

HEINRICH·HERTZ·INSTITUT FÜR SCHWINGUNGSFORSCHUNG  
BERLIN·CHARLOTTENBURG

# Technischer Bericht Nr. 152

Beschreibung zeitvariabler Systeme  
zur Ermittlung der Stabilitätsgrenze  
bei akustischer Rückkopplung

von

Dipl.-Ing. Friedrich Peško

B e r l i n

1 9 7 2

Beschreibung zeitvariabler Systeme  
zur Ermittlung der Stabilitätsgrenze  
bei akustischer Rückkopplung

Zusammenfassung:

Im Hinblick auf die Untersuchung von rückgekoppelten Systemen mit linearen, zeitvariablen Gliedern wird eine Beschreibung des Übertragungsverhaltens linearer, zeitvariabler Systeme gegeben. Als Sonderfall werden periodisch zeitvariable Systeme dargestellt.

Eine Möglichkeit zur Phasenmodulation mit Hilfe von  $90^\circ$ -Filtern wird beschrieben.

HEINRICH-HERTZ-INSTITUT

Der Bearbeiter

*F. Peško*

(Dipl.-Ing. F. Peško)



Der Abteilungsleiter

*L. Cremer*

(Prof. Dr.-Ing. L. Cremer)

Der Institutsdirektor

*F. W. Gundlach*

(Prof. Dr.-Ing. F. W. Gundlach)

Berlin-Charlottenburg, den 15. Mai 1972

HEINRICH-HERTZ-INSTITUT FÜR SCHWINGUNGSFORSCHUNG  
BERLIN-CHARLOTTENBURG

Technischer Bericht Nr. 152

Beschreibung zeitvariabler Systeme  
zur Ermittlung der Stabilitätsgrenze  
bei akustischer Rückkopplung

von

Dipl.-Ing. Friedrich Peško

Berlin 1972

# Systematische Untersuchungen zur akustischen Rückkopplung

---

## Einleitung

Bei allen elektroakustischen Übertragungsanlagen, bei denen sich Mikrofon und Lautsprecher im gleichen Raum befinden, wird die mögliche Verstärkung durch die bekannte Erscheinung der akustischen Rückkopplung beschränkt.

Da diese Beschränkung nachteilig ist, wurde verschiedentlich versucht, die Rückkopplung zu erschweren.

M.R. SCHROEDER führt eine konstante Frequenzverschiebung zwischen Mikrofon und Lautsprecher durch (JASA 36, p. 1718).

BROADHURST (Dissertation Cape Town 1970) versuchte eine Phasenmodulation im Rückkopplungszweig.

Im Institut für Technische Akustik der TU Berlin wurde von G. ROLLE die periodische Umschaltung zwischen zwei Mikrofonen im Rahmen einer Studienarbeit erprobt.

Alle bisher beschrifteten Wege brachten keinen größeren Zuwachs des Verstärkungsmaßes als bestenfalls 10 dB.

Im Rahmen dieser Arbeit soll versucht werden, diese offenbar vorhandene Stabilitätsgrenze zu ermitteln, und an Hand eines in allen Einzelheiten bekannten Schallfeldes zu überprüfen.

Beschreibung zeitvariabler, linearer Systeme

Ein Phasenmodulator kann als Phasenschieber aufgefaßt werden, der die Phase zu jedem Zeitpunkt um einen anderen Betrag schiebt, d.h. es handelt sich um ein zeitvariantes System.

Die Gewichtsfunktion (= Stoßantwort) eines solchen Systems hängt also vom Stoßzeitpunkt ab

$$g(t, \tau) = y(t) \text{ für } x(t) = \delta(t - \tau) \quad (1)$$

und die Ausgangsfunktion ergibt sich nicht mehr aus der Faltung von Eingangs- und Gewichtsfunktion, sondern nimmt die allgemeine Form

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, \tau) x(\tau) d\tau \quad (2)$$

an, wobei

$x(t)$  = Eingangsfunktion

$y(t)$  = Ausgangsfunktion

ist. Bei kausalen Systemen ist die obere Integrationsgrenze  $t$ . Die Übertragungsfunktion  $G(j\omega)$  zeitinvarianter Systeme ergibt sich als Fouriertransformierte der Gewichtsfunktion und läßt sich auch als Antwort des Systems auf eine Erregung mit

$$x(t) = e^{j\omega t}$$

interpretieren:

$$G(j\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{y(t)}{x(t)} \text{ für } x(t) = e^{j\omega t} .$$

Analog läßt sich eine zeitabhängige Übertragungsfunktion definieren:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, \tau) \cdot x(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, \tau) \cdot e^{-j\omega(t - \tau)} d\tau d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \cdot G(t, j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

mit

$$G(t, j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, \tau) \cdot e^{-j\omega(t - \tau)} d\tau,$$

$$G(t, j\omega) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t, \tau) \cdot e^{j\omega\tau} d\tau}{e^{j\omega t}} = \frac{y(t)}{x(t)} \text{ für } x(t) = e^{j\omega t} \quad (3)$$

so daß gilt

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1} \{X(j\omega) \cdot G(t, j\omega)\}. \quad (4)$$

Aus (4) folgt aber, daß das Ausgangsspektrum nicht mehr gleich dem Produkt aus Eingangsspektrum und Übertragungsfunktion ist.

Es gilt vielmehr:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega') \cdot G(t, j\omega') \cdot e^{j\omega' t} d\omega',$$

daraus folgt durch eine Fouriertransformation

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega') \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, j\omega') \cdot e^{j\omega' t} e^{-j\omega t} dt d\omega'$$

mit

$$S(j\omega, j\omega') = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \left\{ y(t) \left| \begin{array}{l} \\ x(t) = e^{j\omega' t} \end{array} \right. \right\}. \quad (5)$$

Die Systemfunktion (5) stellt ein Analogon zur Gewichtsfunktion (1) im Frequenzbereich dar

$$g(t, \tau) = y(t) \left| \begin{array}{l} \\ x(t) = \delta(t - \tau) \end{array} \right. \quad (6)$$

$$S(j\omega, j\omega') = Y(j\omega) \left| \begin{array}{l} \\ X(j\omega) = \delta(\omega - \omega') \end{array} \right. .$$

Somit ergibt sich das Ausgangsspektrum aus einer Stoßsynthese analog(2) zu

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega') \cdot S(j\omega, j\omega') d\omega' \quad (7)$$

Ist die Übertragungsfunktion (3) periodisch mit der Grundfrequenz  $\omega_s$ , so nimmt die Systemfunktion (6) die Form

$$S(j\omega, j\omega') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \delta(\omega - \omega' - n\omega_s) \quad (8)$$

an, und das Ausgangsspektrum ergibt sich zu

$$Y(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \cdot X(\omega - n\omega_s) . \quad (9)$$

Aus (9) wird deutlich, daß ein zeitveränderliches System eine Frequenzvervielfachung zur Folge hat.

Die bisherigen Aussagen sollen am überschaubaren Beispiel des Amplitudenmodulators gezeigt werden:

Die Übertragungsfunktion ist nach (3)

$$G(t, j\omega) = A(t)$$

und sei bei cos-förmiger Modulation

$$A(t) = A_0 (1 + m \cos \omega_m t) .$$

Damit wird die Systemfunktion (5)

$$S(j\omega, j\omega') = \sum_{n=-1}^1 C_n \delta(\omega - \omega' - n\omega_m)$$

mit

$$C_{-1} = C_1 = \frac{k}{2} \cdot A_0 \text{ und } C_0 = A_0$$

und das Ausgangsspektrum nimmt für beliebige Erregung nach (7) die Form

$$Y(j\omega) = \sum_{n=-1}^1 C_n \cdot X(\omega - n\omega_m)$$

an.

Ist  $x(t) = \cos \omega_1 t$ ,

$$X(j\omega) = \pi [\delta(\omega + \omega_1) + \delta(\omega - \omega_1)] ,$$

so wird

$$Y(j\omega) = \sum_{n=-1}^1 C_n \cdot \pi \left[ \delta(\omega + \omega_1 - n \omega_m) + \delta(\omega - \omega_1 - n \omega_m) \right] .$$

Die zugehörige Zeitfunktion ist

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{k}{2} \cdot A_0 \cos (\omega_1 + \omega_m)t + \\ &\quad \frac{k}{2} \cdot A_0 \cos (\omega_1 - \omega_m)t + \\ &\quad A_0 \cos \omega_1 t \\ &= A_0 \cos \omega_1 t + k A_0 \cos \omega_1 t \cos \omega_m t \\ &= \cos \omega_1 t \cdot A_0 (1 + k \cos \omega_m t) . \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$



### Beschreibung des Phasenschiebers

Die Gewichtsfunktion eines linearen Filters mit der Übertragungsfunktion

$$G(j\omega) = \begin{cases} A_0 e^{-j\varphi_0} & \omega > 0 \\ \text{für} \\ A_0 e^{-\varphi_0} & \omega > 0 \end{cases}$$
$$= A_0 \cdot e^{j \operatorname{sign} \omega \cdot \varphi_0}$$

ist (s.a. PAPOULIS, The Fourier Integral and its applications, Mc Graw Hill 1962, p. 163)

$$g(t) = A_0 \cos \varphi_0 \delta(t) + A_0 \cdot \frac{1}{\pi t} \sin \varphi_0 ,$$

so daß die Ausgangsfunktion bei beliebiger Erregung

$$y(t) = A_0 \cos \varphi_0 x(t) - A_0 \sin \varphi_0 F_{\text{Hi}} \{x(t)\}$$

wird, wobei

$$F_{\text{Hi}} \{x(t)\} = - \frac{1}{\pi t} * x(t)$$
$$= - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau) d\tau}{t - \tau}$$

die Hilbert-Transformierte der Eingangsfunktion ist.

Es läßt sich leicht überblicken, daß für

$$x(t) = \cos \omega_1 t$$

$$y(t) = \cos (\omega_1 t - \varphi_0)$$

und für

$$x(t) = \sin \omega_1 t$$

$$y(t) = \sin (\omega_1 t - \varphi_0)$$

ist.

Das lineare Filter stellt somit einen idealen Phasenschieber dar.

Ist nun  $\varphi = \varphi(t)$ , so wird aus dem Phasenschieber ein Phasenmodulator mit der Gewichtsfunktion

$$g(t, \tau) = A_0 \cos(\varphi(t)) \delta(t - \tau) + \frac{A_0}{\pi} \sin(\varphi(t)) \frac{1}{t - \tau}$$

und der zeitabhängigen Übertragungsfunktion

$$G(t, j\omega) = A_0 \cdot e^{j \operatorname{sign} \omega \cdot \varphi(t)}$$

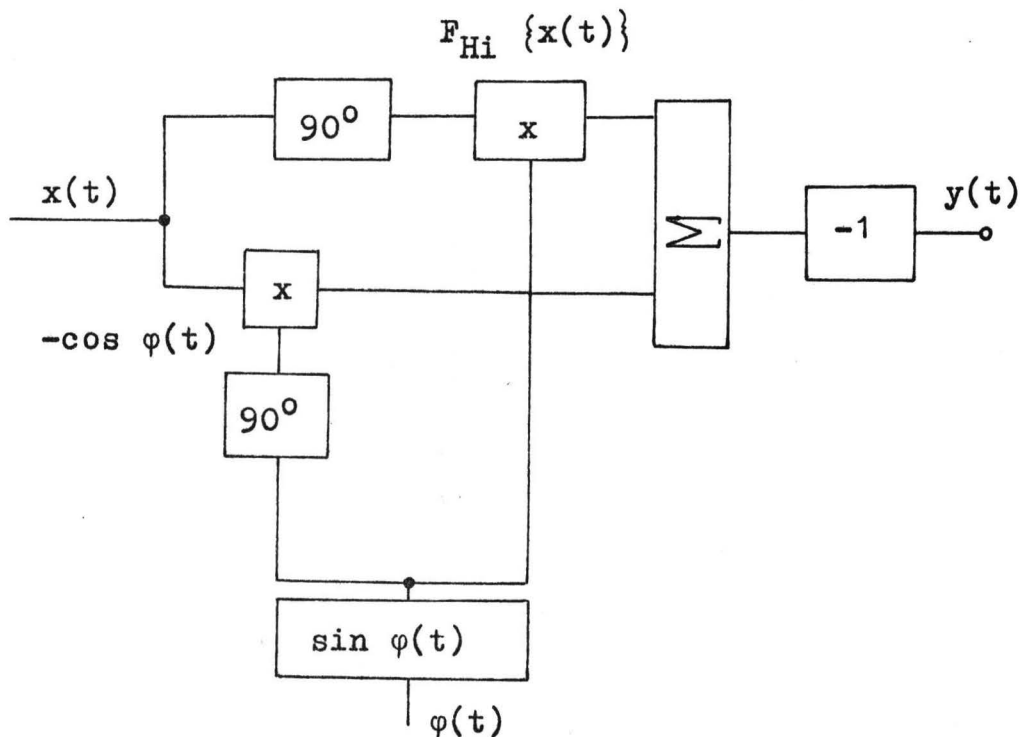
In diesem Spezialfall hängt die Gewichtsfunktion wie bei einem zeitinvarianten System nicht vom Stoßzeitpunkt, sondern von der seit dem Stoßzeitpunkt verstrichenen Zeit  $t - \tau$  ab.

Aus dieser Darstellung ergibt sich eine einfache Realisationsmöglichkeit für einen Phasenmodulator, wenn man berücksichtigt, daß

$$F_{Hi} \{ \cos \omega t \} = - \sin \omega t = \cos(\omega t + \pi/2)$$

$$F_{Hi} \{ \sin \omega t \} = \cos \omega t = \sin(\omega t + \pi/2)$$

ist.



Die beiden "90°-Filter" sind für den interessierenden Hörfrequenzbereich realisierbar und wurden aus Mitteln der DFG beschafft.

Für  $\varphi(t) = k \cdot \sin \omega_s t$

$k$  = Modulationsindex

$\omega_s$  = Modulationsfrequenz

ergibt sich die in (8) definierte Übertragungsfunktion mit Hilfe der erzeugenden Funktion für die Besselfunktionen erster Art (ABRAMOWITZ, Dover Publications, New York, p. 361)

$$e^{\frac{1}{2} z(t - 1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) \cdot t^n$$

hier also

$$\begin{aligned} e^{jk \operatorname{sign} \omega \cdot \sin \omega_s t} &= \\ &= e^{k/2 \operatorname{sign} \omega} (e^{j\omega_s t} - e^{-j\omega_s t}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k) (\operatorname{sign} \omega)^n \cdot e^{jn \omega_s t} \end{aligned}$$

zu

$$S(j\omega, j\omega') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k) (\operatorname{sign} \omega)^n \cdot \delta(\omega - \omega' - n \omega_s),$$

und das Ausgangsspektrum bei beliebiger Erregung hat die Form

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega') \cdot S(j\omega, j\omega') d\omega' \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k) (\operatorname{sign} \omega)^n \cdot X(j\omega - jn \omega_s). \end{aligned}$$

Es sei

$$x(t) = \cos \omega_1 t,$$

$$X(j\omega) = \pi [\delta(\omega + \omega_1) + \delta(\omega - \omega_1)]$$

dann ist nach (9)

$$Y(j\omega) = \pi \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(k) (-1)^n \cdot \delta(\omega - \omega_1 - n \omega_s) \\ + \pi \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(k) \cdot \delta(\omega + \omega_1 - n \omega_s)$$

und die zugehörige Zeitfunktion

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(k) \cdot (-1)^n \cdot e^{+j\omega_1 t} \cdot e^{jn\omega_s t} + \\ + \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(k) \cdot e^{-j\omega_1 t} \cdot e^{jn\omega_s t} = \\ = e^{-j\omega_1 t} \cdot e^{\frac{k}{2}} (e^{j\omega_s t} - e^{-j\omega_1 t}) + \\ + e^{+j\omega_1 t} \cdot e^{\frac{k}{2}} (-e^{j\omega_s t} + e^{-j\omega_s t}) = \\ = e^{j\omega_1 t} \cdot e^{-jk \sin \omega_s t} + e^{-j\omega_1 t} \cdot e^{+jk \sin \omega_s t} \\ = \cos(\omega_1 t - k \sin \omega_s t) \quad \text{q.e.d.}$$

Es sei noch erwähnt, daß auch Abtastsysteme auf diese Weise behandelt werden können, und zwar stellt die Abtastfunktion die Übertragungsfunktion  $G(t, j\omega)$  dar, was man sich am einfachsten am Beispiel eines periodisch getasteten Sinus klar machen kann.

Es scheint also einfacher, im Frequenzbereich zu arbeiten als im Zeitbereich, da die Bestimmung der Hilbert-Transformierten der Eingangszeitfunktion i.a. schwierig ist, obwohl auch die Verhältnisse im Frequenzbereich nicht einfach sind.

### Stabilität von zeitvariablen Systemen

Ein Stabilitätskriterium von zeitvariablen Systemen läßt sich im Zeitbereich in Analogie zu zeitinvarianten Systemen leicht definieren (s. z.B. R. UNBEHAUEN, Systemtheorie, Oldenbourg, 1969, p. 29).

Ein lineares zeitvariables System ist genau dann stabil, wenn die Gewichtsfunktion  $g(t, \tau)$  die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t, \tau)| d\tau < \infty$$

für alle  $t$ -Werte erfüllt.

Bildet man die Laplace-Transformierte von  $g(t, \tau)$  bezüglich  $\tau$ , so muß diese (s. z.B. DOETSCH, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation) in der rechten Halbebene und auf der imaginären Achse der  $s$ -Ebene für alle  $t$  analytisch sein.

In einem vom Verfasser erst kürzlich gefundenen Artikel von L.A. ZADEH, On Stability of linear Varying-Parameter Systems (Journ. of Applied Physics, 22, p. 402) sind die oben gefundenen Ergebnisse bestätigt.

Während die Stabilitätsuntersuchung einzelner zeitvariabler, linearer Systeme relativ einfach ist, ergeben sich bei Systemen mit Rückkopplung Schwierigkeiten, die bisher noch nicht gelöst werden konnten.

In dem oben zitierten Bericht von ZADEH wird ein Weg besprochen, der eine Möglichkeit zu bieten scheint, um zu der Aussage über die Grenze der Stabilität in Abhängigkeit von der Verstärkung bei dem dem Forschungsauftrag zugrunde liegenden Problem zu kommen.

- Die vorliegenden Untersuchungen wurden durch eine Forschungsbeihilfe der DFG ermöglicht. -

