

HEINRICH-HERTZ-INSTITUT FÜR SCHWINGUNGSFORSCHUNG  
BERLIN-CHARLOTTENBURG

# Technischer Bericht Nr. 123

Aufstellung der Dispersionsgleichung für ein  
Zweikomponentenplasma für beliebig orientierte  
statische elektr. und magnet. Felder

von

Dipl. Phys. Peter Nolting

B e r l i n

1 9 7 0

Aufstellung der Dispersionsgleichung für ein Zweikomponenten-  
plasma für beliebig orientierte statische elektr. und magnet. Felder

Zusammenfassung:

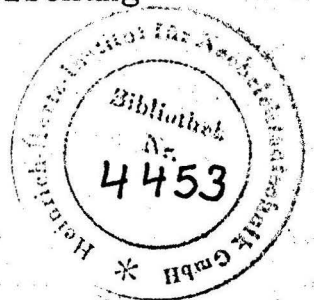
Für ein Plasma aus Elektronen und Defektelektronen in einem unendlich ausgedehnten Kristall wird die Dispersionsgleichung für beliebig orientierte statische elektr. und magnet. Felder aufgestellt. Die Spezialfälle  $\vec{v} \parallel \vec{B}_0$  und  $\vec{v} \perp \vec{B}_0$  werden für transversale und longitudinale Wellen angegeben. Es wird gezeigt, daß die in der Literatur übliche quasistatische Näherung als Spezialfall enthalten ist.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

Der Bearbeiter:

*Peter Nolting*

(Dipl.Phys. Peter Nolting)



Der Abteilungsleiter

*F. W. Gundlach*

(Prof.Dr.-Ing. F.W. Gundlach)

Der Institutsdirektor

*P. Matthieu*

(Prof.Dr.phil. P. Matthieu)

Berlin-Charlottenburg, den 8. Juli 1970

## Einleitung

Die von PINES und SCHRIEFFER [1] vorausgesagte longitudinale Zweistrominstabilität ließ sich experimentell bisher noch nicht verifizieren, weil man keinen Halbleiter fand, für den  $|\vec{v}_d| > v_{th}$  ( $\vec{v}_d$  = Driftgeschwindigkeit der Teilchen,  $v_{th}$  = thermische Geschwindigkeit der Teilchen) gilt. BERNSTEIN [2] und HAZEGAWA [3] zeigen, daß ein transversales magnetisches Feld die Landaudämpfung unterdrücken kann. Es ist nun das Ziel dieser Arbeit, den Einfluß eines konstanten Magnetfeldes unter bel. Winkel zur Bewegungsrichtung der Teilchen zu berechnen.

## Aufstellung der Dispersionsgleichung

Es wird ein unendlich ausgedehnter Kristall betrachtet, in dem sich Elektronen und Defektelektronen frei bewegen können. Der Einfluß des Kristallgitters auf die Elektronen und Defektelektronen wird durch die effektiven Massen  $m_e$  und  $m_h$  beschrieben, die Wechselwirkung der Teilchen mit den Phononen und den Störstellen des Kristalls durch die Stoßfrequenzen  $\nu_e$  und  $\nu_h$ . Die thermische Energie der Teilchen wird in der hydrodynamischen Näherung durch die orts- und zeitunabhängigen thermischen Geschwindigkeiten  $v_{the}$  und  $v_{thh}$  beschrieben. Zur Aufstellung der Dispersionsgleichung kombiniert man die MAXWELL'schen Gleichungen (3,4) mit den Kontinuitätsgleichungen (5,6) und den Bewegungsgleichungen der Teilchen (1,2). Die ersten beiden Terme der Bewegungsgleichung beschreiben die totale Geschwindigkeitsänderung der Teilchen, der dritte Term ist ein Reibungsglied, das die Streuung berücksichtigt. Im vierten Term wird der Druck der Teilchen (proportional zur Temperatur oder zur Diffusionskonstanten  $D$ ) analog zum Druckterm der Hydromechanik behandelt.

$n$  = Elektronendichte

$p$  = Defektelektronendichte

$J$  = Teilchenstromdichte

$E$  = elektr. Feldstärke

$B$  = magnet. Feldstärke

$$(1) \quad \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \cdot \text{grad}) \vec{v}_e + \vec{v}_e \text{div} + \frac{1}{n} \text{grad} (v_{0e}^2 n) = - \frac{e}{m_e} (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B})$$

$$(2) \quad \frac{\partial \vec{v}_h}{\partial t} + (\vec{v}_h \cdot \text{grad}) \vec{v}_h + \vec{v}_h \text{div} + \frac{1}{p} \text{grad} (v_{0h}^2 p) = \frac{e}{m_h} (\vec{E} + \vec{v}_h \times \vec{B})$$

$$(3) \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$(4) \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(5) \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} (n \vec{v}_e) = 0$$

$$(6) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div} (p \vec{v}_h) = 0$$

$$(7) \quad \vec{j} = e (p \vec{v}_h - n \vec{v}_e)$$

$$(8) \quad \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_\sim e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$(9) \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_\sim e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$(10) \quad n = n_0 + n_\sim e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$(11) \quad p = p_0 + p_\sim e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$(12) \quad \vec{v}_e = \vec{v}_{e0} + \vec{v}_{e\sim} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$(13) \quad \vec{v}_h = \vec{v}_{h0} + \vec{v}_{h\sim} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Es wird das Verhalten des Systems gegenüber einer eingekoppelten monochromatischen Welle untersucht (Fouriertransformation:  $(\vec{r}, t) \rightarrow (\vec{k}, \omega)$ ). Um die Gleichungen zu linearisieren, werden die variablen Größen in einen stationären und einen kleinen Wechselanteil der Form  $A_{\sim} \exp(j(\omega t - \vec{k}\vec{r}))$  zerlegt (8 - 13).

Es gelten dann die Operatorgleichungen:

$$(14) \quad \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow j\omega \quad \text{grad} \longrightarrow -j\vec{k}$$

Das Gleichungssystem zerfällt dann in einen stationären Anteil und einen Wechselanteil. Der stationäre Anteil gibt die Driftgeschwindigkeit der Teilchen an, bei vorgegebenen beliebig orientierten elektr. und magnet. Feldern. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei das statische magnetische Feld in z-Richtung (s. Skizze;  $\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$ )

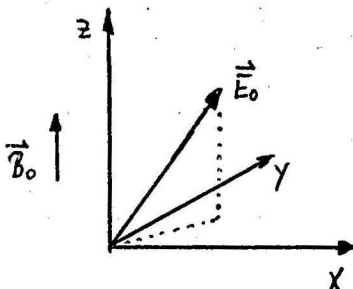
$$(15) \quad \vec{v}_{e0} \cdot v_e = -\frac{e}{m_e} (\vec{E}_0 + \vec{v}_{e0} \times \vec{B}_0)$$

Aus (15) folgt dann mit den Definitionen (16)

$$b = -\frac{e B_0}{m_e v_e} = \frac{\omega_{ce}}{v_e} \quad \text{Verhältnis Zyklotronfrequenz zu Stoßfrequenz}$$

$$(16) \quad \omega_{ce} = -\frac{e B_0}{m_e} \quad \omega_{ch} = \frac{e B_0}{m_h} \quad \text{Zyklotronfrequenzen}$$

$$\mu_e = \frac{|e|}{m_e v_e} \quad \mu_h = \frac{|e|}{m_h v_h} \quad \text{Beweglichkeiten}$$



die Gleichung (17) für den stationären Fall

$$(17) \quad \vec{v}_{e0} = -\mu \cdot \vec{b} \cdot \vec{E}_0$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+b^2} & \frac{b}{1+b^2} & 0 \\ -\frac{b}{1+b^2} & \frac{1}{1+b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für den Wechselanteil erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$(18) \quad (\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_{e0} - j\nu_e) \vec{v}_{en} - \frac{v_{ee}^2}{n_0} \vec{k} n_n - j \frac{e}{m_e} (\vec{E}_n + \vec{v}_{en} \times \vec{B}_0 + \vec{v}_{e0} \times \vec{B}_n) = 0$$

$$(19) \quad (\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_{h0} - j\nu_h) \vec{v}_{hn} - \frac{v_{eh}^2}{\rho_0} \vec{k} \rho_n + j \frac{e}{m_e} (\vec{E}_n + \vec{v}_{hn} \times \vec{B}_0 + \vec{v}_{h0} \times \vec{B}_n) = 0$$

$$(20) \quad -j \frac{1}{\mu_0} (\vec{k} \times \vec{B}_n) = \vec{j}_n + \epsilon_r \epsilon_0 j \omega \vec{E}_n$$

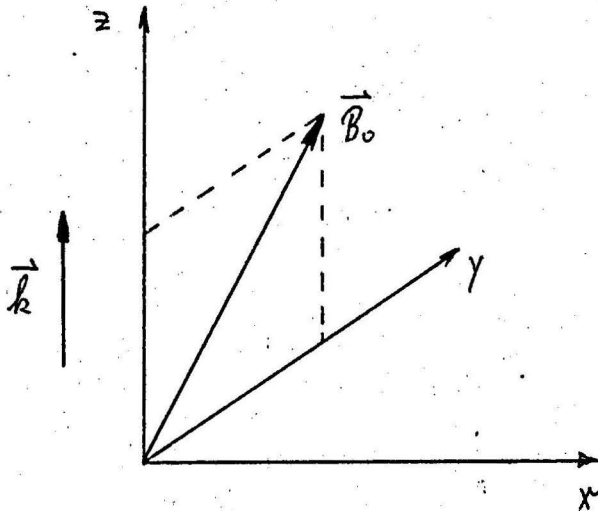
$$(21) \quad \vec{B}_n = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}_n)$$

$$(22) \quad n_n = \frac{n_0 (\vec{k} \cdot \vec{v}_{en})}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_{e0})}$$

$$(23) \quad \rho_n = \frac{\rho_0 (\vec{k} \cdot \vec{v}_{hn})}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_{e0})}$$

$$(24) \quad \vec{j}_n = e \cdot (\rho_n \vec{v}_{h0} + \rho_0 \vec{v}_{hn} - n_n \vec{v}_{e0} - n_0 \vec{v}_{en})$$

Für die Vereinfachung des Gleichungssystems wird folgendes Koordinatensystem eingeführt. Der Ausbreitungsvektor  $\vec{k}$  habe nur eine z-Komponente. Die magnetische Feldstärke  $\vec{B}_0$  liege in der yz-Ebene und habe zur z-Achse den Winkel  $\theta$ . Es wird nur der Fall untersucht, daß  $\vec{k} \parallel \vec{v}_{e0} \parallel \vec{v}_{h0}$  ist.



$$\vec{k} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{e0} = v_{e0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\vec{B}_0 = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Dann gilt für das Kreuzprodukt:

$$(26) \quad \vec{v}_{e0} \times \vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{X} \cdot \vec{v}_{e0} \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ -\cos \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Führt man das dyadische Produkt ein, so kann man folgende Vereinfachung vornehmen:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 a_1 b_1 + c_1 a_2 b_2 + c_1 a_3 b_3 \\ c_2 a_1 b_1 + c_2 a_2 b_2 + c_2 a_3 b_3 \\ c_3 a_1 b_1 + c_3 a_2 b_2 + c_3 a_3 b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 a_1 & c_1 a_2 & c_1 a_3 \\ c_2 a_1 & c_2 a_2 & c_2 a_3 \\ c_3 a_1 & c_3 a_2 & c_3 a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$= \langle \vec{c} \vec{a} \rangle \cdot \vec{b}$$

z.B.

$$(27) \quad \begin{aligned} (\vec{k} \vec{v}_{en}) \vec{k} &= \langle \vec{k} \vec{k} \rangle \cdot \vec{v}_{en} = k^2 \bar{\alpha} \cdot \vec{v}_{en} \\ (\vec{k} \vec{v}_{in}) \vec{v}_{oe} &= \langle \vec{k} \vec{v}_{oe} \rangle \cdot \vec{v}_{in} = k v_{oe} \bar{\alpha} \cdot \vec{v}_{en} \end{aligned} \quad \bar{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es sei  $\bar{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  die Einheitsmatrix. Dann kann man das Gleichungssystem (18-24) mit Hilfe der Relationen (26), (27) umformen, Einsetzen von (22) (23) in (24) ergibt:

$$(28) \quad \begin{aligned} \vec{j}_{\sim} &= e \rho_0 \left\{ \frac{(\vec{k} \vec{v}_{in}) \vec{v}_{uo}}{(\omega - k v_{uo})} + \vec{v}_{in} \right\} - e n_0 \left\{ \frac{(\vec{k} \vec{v}_{en}) \vec{v}_{eo}}{(\omega - k v_{eo})} + \vec{v}_{en} \right\} \\ \vec{j}_{\sim} &= e \rho_0 \left\{ \bar{I} + \frac{k v_{uo}}{(\omega - k v_{uo})} \bar{\alpha} \right\} \vec{v}_{in} - e n_0 \left\{ \bar{I} + \frac{k v_{eo}}{(\omega - k v_{eo})} \bar{\alpha} \right\} \vec{v}_{en} \end{aligned}$$

Aus (20) und (21) ergibt sich andererseits:

$$(29) \quad \begin{aligned} \vec{j}_{\sim} &= -j \frac{\vec{k}}{\omega \mu_0} \times (\vec{k} \times \vec{E}_{\sim}) - \epsilon_r \epsilon_0 j \omega \vec{E}_{\sim} \\ &= -j \frac{1}{\omega \mu_0} \left[ \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{E}_{\sim}) - k^2 \vec{E}_{\sim} \right] - \epsilon_r \epsilon_0 j \omega \vec{E}_{\sim} \\ &= -j \frac{1}{\omega \mu_0} \left[ k^2 \bar{\alpha} + \left( \frac{\omega^2 \epsilon_r}{\epsilon_0} - k^2 \right) \bar{I} \right] \cdot \vec{E}_{\sim} = \\ &= e \rho_0 \left\{ \bar{I} + \frac{k v_{uo}}{(\omega - k v_{uo})} \bar{\alpha} \right\} \vec{v}_{in} - e n_0 \left\{ \bar{I} + \frac{k v_{eo}}{(\omega - k v_{eo})} \bar{\alpha} \right\} \vec{v}_{en} \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen von (28) und (29) erhält man eine Gleichung, die  $\vec{E}_{\sim}$  mit  $\vec{v}_{en}$  und  $\vec{v}_{in}$  verbindet.



(30) Wir definieren  $\omega_{pe}^2 = \frac{e^2 n_0}{m_e \epsilon_0 \epsilon_r}$  und  $\omega_{ph}^2 = \frac{e^2 p_0}{m_h \epsilon_0 \epsilon_r}$  als Plasmafrequenzen der Elektronen bzw. der Löcher. Die entsprechenden

(31) den Zyklotronfrequenzen sind  $\omega_{ce} = -\frac{|e| B_0}{m_e}$  und  $\omega_{ch} = \frac{|e| B_0}{m_h}$

Ferner sei

$$\begin{aligned}
 \Omega_e &\doteq \omega - k v_{e0} - j \nu_e \\
 \Omega_h &\doteq \omega - k v_{h0} - j \nu_h \\
 \mathcal{B}_e &\doteq \omega - k v_{e0} \\
 \mathcal{B}_h &\doteq \omega - k v_{h0}
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

Durch Einsetzen von (21) in Gleichung (18) und (19) erhält man:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_\perp + \vec{v}_{e0} \times \vec{B}_\perp &= \vec{E}_\perp + \frac{1}{\omega} \vec{v}_{e0} \times (\vec{k} \times \vec{E}_\perp) \\
 &= \vec{E}_\perp + \frac{1}{\omega} \{ \vec{k} (\vec{v}_{e0} \cdot \vec{E}_\perp) - \vec{E}_\perp (\vec{v}_{e0} \cdot \vec{k}) \} \\
 &= \frac{1}{\omega} \{ (\omega - v_{e0} k) \vec{I} + k v_{e0} \vec{\alpha} \} \cdot \vec{E}_\perp \\
 &= \frac{\mathcal{B}_e}{\omega} \left\{ \vec{I} + \frac{k v_{e0}}{\mathcal{B}_e} \vec{\alpha} \right\} \vec{E}_\perp \doteq \frac{\mathcal{B}_e}{\omega} \vec{Q}_e \cdot \vec{E}_\perp
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

Die vollständigen Gl. (18) und (19) lauten dann:

$$(34) \quad \left\{ \Omega_e \vec{I} - \frac{v_{e0}^2 k^2}{\mathcal{B}_e} \vec{\alpha} + j \omega_{ce} \vec{X} \right\} \vec{v}_{e\perp} - j \frac{e}{m_e} \frac{\mathcal{B}_e}{\omega} \vec{Q}_e \cdot \vec{E}_\perp = 0$$

$$(35) \quad \left\{ \Omega_h \vec{I} - \frac{v_{h0}^2 k^2}{\mathcal{B}_h} \vec{\alpha} + j \omega_{ch} \vec{X} \right\} \vec{v}_{h\perp} + j \frac{e}{m_e} \frac{\mathcal{B}_h}{\omega} \vec{Q}_h \cdot \vec{E}_\perp = 0$$

Das Gleichungssystem besteht jetzt nur noch aus den drei Gleichungen (34), (35) und (29) mit den drei Variablen

$\vec{E}_n$ ,  $\vec{v}_{en}$  und  $\vec{v}_{hn}$ . Um  $\vec{v}_{en}$  und  $\vec{v}_{hn}$  zu eliminieren muß nun die Inverse Matrix der Matrix  $\vec{A}_e = \Omega_e \vec{I} - \frac{v_e^2 k^2}{\beta_e} \vec{a} + j\omega_{ce} \vec{X}$  bzw.  $\vec{A}_n$  gebildet werden. Es

sei

$$(36) \quad \begin{aligned} a &= \Omega_e \\ b &= \frac{v_e^2 k^2}{\beta_e} \end{aligned}$$

$$(37) \quad \text{Dann ist } \vec{A}_e = \begin{pmatrix} a & j\omega_{ce} \cos \theta & -j\omega_{ce} \sin \theta \\ -j\omega_{ce} \cos \theta & a & - \\ j\omega_{ce} \sin \theta & - & a-b \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{A}_e\| = \text{Det}(\vec{A}_e) = a^2(a-b) - \omega_{ce}^2(a-b \cos^2 \theta)$$

Die inverse Matrix ergibt sich zu:

$$\vec{A}_e^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(\vec{A}_e)} \begin{pmatrix} a(a-b) & -j\omega_{ce} \cos \theta (a-b) & +j\omega_{ce} \sin \theta a \\ j\omega_{ce} \cos \theta (a-b) & a(a-b) - \omega_{ce}^2 \sin^2 \theta & -\omega_{ce}^2 \sin \theta \cos \theta \\ -j\omega_{ce} \sin \theta a & -\omega_{ce}^2 \sin \theta \cos \theta & a^2 - \omega_{ce}^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

Aus (34) und (35) folgen mit (38) die Gleichungen (39):

$$(39) \quad \begin{cases} \vec{v}_{en} = j \frac{e}{m_e} \frac{B_e}{\omega} \bar{A}_e^{-1} \bar{Q}_e \cdot \vec{E}_n \\ \vec{v}_{hn} = -j \frac{e}{m_h} \frac{B_h}{\omega} \bar{A}_h^{-1} \bar{Q}_h \cdot \vec{E}_n \end{cases}$$

Durch Einsetzen von (39) in (29) ergibt sich die Endgleichung (40)

$$(40) \quad \left\{ \omega_{ph}^2 B_h \bar{Q}_h \cdot \bar{A}_h^{-1} \bar{Q}_h + \omega_{pe}^2 B_e \bar{Q}_e \cdot \bar{A}_e^{-1} \bar{Q}_e - \left[ \frac{\hbar^2 c^2}{\epsilon_r} \bar{\alpha} + (\omega^2 - \frac{\hbar^2 c^2}{\epsilon_r}) \bar{I} \right] \right\} \cdot \vec{E}_n = 0$$

Dieses homogene Gleichungssystem hat dann und nur dann von Null verschiedene Lösungen, wenn die Determinante des Gleichungssystems verschwindet. Mit den Abkürzungen (41) ergibt sich die Determinante (42) nach Zwischenrechnung.

$$N_e = (\omega - k v_{e0} - j v_e)(\omega - k v_{e0}) - v_{0e}^2 k^2$$

$$\Omega_e = \omega - k v_{e0} - j v_e$$

$$(41) \quad B_e = \omega - k v_{e0}$$

$$P_2 = \frac{\omega_{pe}^2}{N_e (\Omega_e^2 - \omega_{e0}^2) - v_{0e}^2 k^2 \omega_{e0}^2 \sin^2 \theta}$$

$$c_1^2 = \frac{c^2}{\epsilon_r}$$

Dispersionsgleichung (allgemeiner Fall)

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \sum_a \Omega_a B_a N_a P_a - \omega^2 + k^2 c_1^2 \\
 \cos \theta \cdot \sum_a \omega_{ca} B_a N_a P_a \\
 - \sin \theta \cdot \sum_a \omega_{ca} \Omega_a B_a P_a \\
 \\
 \cos \theta \cdot \sum_a \omega_{ca} B_a N_a P_a \\
 \\
 - \sin \theta \cdot \sum_a \omega_{ca} \Omega_a B_a P_a
 \end{array} \right\}
 \begin{array}{l}
 \cos \theta \cdot \sum_a \omega_{ca} B_a N_a P_a \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \sum_a (\Omega_a B_a N_a P_a - \omega_{ca}^2 B_a^2 P_a \sin^2 \theta) - \omega^2 + k^2 c_1^2 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 - \sin \theta \cos \theta \cdot \sum_a \omega_{ca}^2 B_a P_a \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 - \sin \theta \cos \theta \cdot \sum_a \omega_{ca}^2 B_a P_a \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \sum_a (\Omega_a^2 - \omega_{ca}^2 \cos^2 \theta) P_a - 1
 \end{array}
 \right| = 0
 \end{array}$$

Diese Dispersionsgleichung kann nicht in geschlossener Form ausgewertet werden. Eine numerische Auswertung mit Hilfe eines Digitalrechners ist bereits in Angriff genommen worden.

Es soll nun gezeigt werden, daß diese Gleichungen, die bekannten Gleichungen der longitudinalen Zweistrominstabilität, die Helicon- und van Alven-Wellen sowie das Verhalten eines Zweikomponentenplasmas in der Voigt-Anordnung als Spezialfälle enthält.

1.  $\theta = 0$

Durch das Verschwinden der gemischten Glieder  $\sin\theta \cdot \cos\theta$  zerfällt die 3-Determinante in eine 2-Determinante für die x-, y-Komponente der elektr. Feldstärke und eine "1-Determinante" für die z-Komponente.

1a) Longitudinale Zweistrominstabilität

Für den longitudinalen Fall erhält man die Gleichung:

$$\sum_a P_a (\Omega_a^2 - \omega_{ca}^2) - 1 = 0$$

$$\frac{\omega_{pe}^2}{N_e} + \frac{\omega_{ph}^2}{N_h} - 1 = 0$$

$$(43) \quad \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - v_{e0} k - j\nu_e)(\omega - v_{ec} k) - v_{\theta e}^2 k^2} + \frac{\omega_{ph}^2}{(\omega - v_{h0} k - j\nu_h)(\omega - v_{a0} k) - v_{\theta h}^2 k^2} = 1$$

Gleichung (43) ist die bekannte Gleichung der longitudinalen Zweistrominstabilität nach PINES und SCHRIEFER. Man sieht, daß das Magnetfeld  $\vec{B}_0$  keinen Einfluß hat.

1b) Transversale Wellen: Helicon- und van Alven-Wellen

Man erhält die folgende Determinante:

$$\left\| \begin{array}{cc} \sum_a \Omega_a N_a B_a P_a - (\omega^2 - c_1^2 k^2) & -j \sum_a \omega_{ca} B_a P_a N_a \\ j \sum_a \omega_{ca} B_a P_a N_a & \sum_a P_a \Omega_a N_a B_a - (\omega^2 - c_1^2 k^2) \end{array} \right\| = 0$$

$$\sum_a P_a N_a B_a (\Omega_a \pm \omega_{ca}) - (\omega^2 - c_1^2 k^2) = 0$$

$$\sum_a \frac{\omega_{pa}^2 P_a (\Omega_a \pm \omega_{ca})}{(\Omega_a^2 - \omega_{ca}^2)} - (\omega^2 - c_1^2 k^2) = 0$$

$$(45) \quad c_1^2 k^2 = \omega^2 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2 (\omega - k v_{ao})}{(\omega - k v_{ao} - j \nu_a \mp \omega_{ca})}$$

Gleichung (45) ist die bekannte Gleichung für die Helicon- und van-Alven-Welle eines driftenden Zweikomponentenplasmas. [4], [5] Durch Näherung für eine Teilchenart und  $\omega_{ce} \gg \nu, \omega, q v_{ao}$  erhält man die Dispersionsgleichung der Heliconwelle.

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} \left( 1 \pm \frac{\omega_{pe}^2}{\omega \omega_{ce}} \left( 1 + \frac{\omega}{\pm \omega_{ce}} - j \frac{\nu_e}{\pm \omega_{ce}} \right) \right)$$

2.)  $\theta = 90^\circ$  VOIGT-Konfiguration

Die Determinante zerfällt wiederum in ein Produkt zweier Unterdeterminanten.

2a) Ordentliche Welle, rein transversal,  $\vec{E}_\perp \parallel \vec{B}_0$ ,  $E_{y\perp} \neq 0$

Man erhält die Gleichung:

$$\sum_a P_a (\Omega_a N_a B_a - \omega_{ca}^2 B_a^2) - (\omega^2 - c_1^2 k^2) = 0$$

$$\frac{\omega_{pe}^2 B_e}{\Omega_e} + \frac{\omega_{ph}^2 B_h}{\Omega_h} - (\omega^2 - c_1^2 k^2) = 0$$

$$(47) \frac{\omega_{pe}^2 (\omega - v_{te} k)}{(\omega - v_{te} k - j\nu_e)} + \frac{\omega_{ph}^2 (\omega - v_{th} k)}{(\omega - v_{th} k - j\nu_h)} - (\omega^2 - c_s^2 k^2) = 0$$

Die Dispersionsgleichung (47) ist unabhängig vom Magnetfeld und der thermischen Geschwindigkeit  $v_\theta$ .

2b) Außerordentliche Welle:  $\vec{B}_\perp \parallel \vec{B}_0$ ,  $\vec{E}_\perp \perp \vec{B}_0$ ,  $\vec{E}_\perp$  hat eine longitudinale und eine transversale Komponente ( $E_{x\perp} \neq 0, E_{z\perp} \neq 0$ )

Es ergibt sich folgende 2-Determinante:

$$(48) \begin{vmatrix} \sum_a \Omega_a N_a B_a P_a - (\omega^2 - c_s^2 k^2) & -j \sum_a \omega_{ca} B_a P_a \Omega_a \omega \\ j \sum_a \omega_{ca} B_a P_a \Omega_a \omega & \sum_a P_a \Omega_a^2 \omega^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Für  $\nu_{\theta e} = \nu_{\theta h} = 0$  vereinfacht sich (48) zu:

$$(49) \left\{ \sum_a \frac{\Omega_a B_a \omega_{pe}^2}{\Omega_a^2 - \omega_{ca}^2} - (\omega - c_s^2 k^2) \right\} \left\{ \sum_a \frac{\Omega_a \omega_{pe}^2}{B_a (\Omega_a^2 - \omega_{ca}^2)} - 1 \right\} = \left\{ \sum_a \frac{\omega_{ca} \omega_{pe}^2}{\Omega_a^2 - \omega_{ca}^2} \right\}^2$$

Für unkompenziertes Plasma (nur Elektronen) erhält man mit der Voraussetzung  $c_s^2 \gg v_{te}^2$  und der Abkürzung

$\Omega_e - \omega_{ce}^2 = S_e$  die folgende Gleichung (50)

$$(50) \left\{ \frac{\Omega_e \omega_{pe}^2}{S_e} - (\omega^2 - c_s^2 k^2) \right\} \left\{ \frac{\Omega_e \omega_{pe}^2}{\omega S_e} - 1 \right\} - \frac{\omega_{ce}^2 \omega_{pe}^4}{S_e^2} = 0$$

Sie ist identisch mit der Gleichung (51) aus der Arbeit von H. PÖTZL [6].

$$(51) k^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{j\omega\sigma [j\omega\epsilon (1+j\omega\tau) + \sigma]}{j\omega\epsilon [(1+j\omega\tau)^2 + (\mu\beta)^2 + \sigma(1+j\omega\tau)]}$$

wobei folgende Relationen benutzt wurden:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{e}{m} \tau \\ \sigma &= e n \mu = \omega_{pe}^2 \tau \varepsilon \\ \mu B &= \omega_{ce} \tau\end{aligned}$$

Eine Diskussion dieser Gleichungen findet man bei [5] und [6].

### Näherung der Dispersionsgleichung für kleine Winkel $\theta$

Man kann für kleine Winkel  $\theta$  eine Näherung der Dispersionsgleichung angeben (54). Die trigonometrischen Funktionen in den einzelnen Koeffizienten der Determinante werden dabei in eine Reihe entwickelt und Glieder von 2. Ordnung vernachlässigt. Dann gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \sin \theta \rightarrow \theta \\ \cos \theta \rightarrow 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sin^2 \theta \rightarrow 0 \\ \cos^2 \theta \rightarrow 1 \\ \sin \theta \cos \theta \rightarrow \theta \end{array}$$

$$P_a = \frac{\omega_{pa}^2}{N_a (\Omega_a^2 - \omega_{ca}^2)} = \frac{\omega_{pa}^2}{N_a S_a}$$

Die Dispersionsgleichung hat die Gestalt

$$D_{\text{Helicon}}(\omega, \vec{k}) \cdot D_{\text{Zweistrom}}(\omega, \vec{k}) = \theta^2 \cdot \text{Koppelterm}$$

wobei  $D_{\text{Helicon}}$  die linke Seite der Gl. (44) und  $D_{\text{Zweistrom}}$  die linke Seite der Gleichung (43) ist. Ein analoges Ergebnis erhält man, wenn man die Dispersionsgleichung nach  $\psi = 90^\circ - \theta$  entwickelt. Ein weiterer Spezialfall, der eine leichte Vereinfachung zulässt, ist der Winkel  $\theta = 45^\circ$ , da dann  $\sin \theta = \cos \theta$  ist.

Eine eingehende Diskussion der Winkelabhängigkeit ist aber nur dann möglich, wenn man die Dispersionsgleichung auf einem Digitalrechner numerisch auswertet. Erste Schritte in dieser Richtung sind bereits unternommen worden.



Dispersionsgleichung für kleine Winkel  $\theta$ .

$$\sum_a \frac{\omega_{pa}^2 \Omega_a B_a}{S_a} - \omega^2 + k^2 c_s^2$$

$$\sum_a \frac{\omega_{ca} \omega_{pa}^2 B_a}{S_a}$$

$$- \theta \cdot \sum_a \frac{\omega_{ca} \omega_{pa}^2 \Omega_a B_a}{N_a S_a}$$

$$\sum_a \frac{\omega_{ca} \omega_{pa}^2 B_a}{S_a}$$

$$\sum_a \frac{\omega_{pa}^2 \Omega_a B_a}{S_a} - \omega^2 + k^2 c_s^2$$

$$- \theta \cdot \sum_a \frac{\omega_{ca} \omega_{pa}^2 B_a}{N_a S_a}$$

= 0

$$- \theta \cdot \sum_a \frac{\omega_{ca} \omega_{pa}^2 \Omega_a B_a}{N_a S_a}$$

$$- \theta \sum_a \frac{\omega_{ca} \omega_{pa}^2 B_a}{N_a S_a}$$

$$\sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{N_a} - 1$$

Quasistatische Näherung

In der Literatur [7], [5], [3] ist es üblich, die MAXWELL'schen Gleichungen dadurch zu vereinfachen, daß man  $\text{rot } \vec{E}_r = 0$  setzt. Dieser Schritt ist unter der Bezeichnung "Quasistatische Näherung" oder "Langsame Wellen-Näherung" bekannt. Das Magnetische Wechselfeld  $\vec{B}_r$  ist dann nach Gleichung (21) gleich Null und aus  $\vec{k} \times \vec{E}_r = 0$  folgt, daß  $\vec{k} \parallel \vec{E}_r$  ist.  $\vec{E}_r$  hat dann nur noch eine z-Komponente und die Determinante (42) reduziert sich auf das (3.3) Element. Man erhält dann folgende Gleichung:

$$(58) \quad \sum_a \frac{\omega_{pa}^2 (\Omega_a^2 - \omega_{ca}^2 \cos^2 \theta)}{(\Omega_a^2 - \omega_{ca}^2)(\Omega_a \beta_a - v_{\theta a}^2 k^2) - \omega_{ca}^2 v_{\theta a}^2 k^2 \sin^2 \theta} = 1$$

Die Gleichung (58) entspricht der allgemeinen Dispersionsgleichung (42). Sie ist identisch mit der von BERS angegebenen Gl. 17 in seinem Artikel [7]

$$\sum_a \frac{\omega_{pa}^2 \frac{\Omega_a^2 - \omega_{ca}^2 \cos^2 \theta}{\Omega_a^2 - \omega_{ca}^2}}{\Omega_a \beta_a - v_{\theta a}^2 k^2 \frac{\Omega_a^2 - \omega_{ca}^2 \cos^2 \theta}{\Omega_a^2 - \omega_{ca}^2}} = 1$$

$$\sum_a \frac{\omega_{pa}^2 G_a^2}{\Omega_a \beta_a - v_{\theta a}^2 k^2 G_a^2} = 1$$

$$G_a^2 = \frac{-v_a^2 \left\{ 1 - \frac{\omega - k v_{\theta 0}}{j v_a} \right\} - \omega_{ca}^2 \cos^2 \theta}{-v_a^2 \left\{ 1 - \frac{\omega - k v_{\theta 0}}{j v_a} \right\} - \omega_{ca}^2}$$

$$= \frac{1 + b_a^2 F_a^2 \cos^2 \theta}{1 + b_a^2 F_a^2}$$

$$F_a^2 = \left\{ 1 - \frac{\omega - k v_{\theta 0}}{j v_a} \right\}^{-2}$$

$$b_a = \frac{\omega_{ca}}{v_a}$$

Für  $\theta = 90^\circ$  ergibt sich die Gleichung von HAZEGAWA [3], [5] . .

$$(59) \quad \sum_a \frac{\omega_{pa}^2 \Omega_a}{(\omega_{ca}^2 - \Omega_a^2) \beta_a + v_{0a}^2 k^2 \Omega_a} + 1 = 0$$

Die Gleichung (59) ist ein Spezialfall der außerordentlichen Welle in der WOIGT-Konfiguration (48), bei der nur die longitudinale Komponente ungleich Null ist. ( $E_{\perp} = 0, E_{\parallel} \neq 0$ )

Ich danke Herrn Prof.Dr.-Ing. H. J u n g f e r und Herrn Prof.Dr.-Ing. F.W. G u n d l a c h für die Anregung zu dieser Arbeit und für fruchtbare Diskussionen.

### Literatur

- [1] Pines, D. and R. Schrieffer Phys. Rev. 124, 1387 (1961)
- [2] Bernstein, I.P. Phys. Rev. 109, 10 (1958)
- [3] Hazegawa, A.J. J. Phys. Soc. Japan 20, 1072 (1965)
- [4] H. Pötzl Moga 68, S. 600
- [5] M.C. Steele and B. Vural Wave interactions in solid state Plasmas.(1969)Mc Graw-Hill
- [6] H. Pötzl Moga 68, S. 603
- [7] A. Bers Two-Stream electrostatic Plasma instabilities in a solid QPR No 91, S. 169-173

