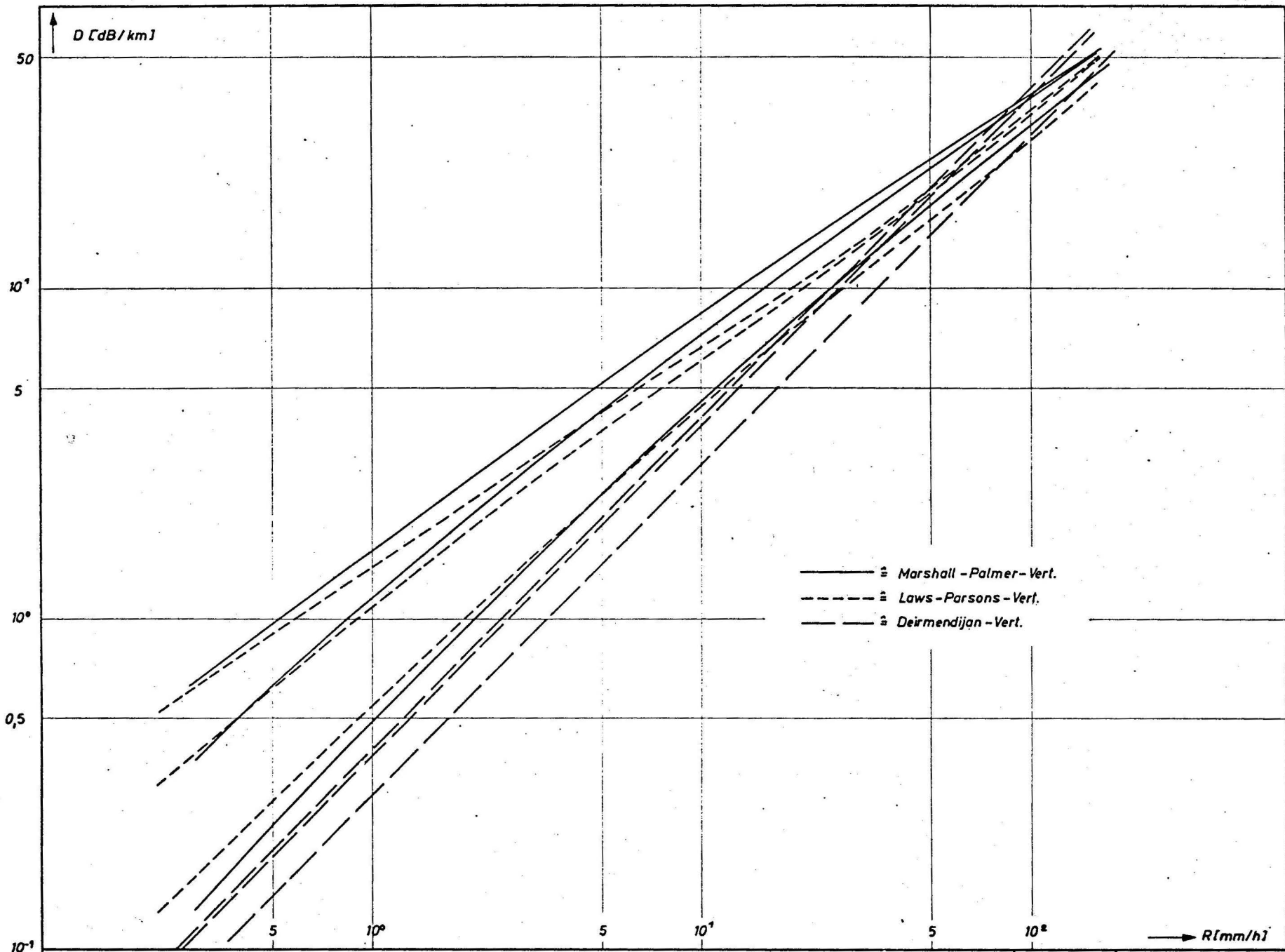
Dämpfung in dB/km als Funktion der Regenintensität für verschiedene Tropfenverteilungen
 $\lambda = 5,77 \text{ mm}; T = 10^\circ \text{C}.$



Dämpfung in dB/km als Funktion der Regenintensität für verschiedene Tropfenverteilungen und $\lambda = 3,30 \text{ mm}$; $T = 10^\circ \text{ C}$.



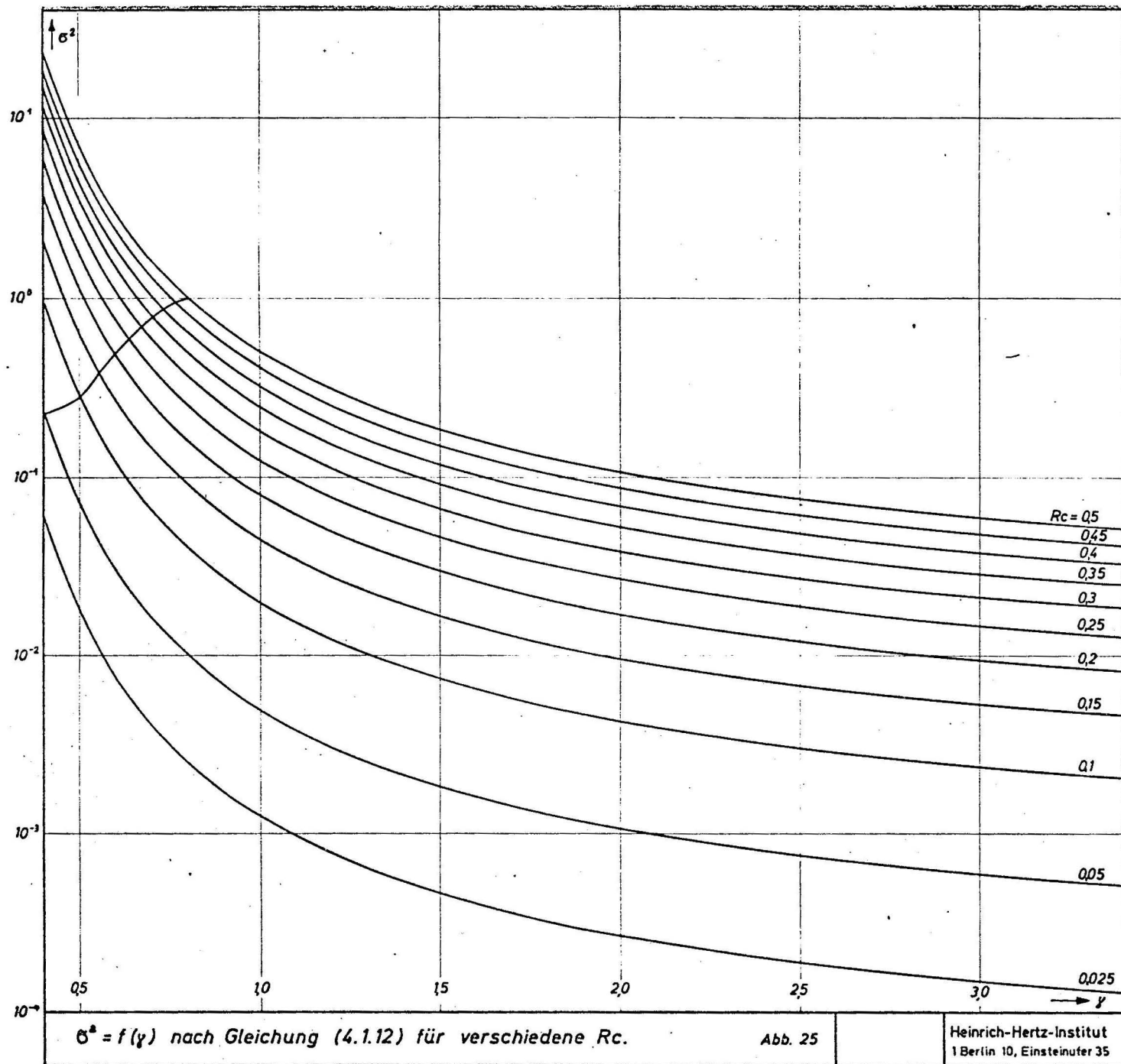
Dämpfung in dB/km als Funktion der Regenintensität für verschiedene Tropfenverteilungen
 $\lambda = 2 \text{ mm}; T = 10^\circ \text{ C}.$

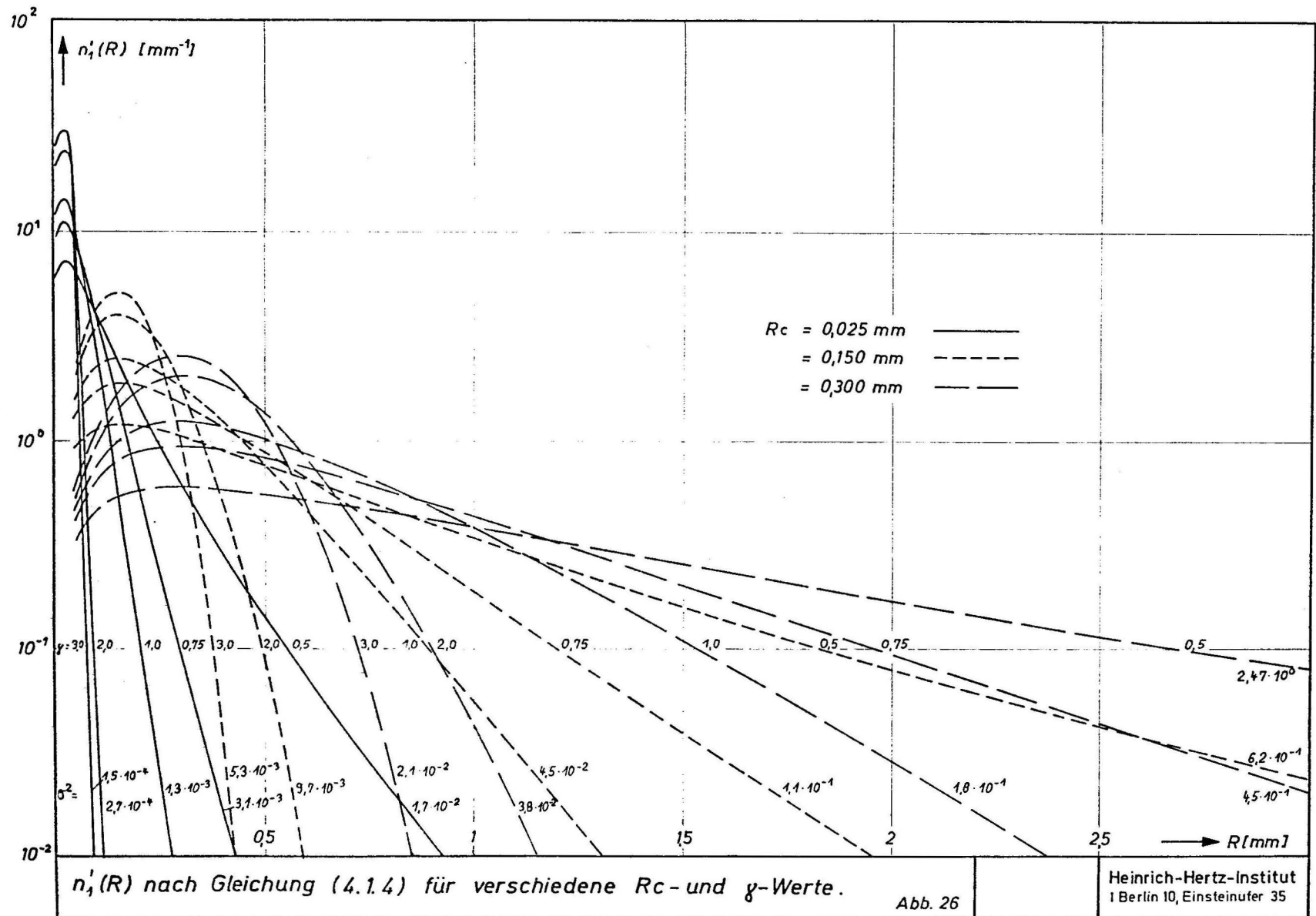


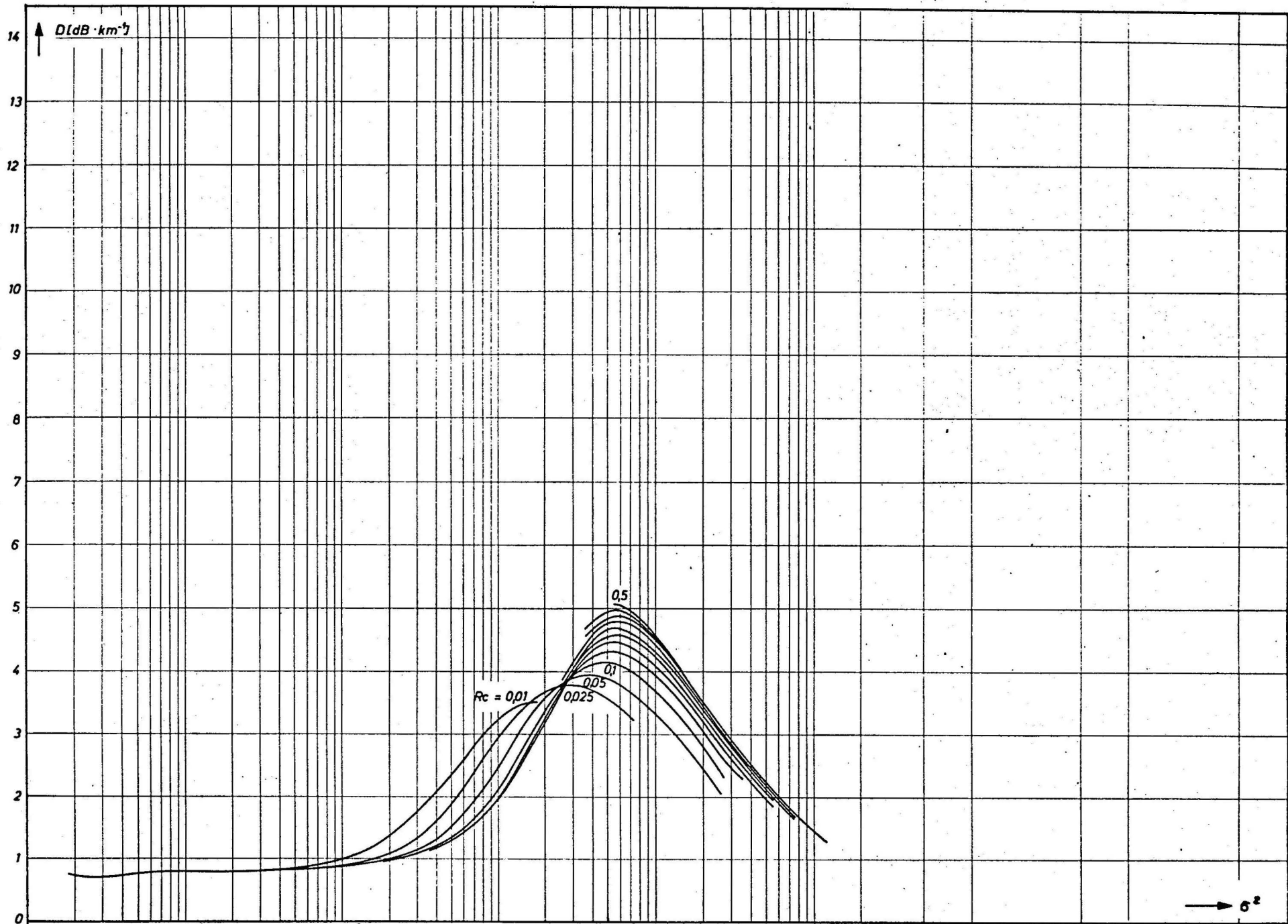
Vergleich der Dämpfungen bei $\lambda = 5.77; 3.3$ und 2 mm für verschiedene Tropfenverteilungen. $T = 10^\circ\text{C}$.

Abb. 24

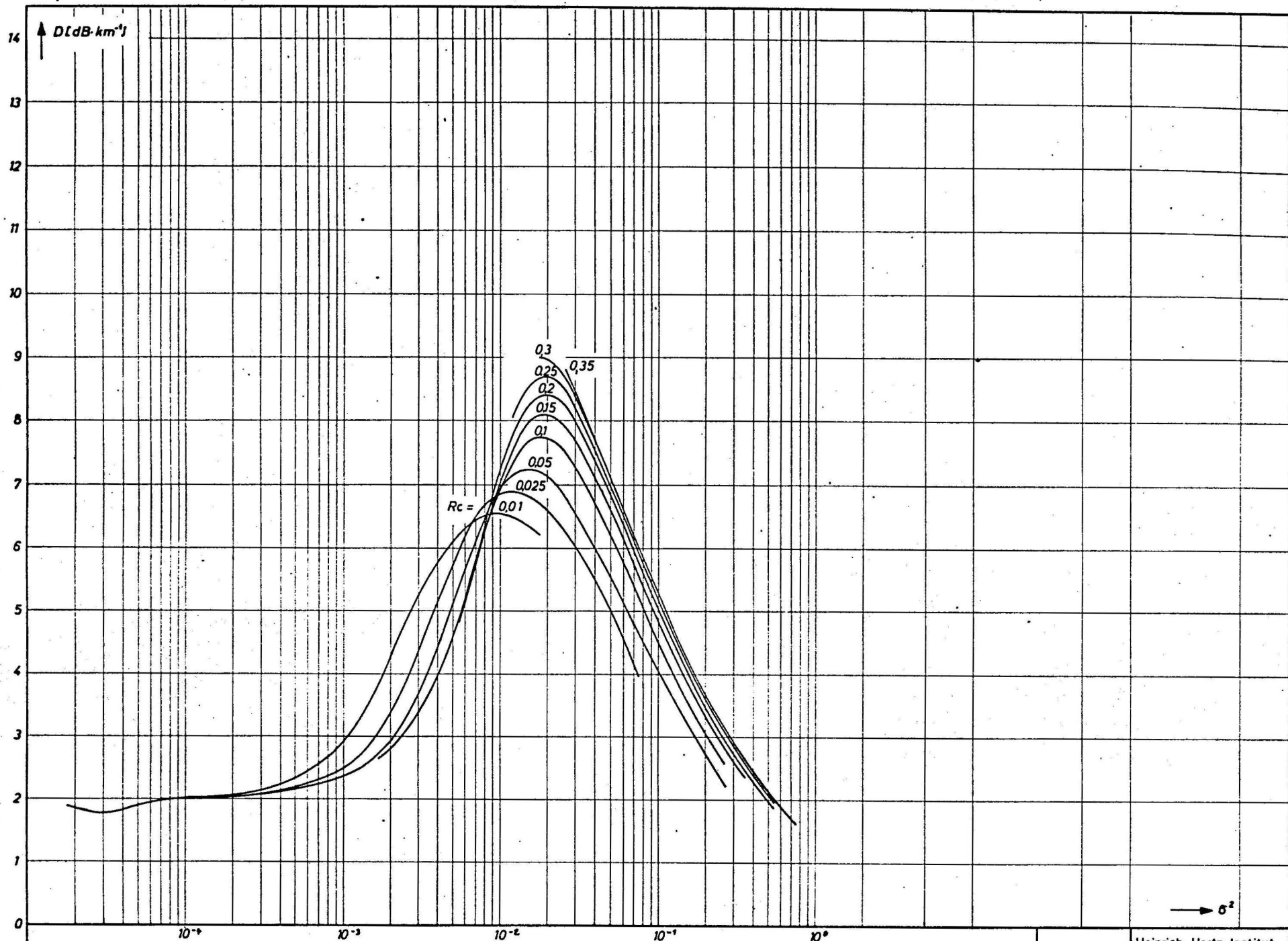
Heinrich-Hertz-Institut
1 Berlin 35, Einsteinufer 35



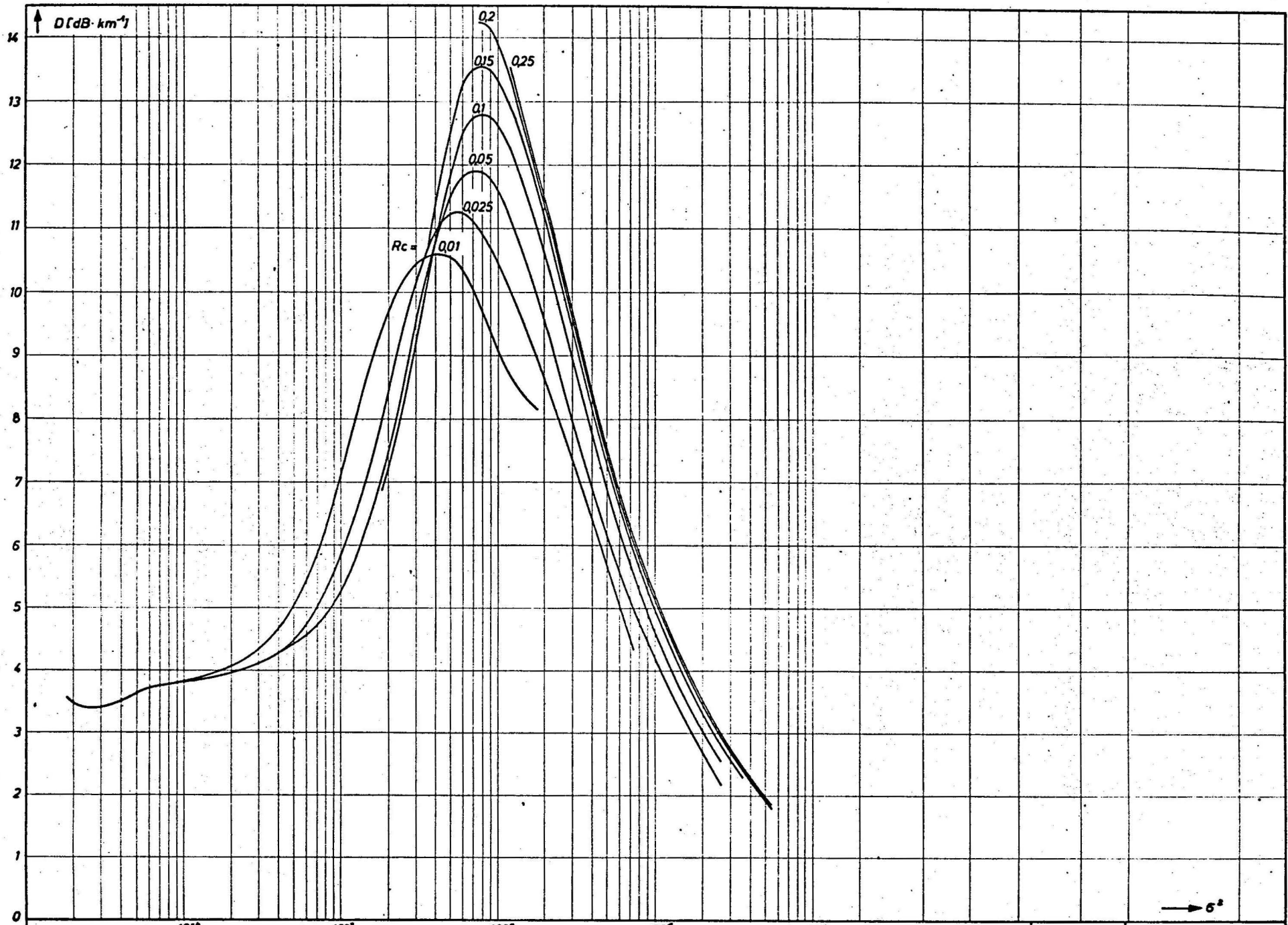




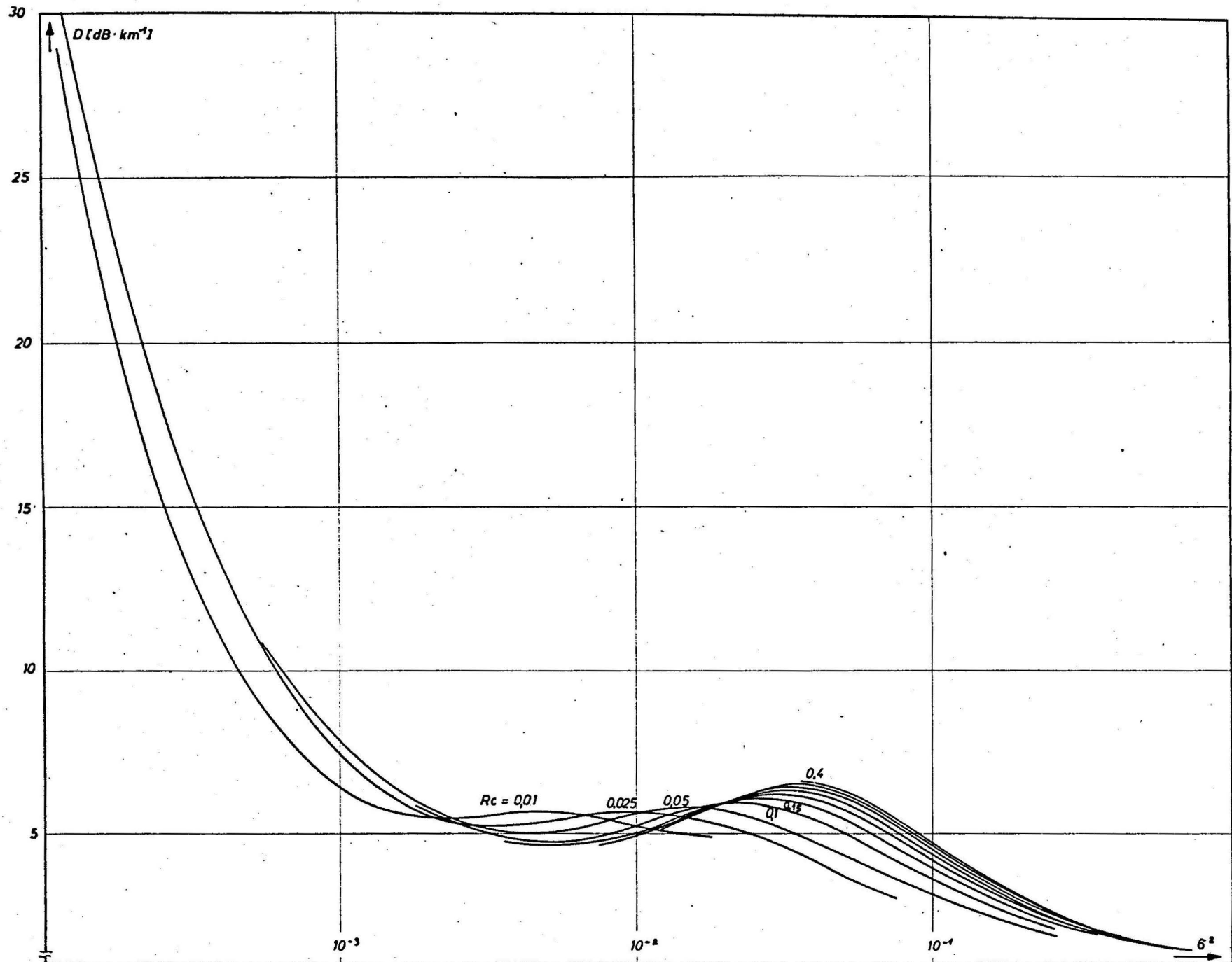
Die Dämpfung als Funktion der Streuung für $\lambda = 5,77 \text{ mm}$ u. $T = 10^\circ \text{C}$. $M = \frac{4}{3} \pi \cdot \int_0^\infty R^3 n_1(R) Q_T(R, \lambda) dR = 500 \cdot \text{gm}^{-3}$ Abb. 27



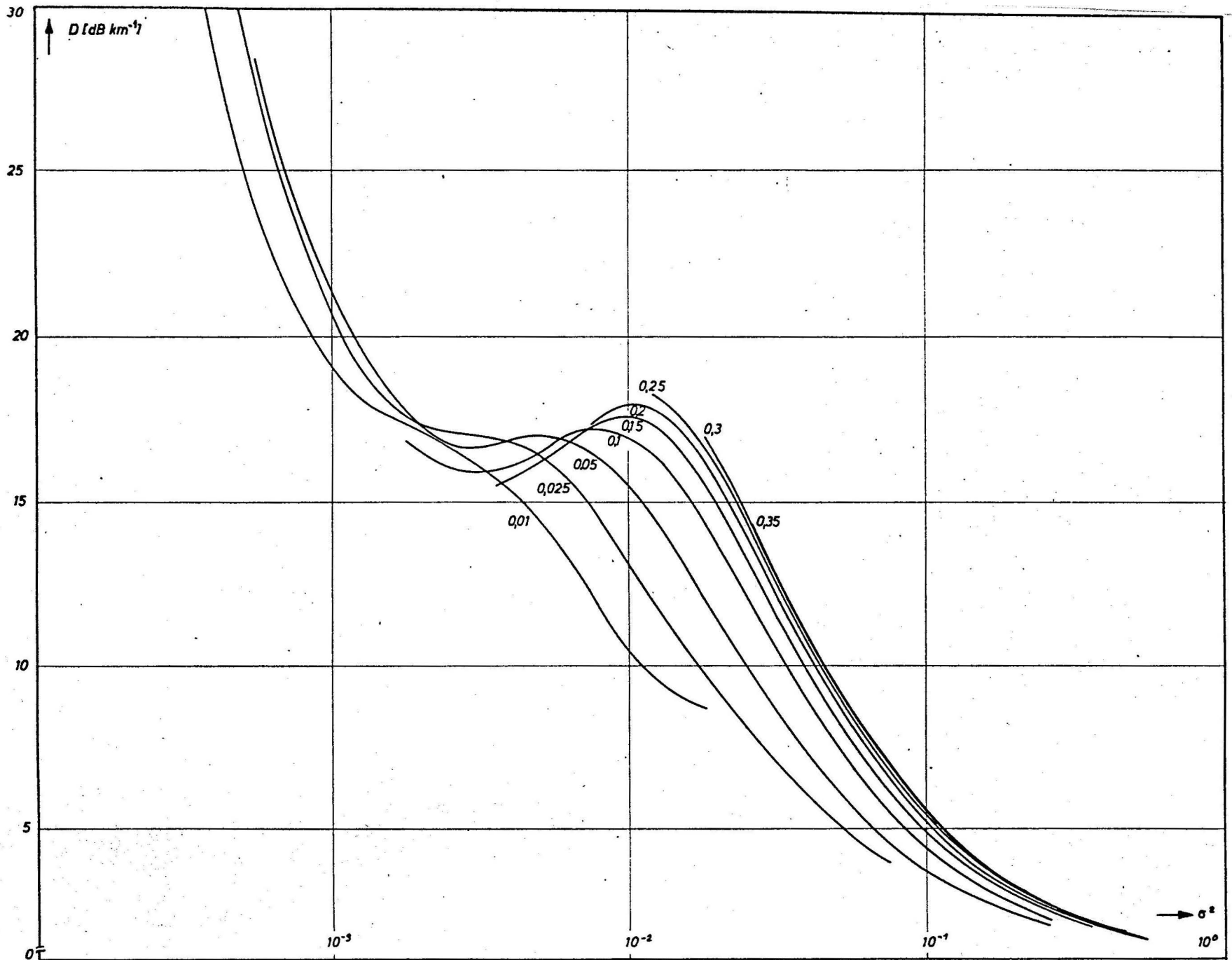
Die Dämpfung als Funktion der Streuung für $\lambda = 3,3 \text{ mm}$ u. $T = 10^\circ\text{C}$. $M = \frac{4}{3} \pi \cdot \int_0^\infty R^3 n_1(R) \cdot Q_T(R, \lambda) dR = 500 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$ Abb. 28



Die Dämpfung als Funktion der Streuung für $\lambda=2\text{mm}$ u. $T=10^\circ\text{C}$. $M = \frac{4}{3}\pi \int_0^\infty R^3 n_1(R) Q_T(R, \lambda) dR = 500\text{g}\cdot\text{m}^{-3}$. Abb. 29

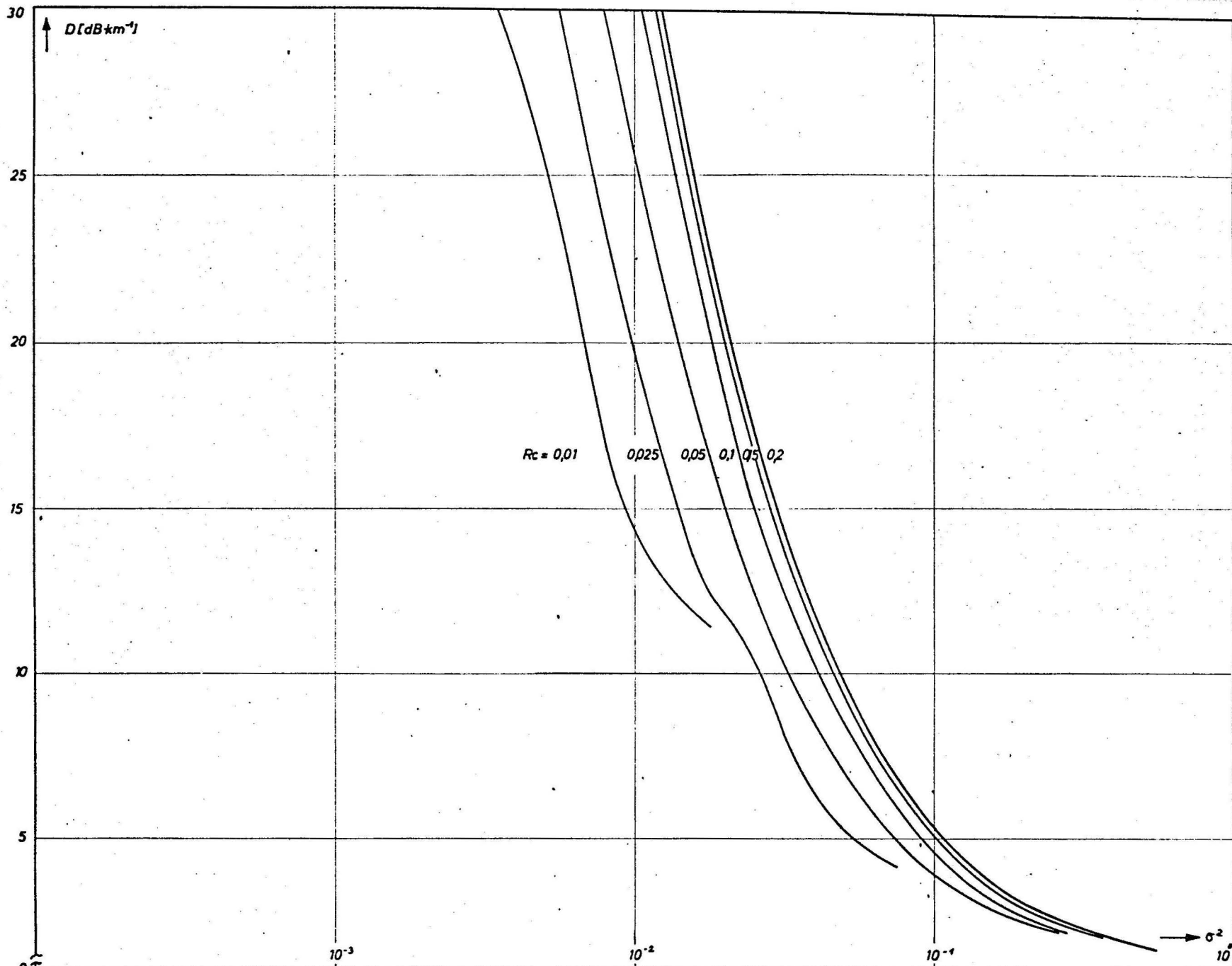


Die Dämpfung als Funktion der Streuung für $\lambda = 5,77 \text{ mm}$, $T = 10^\circ \text{C}$.
 $P = 15,1 \cdot 10^{-3} \int_0^\infty R^2 n_s(R) \cdot v(R) \cdot dR = 12,0703 \text{ mmh}^{-1}$

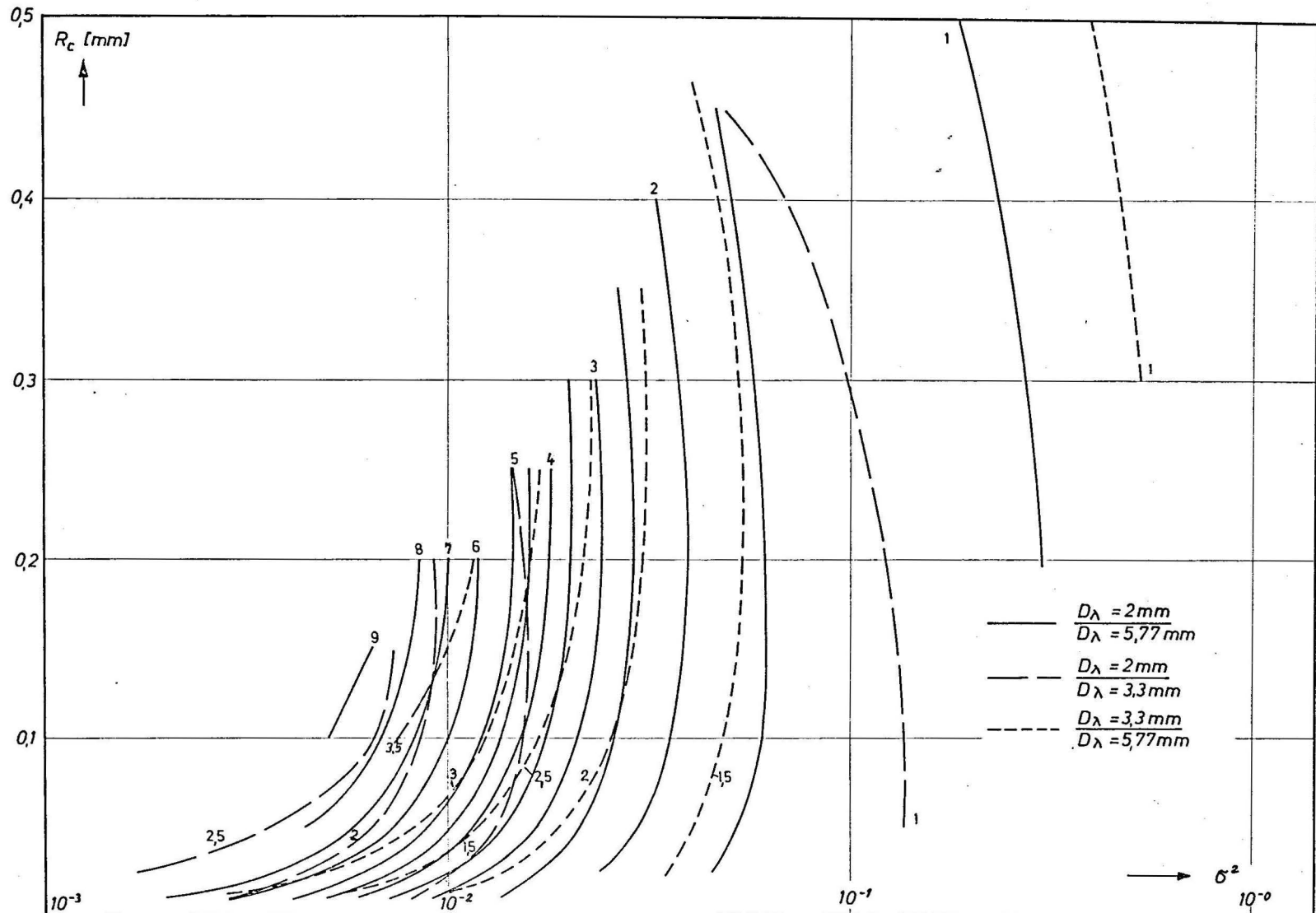


Die Dämpfung als Funktion der Streuung für $\lambda = 3,3 \text{ mm}$, $T = 10^\circ \text{C}$.
 $P = 15,1 \cdot 10^{-3} \int_0^{\infty} R^3 n_1(R) \cdot v(R) \cdot dR = 12,0703 \text{ mm h}^{-1}$.

Abb. 31



Die Dämpfung als Funktion der Streuung für $\lambda = 2 \text{ mm}$, $T = 10^\circ \text{C}$.
 $P = 15,1 \cdot 10^{-3} \int_0^{\infty} R^3 n_1(R) \cdot v(R) \cdot dR = 12,0703 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$



Linien $D_A/D_B = \text{const}$ in der $R_c - \sigma^2$ - Ebenen.

Abb. 33

Heinrich-Hertz-Institut
1 Berlin 10, Einsteinufer 35

