

HEINRICH-HERTZ-INSTITUT — BERLIN-CHARLOTTENBURG

Technischer Bericht Nr. 190

Über einige asymptotische Eigenschaften orthogonaler
Transformationen zur Diagonalisierung von Toeplitz-Matrizen

von

Dipl.-Ing. Rainer Zelinski

Berlin

1 9 7 6



EINSTEINUFER 37

1000 BERLIN 10

Heinrich-Hertz-Institut für Nachrichtentechnik Berlin

Technischer Bericht Nr. 190

Über einige asymptotische Eigenschaften orthogonaler Transformationen zur Diagonalisierung von Toeplitz-Matrizen

von

Dipl.-Ing. Rainer Zelinski

Berlin

1976



Über einige asymptotische Eigenschaften orthogonaler Transformationen zur Diagonalisierung von Toeplitz-Matrizen

Zusammenfassung:

In der digitalen Signalverarbeitung werden orthogonale Transformationen auf vielen Gebieten eingesetzt wie Mustererkennung, Codierung und Wiener Filterung. Statt der optimalen Loève-Karhunen-Transformation werden oft suboptimale, d.h. nicht an die Prozeßstatistik angepaßte Transformationen verwendet, die aber mit einem schnellen Algorithmus implementiert werden können.

In dieser Arbeit wird der wichtige - z.B. bei Sprach- und Bildsignalen auftretende - Sonderfall von Prozessen mit Toeplitz-Kovarianzmatrix betrachtet. Es wird untersucht, ob und unter welchen Bedingungen suboptimale Transformationen nahezu die Eigenschaften einer Loève-Karhunen-Transformation erreichen, d.h. die Toeplitz-Matrix zumindest asymptotisch mit wachsender Blocklänge in eine Diagonalmatrix im Bildbereich überführen können (asymptotisch optimale Transformationen).

Es wird gezeigt, daß alle orthogonalen Transformationen, deren Basisvektoren aus Abtastwerten von Sinus-Funktionen beliebiger Phasenlage mit über dem Intervall $(0, \pi)$ gleichmäßig verteilten Eigenfrequenzen bestehen, asymptotisch optimal sind; während alle Transformationen, deren Basisvektoren nicht auf Abtastwerte von Sinus-Funktionen zurückgeführt werden können, zu der Klasse der nicht asymptotisch optimalen Transformationen gehören.

Heinrich-Hertz-Institut

Der Bearbeiter

R. Zelinski

(Dipl.-Ing. R. Zelinski)

Der Abteilungsleiter

Vöge

(Dr.-Ing. K.H. Vöge)

Der Institutsdirektor

H. Ohnsorge

(Dr.-Ing. H. Ohnsorge)

Berlin-Charlottenburg, den 21.5.76

Inhaltsverzeichnis

	Seite
<u>1. Einleitung</u>	1
<u>2. Eigenvektoren und Eigenwerte von Toeplitz-Matrizen</u>	2
2.1 Prozesse mit Toeplitz-Matrix als Kovarianzmatrix	2
2.2 Transformation in den Bildbereich	4
2.3 Die Loève-Karhunen-Transformation	5
2.4 Asymptotische Eigenwertverteilung von Toeplitz-Matrizen	5
2.5 Eigenwerte und Eigenvektoren bei speziellen Prozessen	7
2.5.1 Moving-Average-Prozeß 1. Ordnung (MA-1-Prozeß)	7
2.5.2 Autoregressiver Prozeß 1. Ordnung (AR-1-Prozeß)	10
2.5.3 Prozesse höherer Ordnung	16
<u>3. Suboptimale Transformationen</u>	16
3.1 Die Diskrete Fourier-Transformation (DFT)	17
3.1.1 Die komplexe DFT	17
3.1.2 Die reelle DFT	18
3.1.3 Beispiel für einen Prozeß mit zyklischer Kovarianzmatrix	19
3.2 Die Diskrete Moving-Average-1-Transformation (DMA1T)	20
3.3 Die Diskrete Cosinus-Transformation (DCT)	22
3.4 Die Diskrete Sinus-Transformation (DSINT)	26
3.5 Die Diskrete Wiener Prozeß-Transformation (DWPT)	29
3.6 Die Diskrete Walsh-Transformation (DWT)	30
3.7 Vergleich von Matrizenklassen	32
<u>4. Asymptotische Eigenschaften im Original- und Bildbereich</u>	34
4.1 Asymptotisch äquivalente Matrizenfolgen	34
4.1.1 Definitionen und Beispiele	34
4.1.2 Asymptotische Eigenschaften der Kovarianzmatrix im Bildbereich	39
4.1.3 Asymptotische Eigenschaften der Eigenwertverteilungen	41
4.2 Asymptotisch optimale Transformationen	42
4.3 Varianzverteilung im Bildbereich für asymptotisch optimale und nicht optimale Transformationen	48
4.3.1 Darstellung der Basisvektoren einer Transformation durch die Basisvektoren einer Bezugstransformation	48
4.3.2 Bandbreite eines Basisvektors	50

	Seite
4.3.3 Nicht asymptotisch optimale Transformationen	55
4.3.4 Beispiele für Verteilungen von Entwicklungskoeffizienten	56
4.3.5 Ein aus den Entwicklungskoeffizienten abgeleitetes Abstandsmaß	58
<u>5. Eigenschaften der untersuchten Transformationen am Beispiel eines Modellprozesses</u>	60
5.1 Varianzverteilung im Bildbereich als Funktion der Blocklänge	60
5.2 Varianzverteilung im Bildbereich für nicht asymptotisch optimale Transformationen	62
<u>6. Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse</u>	64
 <u>Anhang</u>	
1.A Durchführung der DMA1T mittels der DFT	67
2.A Durchführung der DSINT mittels der DFT	67
3.A Formeln zum Beweis des Satzes in Abschnitt 4.2	68
 <u>Literaturverzeichnis</u>	 71

1. Einleitung

Viele in der digitalen Signalverarbeitung auftretenden Signale sind Vektorprozesse mit statistischen Abhängigkeiten der Vektorkomponenten untereinander. Als Beispiel seien Kanalvocodersignale oder blockweise abgetastete Sprach-, Bild- und Meßwertsignale genannt. Bei der Verarbeitung solcher Prozesse werden häufig orthogonale Transformationen eingesetzt, um das Signal vom Originalbereich in einen Bildbereich zu überführen. Anwendungsgebiete dieses Prinzips sind:

- * Mustererkennung: Der zu klassifizierende Merkmalsvektor kann im Bildbereich sehr oft durch nur wenige Komponenten beschrieben werden, wobei der Klassifizierungsfehler nur geringfügig zunimmt. Die Weiterverarbeitung des Musters mit geringer Dimensionalität verringert den Rechenaufwand beträchtlich /1/.
- * Codierung: Werden den einzelnen Vektorkomponenten im Bildbereich je nach ihrer Varianz Quantisierer mit unterschiedlicher Bitzahl zugeordnet, so wird gegenüber einer PCM-Codierung bei sonst gleicher mittlerer Übertragungsrate eine geringere Codierverszerrung erreicht /2,3/.
- * Wiener Filterung: Bei geeigneter Transformation sind die Komponenten des Signalvektors im Bildbereich exakt oder näherungsweise unkorreliert. Die Weiterverarbeitung im Bildbereich kann dann skalar mit geringem Rechenaufwand erfolgen (d.h. jede Komponente wird unabhängig von den anderen verarbeitet), wobei der Schätzfehler gegenüber einer vektoriellen Weiterverarbeitung nicht bzw. nur geringfügig zunimmt /4/.

Die für ein bestimmtes Kriterium (z.B. kleinster mittlerer quadratischer Fehler) optimale Transformation ist in der Regel von der Statistik des zu verarbeitenden Prozesses abhängig; sie ist unter dem Namen Loève-Karhunen-Transformation bekannt und überführt die Kovarianzmatrix des Prozesses in eine Diagonalmatrix im Bildbereich. Ihr Nachteil ist der hohe Rechenaufwand zur Durchführung der Transformation. Daher werden häufig Transformationen eingesetzt, zu deren Durchführung ein schneller Algorithmus existiert, wobei in Kauf genommen wird, daß wegen der nicht optimalen Anpassung der Transformation an die Signalstatistik ein größerer Verarbeitungsfehler auftritt bzw. die Kovarianzmatrix im Bildbereich keine Diagonalmatrix mehr ist (Suboptimale Transformationen).

In dieser Arbeit wird ein wichtiger Sonderfall von Vektorprozessen betrachtet, der dann vorliegt, wenn die Kovarianzmatrix des Prozesses durch eine Toeplitz-Matrix /5/ (streifensymmetrische Struktur) beschrieben werden kann. Dies ist z.B. der Fall bei blockweiser Abtastung eines Sprachsignals oder der Zeile eines Bildsignals. Zur Verarbeitung von Toeplitz-Matrizen werden eine Reihe von suboptimalen Transformationen untersucht. Von besonderem Interesse ist dabei das asymptotische Verhalten der Transformationen mit wachsender Blocklänge. Einige in jüngster Zeit erschienene Veröffentlichungen zu diesem Gebiet /6,7/ lassen eine Reihe von wichtigen Fragen noch offen. In dem vorliegenden Bericht werden bekannte Ergebnisse mit neuen Ergebnissen in Beziehung gesetzt, die theoretischen Zusammenhänge werden angegeben und Aussagen über den praktischen Einsatz verschiedener Transformationen gemacht.

2. Eigenvektoren und Eigenwerte von Toeplitz-Matrizen

Dieser Abschnitt enthält wichtige Definitionen und Aussagen zu den Eigenvektoren und Eigenwertverteilungen der Kovarianzmatrizen spezieller Prozesse. Diese Ergebnisse können später verwendet werden, um abzuschätzen, welche suboptimalen Transformationen für bestimmte Prozeßklassen besonders geeignet sind.

2.1 Prozesse mit Toeplitz-Matrix als Kovarianzmatrix

Es liege ein reellwertiger stationärer stochastischer Prozeß $\{x_n\}$ mit dem Mittelwert Null vor, der z.B. aus den Abtastwerten eines Sprach- oder Bildsignals entsteht. Sein Leistungsdichtespektrum (LDS) mit der normierten Frequenz Ω sei

$$S(e^{j\Omega}) \quad , \quad \Omega = -\pi, \dots, \pi \quad , \quad (2.1.1)$$

wobei $\Omega = \pi$ der halben Abtastfrequenz entspricht.

Seine Autokorrelationsfunktion (AKF)

$$R(1) = E [x_n x_{n+1}] \quad (2.1.2)$$

wird aus dem LDS durch die inverse Fourier-Transformation

$$R(l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(e^{j\Omega}) e^{jl\Omega} d\Omega \quad (2.1.3)$$

bestimmt, so daß auch gilt:

$$S(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R(l) e^{-jl\Omega} \quad (2.1.4)$$

Aus der Abtastfolge wird ein Datenblock bzw. Datenvektor der Länge N gebildet:

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_N)^T \quad (2.1.5)$$

Die Kovarianzmatrix \underline{R}_{xx} des Prozesses $\{\underline{x}\}$ ist dann

$$\underline{R}_{xx} = E [\underline{x} \underline{x}^T] \quad (2.1.6)$$

wobei die Matrixelemente $(\underline{R}_{xx})_{kn}$ die Bedingung

$$(\underline{R}_{xx})_{kn} = R(|k-n|) \quad , \quad k, n=1, \dots, N \quad (2.1.7)$$

erfüllen. Die Matrix

$$\underline{R}_{xx} = \begin{pmatrix} R(0) & R(1) & \dots & R(N-1) \\ R(1) & R(0) & \dots & R(N-2) \\ & & \ddots & \\ R(N-1) & R(N-2) & \dots & R(0) \end{pmatrix} \quad (2.1.8)$$

gehört zu der allgemeinen Klasse von Toeplitz-Matrizen, die durch ihre Struktur gekennzeichnet sind. Sie weisen auf der Hauptdiagonalen und Parallelen dazu jeweils nur gleich große Elemente auf (nicht notwendig symmetrische Matrizen!) und wurden erstmals 1911 von O. Toeplitz näher untersucht /8/.

Wir wollen im folgenden jedoch - wie in einem breiten Teil der Literatur üblich - mit dem Begriff Toeplitz-Matrix stets eine Kovarianzmatrix eines stationären Prozesses mit der symmetrischen Struktur gemäß Gl. 2.1.8 verbinden. Außerdem soll für die weiteren Betrachtungen vorausgesetzt werden, daß die AKF $R(\cdot)$ nicht nur quadratisch, sondern auch absolut summierbar ist, d.h.

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} |R(l)| < L < \infty \quad (2.1.9)$$

Diese Eigenschaft wird von fast allen für die Praxis interessanten Prozessen erfüllt, z.B. von allen Prozessen, die durch ein Modell mit endlich vielen Polen und Nullstellen beschrieben werden können. Für derartige Prozesse klingt die AKF sogar exponentiell ab.

2.2 Transformation in den Bildbereich

Es stehe eine lineare orthogonale Transformation A (Elemente a_{kn} ; $k, n = 1, \dots, N$) zur Verfügung, wobei der k -te Basisvektor der Transformation,

$$\underline{a}_k^T = (a_{k1}, \dots, a_{kn}, \dots, a_{kN}) \quad ; \quad k=1, \dots, N \quad (2.2.1)$$

durch die k -te Zeile von A gebildet wird.
Der Vektor x wird durch die Abbildung

$$\underline{y} = \underline{A} \underline{x} \quad (2.2.2)$$

bzw.

$$y_k = \underline{a}_k^T \underline{x} \quad ; \quad k=1, \dots, N \quad (2.2.3)$$

in den Bildbereich überführt mit den Komponenten

$$\underline{y} = (y_1, \dots, y_N)^T \quad (2.2.4)$$

Die Matrix A sei ferner orthonormal, so daß

$$\underline{A}^{-1} = \underline{A}^T \quad (2.2.5)$$

Für die Kovarianzmatrix im Bildbereich,

$$\underline{R}_{yy} = E [\underline{y} \underline{y}^T] \quad (2.2.6)$$

gilt mit Gl. 2.2.2 und 2.2.5

$$\underline{R}_{yy} = \underline{A} \underline{R}_{xx} \underline{A}^T \quad (2.2.7)$$

Die Varianzen der Spektralkoeffizienten y_k ,

$$\sigma_k^2 = E [y_k^2] \quad , \quad (2.2.8)$$

denen später noch besondere Bedeutung zukommen wird, sind als Elemente der Hauptdiagonalen von \underline{R}_{yy} durch Gl. 2.2.7 festgelegt.

2.3 Die Loève-Karhunen-Transformation

Für die drei in der Einleitung angegebenen Anwendungen (Mustererkennung, Codierung, Wiener Filterung) kann gezeigt werden, daß bei dem Kriterium des kleinsten mittleren quadratischen Fehlers die optimale Transformation \underline{A} durch die Loève-Karhunen-Transformation (LKT) gebildet wird. Bei dieser Transformation sind die Basisvektoren \underline{a}_k^T die Eigenvektoren der Kovarianzmatrix \underline{R}_{xx} ; sie sind im allgemeinen von dem zu verarbeitenden Prozeß abhängig.

Die Kovarianzmatrix im Bildbereich ist dann eine Diagonalmatrix

$$\underline{R}_{yy} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_k & \dots & \\ & & & & & \dots & \\ & & & & & & \lambda_N \end{pmatrix} \quad . \quad (2.3.1)$$

Die Werte λ_k sind die Eigenwerte der Kovarianzmatrix \underline{R}_{xx} . Das bedeutet, daß die Varianzen σ_k^2 der Spektralkoeffizienten y_k mit den Eigenwerten λ_k identisch sind.

2.4 Asymptotische Eigenwertverteilung von Toeplitz-Matrizen

Für alle drei in der Einleitung angegebenen Anwendungen werden sowohl die Güte des Verfahrens als auch die Systemparameter ausschließlich durch die Varianzen σ_k^2 ($k=1, \dots, N$) der Spektralkoeffizienten festgelegt, so daß diese Werte für den Entwurf und die Beurteilung eines Verfahrens von großer Bedeutung sind.

Leider gibt es bei beliebiger Transformation \underline{A} kaum eine explizite Lösung zur Bestimmung der Größen σ_k^2 . Ist \underline{A} die Loève-Karhunen-Transformation - und sind damit die Varianzen σ_k^2 die Eigenwerte von \underline{R}_{xx} - so kann zumindest eine Grenzaussage für die Eigenwertverteilung angegeben werden. Dieser Satz geht auf G.

Szegö zurück und sagt aus, daß die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ asymptotisch genau so verteilt sind wie die Werte des Leistungsdichtespektrums $S(e^{j\Omega})$ bei N äquidistant verteilten Frequenzen im Intervall $(0, \pi)$, d.h. wie die Werte

$$S(e^{j\Omega_k}), \quad \Omega_k = \frac{k}{N}\pi; \quad k=1, \dots, N. \quad (2.4.1)$$

Das bedeutet, bei hohen Blocklängen N können die Eigenwerte λ_k durch die Sample-Werte $S(e^{j\Omega_k})$ des Leistungsdichtespektrums ("Sample-LDS") mit asymptotisch geringer werdendem Fehler ersetzt werden.

Szegös Theorem lautet exakt /9/:

Es sei $F(\cdot)$ eine beliebige stetige Funktion, definiert auf dem Intervall $[\min \{S(e^{j\Omega})\}, \max \{S(e^{j\Omega})\}]$ mit $\Omega=0 \dots \pi$.

Dann gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F(\lambda_1) + \dots + F(\lambda_N)}{N} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F[S(e^{j\Omega})] d\Omega. \quad (2.4.2)$$

Daß die zuvor angegebene Interpretation in Gl. 2.4.2 enthalten ist wird deutlich, wenn man in der linken Seite von Gl. 2.4.2 die Eigenwerte λ_k durch die Sample-Werte des LDS $S(e^{j\Omega_k})$ ersetzt. Dann steht auf der linken Seite von Gl. 2.4.2 gerade die Riemannsche Summe für das rechts angegebene Integral.

Das Theorem nach Gl. 2.4.2 ist eine recht wichtige und interessante Aussage: Die Kovarianzmatrix \underline{R}_{xx} kann über Gl. 2.1.3 aus dem LDS definiert werden. Die Eigenwerte von \underline{R}_{xx} führen dann asymptotisch auf das "erzeugende" LDS zurück.

Die Gl. 2.4.2 ist ein wichtiger Schritt für viele Betrachtungen wie Berechnung der Redundanz eines Prozesses, Bestimmung der Rate-Distortion-Funktion oder hier Berechnung der Güte eines Transformationsverfahrens für den Grenzfall großer Blocklängen, da die schwer zu bestimmenden Eigenwerte einfach durch das LDS ersetzt werden können.

Bei endlicher Blocklänge N lassen sich zumindest Schranken für die Eigenwerte λ_k angeben /5/ :

$$\lambda_k \geq \min_{\Omega=0 \dots \pi} \{s(e^{j\Omega})\}, \quad \forall k \quad ; \quad (2.4.3)$$

$$\lambda_k \leq \max_{\Omega=0 \dots \pi} \{s(e^{j\Omega})\}, \quad \forall k \quad . \quad (2.4.4)$$

Das bedeutet, die Eigenwerte bewegen sich in ihrer Größe zwischen den Extrema des LDS und können daher stets in der Form

$$\lambda_i = s(e^{j\Omega_i}) \quad , \quad 0 \leq \Omega_i \leq \pi \quad , \quad \forall i \quad (2.4.5)$$

angegeben werden.

2.5 Eigenwerte und Eigenvektoren bei speziellen Prozessen

Außer dem Theorem von Szegö können i.a. für einen beliebigen Prozeß keine näheren Angaben über die Eigenwerte bzw. Eigenvektoren von \underline{R}_{xx} getroffen werden. In den nächsten beiden Abschnitten werden zwei Sonderfälle behandelt, die zumindest teilweise einer analytischen Lösung zugänglich sind.

2.5.1 Moving-Average-Prozeß 1.Ordnung (MA-1-Prozeß)

Ein Moving-Average-Prozeß $\{x_n\}$ ("Gleitendes Mittel") der Ordnung M kann durch die Differenzgleichung

$$x_n = \varepsilon_n + \sum_{i=1}^M h_i \varepsilon_{n-i} \quad (2.5.1)$$

beschrieben werden. $\{\varepsilon_n\}$ ist eine unkorrelierte Zahlenfolge, deren Varianz aus Normierungsgründen so gewählt werde, daß $R(0) = E[x_n^2] = 1$ gilt. Für $M=1$ erhält man eine tridiagonale Kovarianzmatrix

$$\underline{R}_{xx} = \begin{pmatrix} 1 & r & 0 & \dots & 0 \\ r & 1 & r & \dots & 0 \\ 0 & r & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad (2.5.2)$$

wobei

$$r \doteq R(1) \quad \text{mit} \quad |r| \leq \frac{1}{2} \quad . \quad (2.5.3)$$

Das Leistungsdichtespektrum ist nach Gl. 2.1.4 sofort durch

$$S(e^{j\Omega}) = 1 + 2r \cos \Omega \quad (2.5.4)$$

gegeben.

Gesucht sind die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_N$ und die dazugehörigen Eigenvektoren $\underline{u}^{(1)}, \dots, \underline{u}^{(k)}, \dots, \underline{u}^{(N)}$ von \underline{R}_{xx} , wobei der k-te Eigenvektor durch

$$\underline{u}^{(k)} = (u_1^{(k)}, \dots, u_n^{(k)}, \dots, u_N^{(k)})^T \quad (2.5.5)$$

beschrieben wird.

Die Eigenwertgleichung

$$\underline{R}_{xx} \underline{u} = \lambda \underline{u} \quad (2.5.6)$$

führt mit Gl. 2.5.2 auf ein System von N homogenen linearen Differenzgleichungen, die bis auf die erste und letzte Gleichung alle die Form

$$r u_{n-1} + (1-\lambda)u_n + r u_{n+1} = 0 \quad ; \quad 2 \leq n \leq N-1 \quad (2.5.7)$$

aufweisen. Eine solche Differenzgleichung kann durch den Potenzansatz /10/

$$u_n = z^n \quad (2.5.8)$$

gelöst werden, wobei man mit Gl. 2.5.7 die charakteristische Gleichung

$$z^2 + \frac{1-\lambda}{r} z + 1 = 0 \quad (2.5.9)$$

erhält. Da die Eigenwerte λ nicht außerhalb der Extremwerte von $S(e^{j\Omega})$ liegen können (Gl. 2.4.3, 2.4.4), ist mit Gl. 2.5.4 die Substitution

$$\lambda = 1 + 2r \cos \Omega \quad (2.5.10)$$

zulässig. Damit erhält man für die Nullstellen der charakteristischen Gleichung

$$z = e^{\pm j\Omega} \quad (2.5.11)$$

und für u_n

$$u_n = A \cos \Omega n + B \sin \Omega n \quad (2.5.12)$$

Die Konstanten A, B und die Eigenwerte λ bzw. die über Gl. 2.5.10 zugeordneten Eigenfrequenzen Ω werden durch zwei Randbedingungen festgelegt, da die erste und letzte Differenzgleichung in Gl. 2.5.6 nicht die Form nach Gl. 2.5.7 aufweisen.

Die erste Randbedingung (1. Gleichung im System Gl. 2.5.6)

$$(1 - \lambda)u_1 + r u_2 = 0 \quad (2.5.13)$$

führt nach kurzer Rechnung auf

$$u_n = B \sin \Omega n \quad (2.5.14)$$

wobei die Amplitude B beliebig ist.

Die zweite Randbedingung (N-te Gleichung im System Gl. 2.5.6)

$$r u_{N-1} + (1-\lambda)u_N = 0 \quad (2.5.15)$$

führt auf

$$r \sin [(N-1)\Omega] - 2r \cos \Omega \sin [N\Omega] = 0$$

bzw.

$$\sin [(N+1)\Omega] = 0$$

Daraus ergeben sich sofort die Eigenfrequenzen

$$\boxed{\Omega_k = \frac{k\pi}{N+1}} \quad k=1, \dots, N \quad (2.5.16)$$

die Eigenwerte

$$\boxed{\lambda_k = 1 + 2r \cos \Omega_k} \quad k=1, \dots, N \quad (2.5.17)$$

und die Eigenvektoren

$$\boxed{u_n^{(k)} = \sin \frac{nk\pi}{N+1}} \quad k, n=1, \dots, N \quad (2.5.18)$$

Die Eigenvektoren der Kovarianzmatrix des MA-1-Prozesses werden also durch ein System von abgetasteten Sinus-Funktionen gebildet, deren Eigenfrequenzen äquidistant über das Intervall $(0, \pi)$ verteilt sind. Der zu einem Eigenvektor gehörende Eigenwert ist identisch mit der Leistungsdichte des Prozesses bei seiner Eigenfrequenz.

Hier zeigt sich also eine Bestätigung für das Theorem von Szegő; die Eigenwerte des MA-1-Prozesses können sogar für kleine Blocklängen exakt durch das Sample-LDS ersetzt werden.

2.5.2 Autoregressiver Prozeß 1. Ordnung (AR-1-Prozeß)

Ein autoregressiver Prozeß $\{x_n\}$ der Ordnung M wird durch die Differenzgleichung

$$x_n = \varepsilon_n + \sum_{i=1}^M h_i x_{n-i} \quad (2.5.19)$$

beschrieben. $\{\varepsilon_n\}$ ist eine unkorrelierte Zahlenfolge, deren Varianz wiederum so gewählt werde, daß $R(0)=1$ erfüllt ist. Mit

$$r \doteq R(1) \quad (2.5.20)$$

erhält man für die Ordnung M=1 die Kovarianzmatrix

$$\underline{R}_{xx} = \begin{pmatrix} 1 & r & r^2 & \dots & r^{N-1} \\ r & 1 & r & \dots & r^{N-2} \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ r^{N-1} & r^{N-2} & r^{N-3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5.21)$$

und nach Gl. 2.1.4 das Leistungsdichtespektrum

$$S(e^{j\Omega}) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \Omega} \quad (2.5.22)$$

Zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren von \underline{R}_{xx} kann man ähnlich wie im Abschnitt 2.5.1 vorgehen, wenn man nicht von \underline{R}_{xx} , sondern von der inversen Matrix \underline{R}_{xx}^{-1} ausgeht, die für einen AR-1-Prozeß durch

$$\underline{R}_{xx}^{-1} = \frac{1}{1-r^2} \begin{pmatrix} 1 & -r & 0 & \dots & 0 \\ -r & 1+r^2 & -r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -r & 1+r^2 & -r & & \\ & & & \cdot & & \\ 0 & \dots & -r & 1+r^2 & -r & \\ 0 & \dots & 0 & -r & 1 & \end{pmatrix} \quad (2.5.23)$$

gegeben ist /4/. Die Eigenwertgleichung Gl. 2.5.6 wird nun in der Form

$$\underline{u} = \lambda \underline{R}_{xx}^{-1} \underline{u} \quad (2.5.24)$$

geschrieben. Es entsteht wiederum ein System von homogenen linearen Differenzengleichungen; die n-te Gleichung hat die Form

$$u_{n-1} - u_n \frac{1}{r} \left[1+r^2 - \frac{1-r^2}{\lambda} \right] + u_{n+1} = 0 \quad ; \quad 2 \leq n \leq N-1 \quad (2.5.25)$$

Der Potenzansatz nach Gl. 2.5.8 führt auf die charakteristische Gleichung

$$z^2 - z \frac{1}{r} \left[1+r^2 - \frac{1-r^2}{\lambda} \right] + 1 = 0 \quad (2.5.26)$$

mit den Nullstellen

$$z = e^{\pm j\Omega} \quad (2.5.27)$$

wobei für λ entsprechend Gl. 2.5.10 die Substitution über das LDS $S(e^{j\Omega})$,

$$\lambda = \frac{1-r^2}{1+r^2 - 2r \cos \Omega} \quad (2.5.28)$$

durchgeführt wurde.

Die 1. Randbedingung (1. Gleichung im System Gl. 2.5.24)

$$u_1 = \frac{\lambda}{1-r^2} (u_1 - r u_2) \quad (2.5.29)$$

führt mit dem Ansatz

$$\boxed{u_n = \cos (n\Omega - \varphi)} \quad (2.5.30)$$

nach kurzer Rechnung auf die Beziehung

$$\boxed{\tan \varphi = \frac{1 - r \cos \Omega}{r \sin \Omega}} \quad (2.5.31)$$

Die Eigenvektoren $\underline{u}^{(k)}$ sind also Abtastwerte von Sinus- bzw. Cosinus-Funktionen, deren Phasenlagen über Gl. 2.5.31 durch die noch zu bestimmenden Eigenfrequenzen $\Omega = \Omega_k$ festgelegt werden.

Die Beziehung $\varphi(\Omega)$ ist in Bild 2.1 für verschiedene Werte r dargestellt.

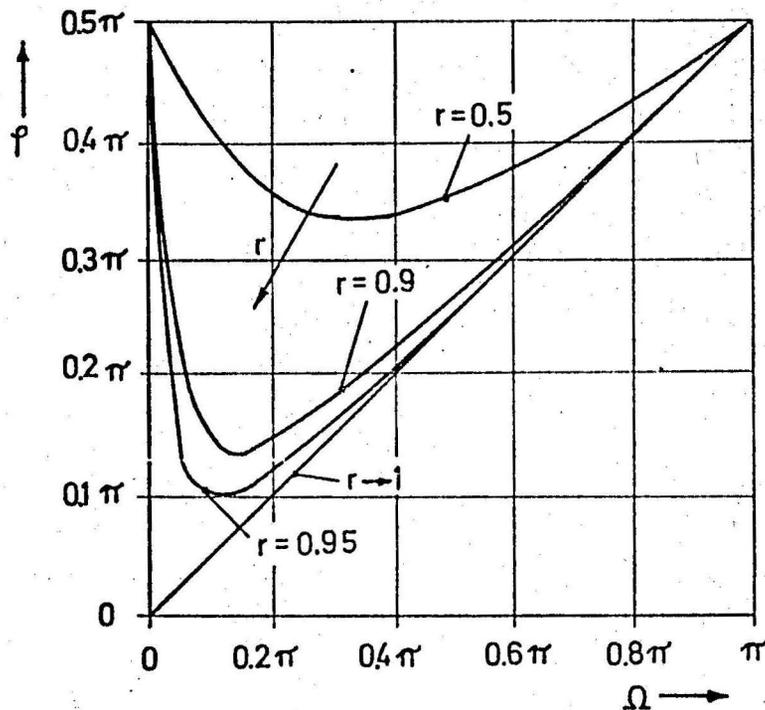


Bild 2.1 : Phasenwinkel φ der Eigenvektoren der Kovarianzmatrix eines AR-1-Prozesses in Abhängigkeit von der Frequenz Ω für positive Korrelationen $r > 0$.

Für $|r| \rightarrow 1$ ergibt sich aus Gl. 2.5.31 eine lineare Beziehung zwischen φ und Ω :

$r \rightarrow +1 : \quad \varphi(\Omega) = \frac{1}{2} \Omega$	(2.5.32)
$r \rightarrow -1 : \quad \varphi(\Omega) = \frac{1}{2} \Omega - \frac{\pi}{2}$	

Die 2. Randbedingung (N-te Gleichung im System Gl. 2.5.24)

$$u_N = \frac{\lambda}{1-r^2} \left[-r u_{N-1} + u_N \right] \quad (2.5.33)$$

führt auf die Bestimmung der noch unbekanntenen Eigenfrequenzen Ω_k , die mittels Gl. 2.5.28 die Eigenwerte λ_k festlegen. Um zu einer einfachen Bestimmungsgleichung für die Ω_k zu gelangen, werden wir zwei Schritte voranstellen:

I) Der Eigenvektor $\underline{u}^{(k)}$ wird formal um eine Komponente, u_{N+1} , erweitert:

Die bisher gefundene Lösung u_n erfüllt die homogene Differenzgleichung Gl. 2.5.25 für $\forall n \geq 2$, also auch für $n=N$; dafür wird Gl. 2.5.25

$$u_N = \frac{\lambda}{1-r^2} \left[-r u_{N-1} + (1+r^2)u_N - r u_{N+1} \right] \quad (2.5.34)$$

Damit aber die 2. Randbedingung, Gl. 2.5.33, erfüllt ist, muß gelten:

$$\boxed{u_{N+1} = r u_N} \quad (2.5.35)$$

Mit der formalen Erweiterung des Eigenvektors um die Komponente u_{N+1} haben wir damit eine erheblich einfachere Randbedingung (Gl. 2.5.35) als die ursprüngliche nach Gl. 2.5.33 erhalten.

II) Die Eigenvektorkomponenten u_n lassen sich statt mit Gl. 2.5.30 und Gl. 2.5.31 auch in der Form

$$u_n = \frac{\sin \Omega n}{\sin \Omega} - r \frac{\sin \Omega (n-1)}{\sin \Omega} \quad (2.5.36)$$

schreiben. Es ist leicht nachzuprüfen, daß dieser Ansatz ebenfalls die 1. Randbedingung nach Gl. 2.5.29 erfüllt.

Mit Gl. 2.5.35 und Gl. 2.5.36 erhält man dann folgende Bestimmungsgleichung für die Eigenfrequenzen Ω_k :

$$\boxed{\frac{\sin[\Omega_k (N+1)]}{\sin \Omega_k} - 2r \frac{\sin[\Omega_k \cdot N]}{\sin \Omega_k} + r^2 \frac{\sin[\Omega_k (N-1)]}{\sin \Omega_k} = 0} \quad (2.5.37)$$

$$k = 1, \dots, N$$

Diese Gleichung ist auch von Grenander und Szegö angegeben worden /5/, die allerdings einen anderen Weg - ohne Angabe der Eigenvektoren - beschrrieben. Die N Nullstellen Ω_k von Gl. 2.5.37 können nur iterativ bestimmt werden; ihre Lage kann aber auf einfache Weise zumindest eingegrenzt werden:

Diskussion der Eigenfrequenzen Ω_k :

Wir untersuchen die Vorzeichenwechsel der Funktion

$$F(\Omega) = \frac{\sin[\Omega(N+1)]}{\sin \Omega} - 2r \frac{\sin[\Omega N]}{\sin \Omega} + r^2 \frac{\sin[\Omega(N-1)]}{\sin \Omega}, \quad (2.5.38)$$

$0 \leq \Omega \leq \pi$

um die Lage der N Nullstellen Ω_k einzugrenzen. Am Bereichsrand für Ω ergeben sich folgende Werte:

I) $\Omega \rightarrow 0$:

$$F(\Omega \rightarrow 0) = N(1-r^2) + 1 - r^2 > 0 \quad \text{für } r \geq 0 .$$

II) $\Omega \rightarrow \pi$:

$$N \text{ gerade: } F(\Omega \rightarrow \pi) = N(1+r)^2 + 1-r^2 > 0 \quad \text{für } r \geq 0 .$$

$$N \text{ ungerade: } F(\Omega \rightarrow \pi) = -N(1+r)^2 - (1-r^2) < 0 \quad \text{für } r \geq 0 .$$

Zwischenwerte $F(\Omega)$ für den Bereich $0 < \Omega < \pi$ kann man leicht erhalten, wenn man geeignete Teilungen auf der Frequenzachse Ω wählt:

III) Teilung nach Grenander und Szegö /5/ :

$$\Omega_\nu = \frac{\nu \pi}{N+1} \quad ; \quad \nu = 1, 2, \dots, N :$$

$$F(\Omega = \Omega_\nu) = (-1)^\nu \cdot \underbrace{2r(1 - r \cos \Omega_\nu)}_{> 0 \text{ für } r \geq 0}$$

Mit Hilfe einer anderen Teilung kann man die Lage der Nullstellen Ω_k noch weiter eingrenzen:

IV) Andere Teilung:

$$\Omega_\mu = \frac{\mu \cdot \pi}{N} \quad ; \quad \mu = 1, 2, \dots, N-1:$$

$$F(\Omega = \Omega_\mu) = (-1)^\mu \cdot \underbrace{(1-r^2)}_{> 0 \text{ für } r \geq 0}$$

Die aus den Betrachtungen I...IV folgenden Konsequenzen sind für das Beispiel $N=4$ im Bild 2.2 dargestellt. Die Teilung IV zeigt, daß in jedem der N Intervalle mit der Breite $\frac{\pi}{N}$ genau eine der N Eigenfrequenzen Ω_k liegt. Die Kombination von Teilung III und Teilung IV erlaubt eine weitere Einschränkung des zulässigen Wertebereiches für die Eigenfrequenzen Ω_k : Von einem Intervall der Breite $\frac{\pi}{N}$ ist jeweils nur ein Teilbereich möglich; diese Teilbereiche sind auf der obersten Achse im Bild 2.2 dick ausgezogen.

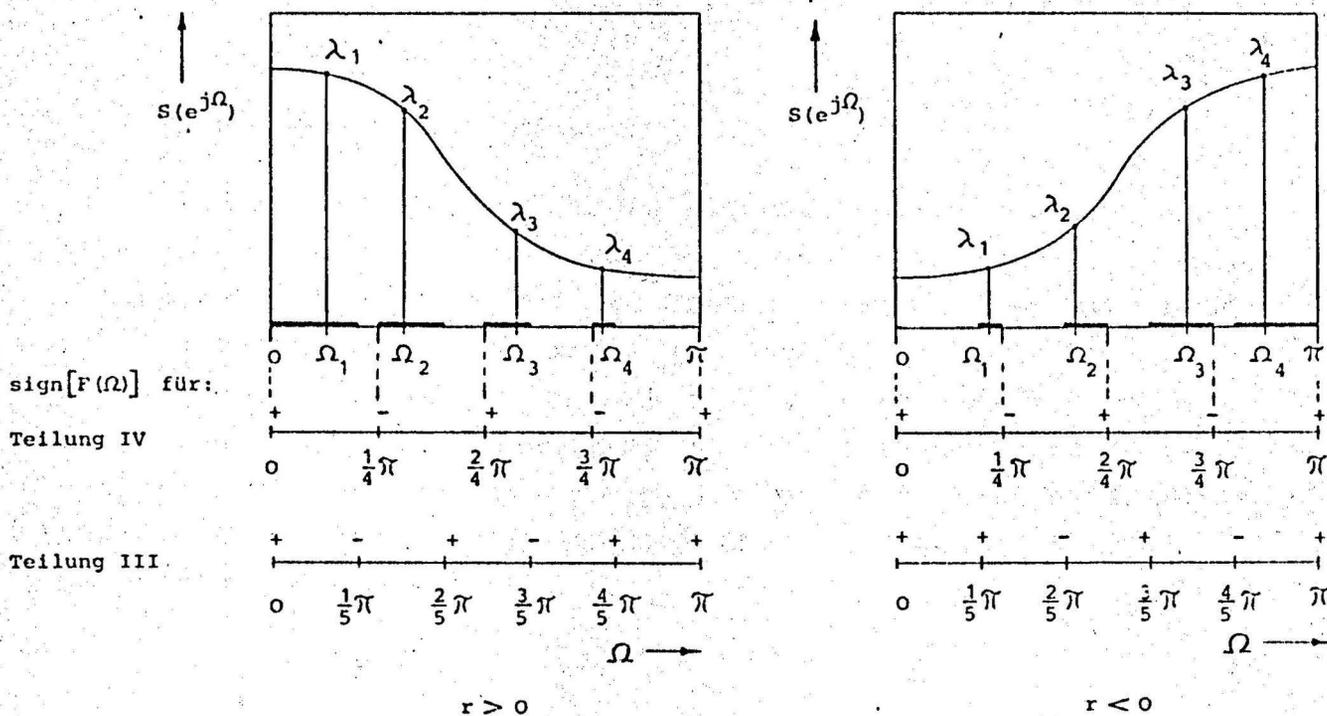


Bild 2.2 : Lage der Eigenfrequenzen $\Omega_1 \dots \Omega_4$ und der Eigenwerte $\lambda_1 \dots \lambda_4$ für einen AR-1-Prozess bei der Blocklänge $N=4$.

Die Bereiche verengen sich dabei umso mehr, je kleiner die Leistungsdichte $S(e^{j\Omega})$ wird. Die genaue Lage der Eigenfrequenz Ω_k innerhalb des dick ausgezogenen Bereiches kann nur iterativ bestimmt werden. Ist der genaue Wert Ω_k dann gefunden, so ist der dazugehörige Eigenwert λ_k sofort durch die Leistungsdichte $S(e^{j\Omega_k})$ gegeben (vgl. Bild 2.2).

Die bisherigen Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Die Eigenvektoren der Kovarianzmatrix des AR-1-Prozesses werden durch ein System von abgetasteten Sinusfunktionen gebildet, deren Phasenlagen von ihrer Eigenfrequenz abhängen. Bei starker Korrelation ($|r| \rightarrow 1$) ergibt sich im Grenzfall ein linearer Zusammenhang zwischen Eigenfrequenz und Phasenwinkel. Die Eigenfrequenzen sind asymptotisch gleichmäßig über das Intervall $(0, \pi)$ verteilt. Der zu einem Eigenvektor gehörende Eigenwert ist identisch mit der Leistungsdichte des Prozesses bei seiner Eigenfrequenz.

Die Grenzaussage des Theorems von Szegö findet man also auch hier für den AR-1-Prozeß auf sehr einsichtige Weise bestätigt.

2.5.3 Prozesse höherer Ordnung

Für MA- oder AR-Prozesse höherer Ordnung können im allgemeinen keine analytischen Lösungen zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren von R_{xx} angegeben werden. Die Eigenvektoren sind auch nicht mehr als Abtastwerte von Sinus-Funktionen darstellbar. Aus den Betrachtungen im Abschnitt 4.3.2 wird aber später deutlich werden, daß die Eigenvektoren mit wachsender Blocklänge "asymptotisch sinusförmig" (in einem dort definierten Sinne) verlaufen, wobei ihre Eigenfrequenzen über dem Intervall $(0, \pi)$ asymptotisch gleichverteilt sind.

3. Suboptimale Transformationen

Obwohl die Loève-Karhunen-Transformation (LKT) in dem schon erläuterten Sinne eine optimale Transformation ist, wird sie oft nur zu Vergleichszwecken verwendet, da die Zahl der Rechenoperationen zu ihrer Durchführung relativ hoch ist. Andere Transformationen, zu denen ein schneller Algorithmus existiert, können aber in der Regel eine Toeplitz-Matrix nicht exakt in eine Diagonalmatrix überführen; sie werden daher als suboptimale Transformationen bezeichnet.

In diesem Abschnitt werden einige suboptimale Transformationen - soweit analytisch möglich - hinsichtlich ihrer Eignung zur Verarbeitung von Toeplitz-Matrizen untersucht. Insbesondere wird zu jeder Transformation die Matrixstruktur gesucht, die durch Anwendung dieser Transformation exakt in eine Diagonalmatrix überführt wird. Der Vergleich dieser Matrixstruktur mit der einer Toeplitz-Matrix läßt weitere Rückschlüsse auf die Anwendbarkeit der betrachteten Transformationen für bestimmte Prozeßklassen und auf das asymptotische Verhalten bei großen Blocklängen zu.

3.1 Die Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

3.1.1 Die komplexe DFT

Die komplexe DFT werde durch die Transformation

$$\underline{Y} = \underline{A}_{K-DFT} \underline{x} \quad (3.1.1)$$

beschrieben, wobei die Basisvektoren \underline{a}_k^T der Transformation (vgl. Abschnitt.2.2) durch

$$\underline{a}_k^T = N^{-1/2} (\dots, w^{(k-1)(n-1)}, \dots) \quad ; \quad k, n=1, \dots, N \quad (3.1.2)$$

$$\text{mit } w = e^{-j2\pi/N}$$

gegeben sind.

Die Kovarianzmatrix im Spektralbereich ist nach Gl. 2.2.7

$$\underline{R}_{yy} = \underline{A}_{K-DFT} \underline{R}_{xx} \underline{A}_{K-DFT}^T \quad (3.1.3)$$

Wir suchen nun solche Matrizen \underline{R}_{xx} , die im Spektralbereich eine Diagonalmatrix \underline{R}_{yy} bilden (bzw. deren Eigenvektoren identisch sind mit den DFT-Basisvektoren); diese Matrizen wollen wir mit $\underline{R}_{xx} = \underline{R}_{K-DFT}$ bezeichnen. Die Lösung dieses Problems ist schon lange bekannt: Die Matrizen \underline{R}_{K-DFT} sind zyklische Matrizen /10/, die durch folgende Struktur (zyklische Vertauschung des ersten Zeilenvektors)

$$\underline{R}_{K-DFT} = \begin{pmatrix} R_0 & R_1 & R_2 & \dots & R_{N-1} \\ R_{N-1} & R_0 & R_1 & \dots & R_{N-2} \\ R_{N-2} & R_{N-1} & R_0 & \dots & R_{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_1 & R_2 & R_3 & \dots & R_0 \end{pmatrix} \quad (3.1.4)$$

beschrieben werden. In vielen praktischen Anwendungen (z.B. Blockquantisierung /11/) interessiert aber die Abbildung eines reellen Datenvektors in einen reellen Bildvektor, daher werden wir im nächsten Abschnitt einige Eigenschaften der reellen DFT angeben .

3.1.2 Die reelle DFT

Unter einer reellen DFT \underline{A}_{R-DFT} verstehen wir eine Transformation, deren Basisvektoren aus den Real- bzw. Imaginärteilen der komplexen Basisvektoren von \underline{A}_{K-DFT} gebildet werden. Diese reelle Transformation \underline{A}_{R-DFT} überführt daher jeden reellen Vektor \underline{x} in einen reellen Vektor im Bildbereich. Die Reihenfolge der Basisvektoren wird zweckmäßigerweise nach steigender Sequenz vorgenommen (vgl. /11/). Bei der Normierung der Basisvektoren auf den Betrag Eins ist zu beachten, daß der Faktor $N^{-1/2}$ durch unterschiedliche Faktoren ersetzt werden muß /11/, um auch die Orthogonalität zu gewährleisten.

Wir suchen nun die Klasse der Matrizen \underline{R}_{R-DFT} , die durch die reelle DFT \underline{A}_{R-DFT} in eine Diagonalmatrix \underline{R}_{yy} überführt werden. Im folgenden wird gezeigt, daß \underline{R}_{R-DFT} zu der Klasse aller reellen symmetrischen zyklischen Matrizen gehört, die also die Struktur

$$\underline{R}_{R-DFT} = \begin{pmatrix} R_0 & R_1 & R_2 & \dots & R_2 & R_1 \\ R_1 & R_0 & R_1 & \dots & R_3 & R_2 \\ R_2 & R_1 & R_0 & \dots & R_4 & R_3 \\ & & & \dots & & \\ R_1 & R_2 & R_3 & \dots & R_1 & R_0 \end{pmatrix} \quad (3.1.5)$$

aufweisen.

Beweis:

Es sei \underline{R} eine reelle symmetrische zyklische Matrix und \underline{a}_k^T ($k=1\dots N$) seien die Basisvektoren der komplexen DFT. Da \underline{R} eine zyklische Matrix ist, sind die \underline{a}_k ihre Eigenvektoren und erfüllen die Eigenwertgleichung

$$\underline{R} \underline{a}_k = \lambda_k \underline{a}_k \quad ; \quad k=1, \dots, N \quad (3.1.6)$$

Andererseits besitzt jede reelle symmetrische Matrix reelle Eigenwerte λ_k /10/; damit läßt sich Gl.3.1.6 zerlegen in

$$\underline{R} \operatorname{Re} \{ \underline{a}_k \} = \lambda_k \operatorname{Re} \{ \underline{a}_k \} \quad k=1, \dots, N \quad (3.1.7)$$

$$\underline{R} \operatorname{Im} \{ \underline{a}_k \} = \lambda_k \operatorname{Im} \{ \underline{a}_k \} \quad .$$

Die reellen DFT-Basisvektoren erfüllen also auch die Eigenwertgleichung zu \underline{R} , was zu zeigen war.

Die Struktur der Matrix \underline{R}_{R-DFT} (Gl. 3.1.5) in der Umgebung der Hauptdiagonalen entspricht genau der einer Toeplitz-Matrix (Gl. 2.1.8), jedoch "stören" die gespiegelten Elemente in den Ecken der Nebendiagonalen. Das bedeutet, eine Toeplitz-Matrix (nach Gl. 2.1.8) ist einer Matrix \underline{R}_{R-DFT} in der Struktur zwar ähnlich, kann aber durch die DFT nicht diagonalisiert werden.

Wenn in den weiteren Abschnitten die DFT herangezogen wird, so soll damit stets die reelle DFT gemeint sein. Diese Transformation läßt sich dann besser mit den anderen ohnehin reellen Transformationen vergleichen.

3.1.3 Beispiel für einen Prozeß mit zyklischer Kovarianzmatrix

Während für Prozesse mit Toeplitz-Matrix \underline{R}_{xx} eine Vielzahl von Beispielen bekannt sind, haben Prozesse mit zyklischer Kovarianzmatrix weit weniger Bedeutung. Es soll hier jedoch ein Beispiel angegeben werden, daß u.U. auch von praktischem Interesse ist: Ein Bildsignal wird örtlich auf einem Kreis in äquidistantem Abstand abgetastet (Bild 3.1).

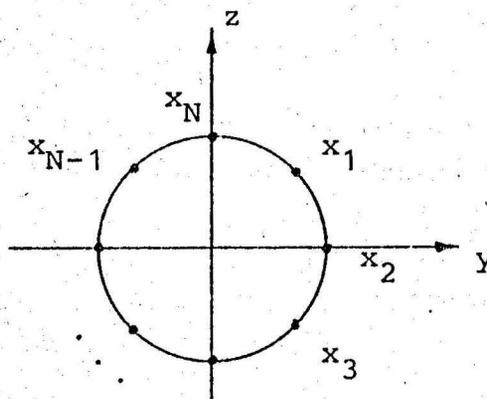


Bild 3.1 : Abtastung eines Bildsignals auf einem Kreisbogen.

Die Helligkeitswerte werden durch x_1, \dots, x_N gekennzeichnet. Es gelte ferner, daß die Korrelation nur vom Abstand zweier Bildpunkte abhängig sei. Dann ist

$$E [x_1 \ x_2] = E [x_1 \ x_N] \ ,$$

$$E [x_1 \ x_3] = E [x_1 \ x_{N-1}] \quad \text{usw.} \ ,$$

so daß die Kovarianzmatrix $R_{xx} = E[\underline{x} \underline{x}^T]$ genau die Form einer symmetrischen zyklischen Matrix nach Gl. 3.1.5 annimmt. Dem Verfasser ist nicht bekannt, ob eine solche Abtaststruktur jemals untersucht wurde.

Dieses Beispiel dürfte aber deutlich zeigen, daß es nicht nur wichtig ist, für einen gegebenen Prozeß eine möglichst effektive Transformation zu suchen, sondern daß es genau so interessant ist, den Prozeß - z.B. durch Wahl der Zuordnung zu den Abtastpunkten - an die Eigenschaften gegebener Transformationen anzupassen.

3.2 Die Diskrete Moving-Average-1-Transformation (DMA1T)

Die Eigenvektoren des Moving-Average-1-Prozesses nach Gl. 2.5.18 sollen die Basisvektoren \underline{a}_k^T der Transformation \underline{A}_{DMA1T} bilden, d.h.

$$\underline{a}_k^T = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \left(\dots, \sin \frac{k\pi n}{N+1}, \dots \right) ; \quad k, n = 1, \dots, N \quad (3.2.1)$$

Daß die verschiedenen Basisvektoren $\underline{a}_1^T, \dots, \underline{a}_N^T$ orthogonal sind, ist sehr einfach zu zeigen, da sie ja die Eigenvektoren einer reellen symmetrischen Matrix sind, für die folgender Satz gilt /10/:

Jede reelle symmetrische Matrix besitzt reelle Eigenwerte und reelle Eigenvektoren, die bei verschiedenen Eigenwerten auch zueinander orthogonal sind.

Die DMA1T kann unter Anwendung der DFT bzw. FFT mit einem schnellen Algorithmus implementiert werden; das Verfahren wird im Anhang (Abschnitt 1.A) beschrieben.

Die DMA1T ist in der Lage, die Kovarianzmatrizen sämtlicher MA-1-Prozesse (unabhängig von dem speziellen AKF-Wert $R(1)$!) exakt in eine Diagonalmatrix zu überführen.

Dies ist ein Sonderfall unter den Prozessen mit Toeplitz-Matrix, denn i.a. sind die Eigenvektoren von der Prozeßstatistik abhängig.

Es tauchen nun folgende Fragen auf, wie:

Ist die Kovarianzmatrix des MA-1-Prozesses die einzige, die durch die DMA1T diagonalisiert wird? Wie geeignet ist die DMA1T bei MA- oder AR-Prozessen höherer Ordnung?

Zur Beantwortung dieser Fragen benötigen wir einen Satz aus der Matrizenrechnung /10/:

Eine Matrix \underline{B} besitze die Eigenwerte λ_k und die Eigenvektoren $\underline{u}^{(k)}$ ($k=1, \dots, N$). Dann weist die Matrix \underline{C} ,

$$\underline{C} = b_0 \underline{I} + b_1 \underline{B} + \dots + b_m \underline{B}^m, \quad (3.2.2)$$

(\underline{I} : Einheitsmatrix)

die gleichen Eigenvektoren wie \underline{B} auf und die Eigenwerte

$$\lambda_{k,C} = b_0 + b_1 \lambda_k + \dots + b_m \lambda_k^m. \quad (3.2.3)$$

Der Wert m ist beliebig; jedoch ist eine Erhöhung von m über $m=N-1$ hinaus nicht sinnvoll, da wegen des Theorems von Cayley-Hamilton /10/ alle höheren Potenzen von \underline{B} durch eine Linearkombination von $\underline{I}, \dots, \underline{B}^{N-1}$ dargestellt werden können.

Die DMA1T diagonalisiert daher nicht nur die Matrix \underline{R}_{xx} des MA-1-Prozesses (Gl. 2.5.2), sondern auch alle anderen Matrizen der Form

$$\underline{R}_{DMA1T} = \sum_{l=0}^{N-1} b_l \underline{R}_{xx}^l. \quad (3.2.4)$$

Die Potenz \underline{R}_{xx}^2 hat z.B. folgendes Aussehen:

$$\underline{R}_{xx}^2 = \begin{pmatrix} 1+r^2 & 2r & r^2 & 0 & \dots & 0 \\ 2r & 1+2r^2 & 2r & r^2 & 0 & \dots & 0 \\ r^2 & 2r & 1+2r^2 & 2r & r^2 & & 0 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & r^2 & 2r & 1+r^2 \end{pmatrix} \quad (3.2.5)$$

Die Matrix \underline{R}_{xx}^2 hat nahezu die Struktur der Kovarianzmatrix eines MA-2-Prozesses (d.h. gleich große Elemente auf der Hauptdiagonalen und den beiden Parallelen dazu); lediglich die beiden Elemente in den Ecken der Hauptdiagonalen weichen davon ab. Bei Erhöhung

$(0, \pi)$ verteilt und die Phasenlagen der beiden Vektoren stimmen für $r \rightarrow 1$ sogar exakt überein ($\varphi = \Omega_k/2$; vgl. Gl. 3.3.3 mit Gl. 2.5.30 und Gl. 2.5.32). Die Betrachtungen aus Abschnitt 2.5.2 zeigen damit, daß die Ähnlichkeit der Eigenvektoren mit den Basisvektoren der DCT nicht nur für das in /12/ numerisch berechnete Beispiel zutrifft, sondern für sämtliche AR-1-Prozesse mit $r \rightarrow 1$.

Wir wollen nun wieder die Struktur der Matrizen \underline{R}_{DCT} suchen, die durch die Transformation \underline{A}_{DCT} diagonalisiert werden. Es ist nahelegend zu vermuten, daß die Matrizen \underline{R}_{DCT} durch eine Untermenge der zyklischen Matrizen gebildet werden, da ja die DCT direkt mittels der DFT berechnet werden kann /12/, die ihrerseits zyklische Matrizen diagonalisiert. Aber diese Vermutung trifft für die DCT ebensowenig zu wie sie für die DMA1T zutrifft, die ja ebenfalls mittels der DFT berechnet werden kann. Aus diesem Grunde ist auch die Beweisführung von Shanmugam in /6/ über das asymptotisch optimale Verhalten der DCT als falsch zu betrachten, da dort für \underline{R}_{DCT} zyklische Matrizen zugrunde gelegt werden.

Zur Bestimmung der Matrizenstruktur von \underline{R}_{DCT} verwenden wir die Methoden aus Abschnitt 2.5.1 zur Berechnung der Eigenvektoren des MA-1-Prozesses, nur beschreiten wir hier den umgekehrten Weg: Diesmal seien die Eigenvektoren (Basisvektoren der DCT) gegeben, gesucht ist die Struktur der Kovarianzmatrix des dazugehörigen Prozesses:

Die Eigenwertgleichung

$$\underline{R}_{DCT} \underline{u} = \lambda \underline{u} \quad (3.3.4)$$

enthält ein System von N skalaren Gleichungen; die n-te lautet mit $(\underline{R}_{DCT})_{n1} = R_{n,1}$:

$$R_{n,1} u_1 + R_{n,2} u_2 + \dots + (R_{n,n} - \lambda) u_n + \dots + R_{n,N} u_N = 0 \quad (3.3.5)$$

$n=1, \dots, N$

Die Eigenvektoren \underline{u} sind identisch mit den Basisvektoren \underline{a}_k^T der DCT, also Cosinus-Funktionen. Daher können wir den Ansatz nach Gl. 3.3.5 erheblich vereinfachen zu

$$r u_{n-1} + (1-\lambda) u_n + r u_{n+1} = 0 \quad ; \quad n=2, \dots, N-1 \quad , \quad (3.3.6)$$

da wir aus Abschnitt 2.5.1 wissen, daß die Differenzengleichung Gl.3.3.6 von jeder Cosinus-Funktion beliebiger Phasenlage erfüllt wird. Mit der Substitution

$$\lambda = 1 + 2r \cos \Omega \quad (3.3.7)$$

wird Gl. 3.3.6 zu

$$u_{n-1} - u_n 2 \cos \Omega + u_{n+1} = 0 \quad ; \quad n=2, \dots, N-1 \quad ; \quad (3.3.8)$$

diese Differenzengleichung wird durch jede Lösung der Form

$$u_n = \cos(n\Omega - \varphi) \quad (3.3.9)$$

erfüllt. Die erste und letzte Gleichung im System Gl. 3.3.4 weichen von der Struktur nach Gl. 3.3.6 ab. Diese beiden Gleichungen müssen so gewählt werden, daß für u gerade die Eigenfrequenzen und Phasenlagen der DCT-Basisvektoren auftreten:

Mit der ersten Gleichung wird die Phasenlage festgelegt; wir machen dazu den Ansatz

$$b u_1 + u_2 = 0 \quad (3.3.10)$$

und bestimmen b so, daß entsprechend Gl. 3.3.3 die Bedingung

$$u_n = \cos(n\Omega - \frac{\Omega}{2}) \quad (3.3.11)$$

erfüllt ist:

$$b \cos \frac{\Omega}{2} + \cos \frac{3}{2} \Omega = 0 \quad ;$$

$$b = 1 - 2\cos \Omega \quad (3.3.12)$$

Mit der N-ten Gleichung werden die Eigenfrequenzen $\Omega = \Omega_k$ festgelegt, die uns durch die Gl. 3.3.2 vorgeschrieben sind. Der Ansatz

$$u_{N-1} + c u_N = 0 \quad (3.3.13)$$

führt mit Gl.3.3.11 auf

$$\cos \left[\Omega_k \left(N - \frac{3}{2} \right) \right] + c \cos \left[\Omega_k \left(N - \frac{1}{2} \right) \right] = 0 \quad (3.3.14)$$

$$\underline{R}_{\text{DCT}}^* = b_0 \underline{I} + b_1 \underline{R}_{\text{DCT}} + \dots + b_{N-1} \underline{R}_{\text{DCT}}^{N-1} \quad (3.3.21)$$

gegeben (vgl. Abschnitt 3.2). Die Matrix $\underline{R}_{\text{DCT}}^2$ z.B. hat das Aussehen

$$\underline{R}_{\text{DCT}}^2 = \begin{pmatrix} (1+r)^2+r^2 & (1+r)r+r^2 & r^2 & 0 & \dots \\ (1+r)r+r^2 & 1+2r^2 & 2r & r^2 & 0 & \dots \\ r^2 & 2r & 1+2r^2 & 2r & r^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (3.3.22)$$

und besitzt damit nahezu die Struktur der Kovarianzmatrix eines MA-2-Prozesses; lediglich je 3 Elemente in den Ecken der Hauptdiagonalen weichen davon ab. Wie bei den Matrizen vom Typ $\underline{R}_{\text{DMA1T}}$ (vgl. Abschnitt 3.2) bilden sich mit Erhöhen der Potenz von $\underline{R}_{\text{DCT}}^1$ zunehmend mehr "störende" Elemente in den Ecken der Hauptdiagonalen; die übrigen Elemente entsprechen der Struktur einer Toeplitz-Matrix für einen MA-Prozeß der Ordnung 1. Aus dieser Überlegung ergibt sich:

Eine Toeplitz-Matrix ist einer Matrix vom Typ $\underline{R}_{\text{DCT}}$ in der Struktur ähnlich, kann aber durch die DCT nicht exakt diagonalisiert werden.

3.4 Die Diskrete Sinus-Transformation (DSINT)

Die Transformationsmatrix $\underline{A}_{\text{DSINT}}$ wird durch die Basisvektoren

$$\underline{a}_k^T = \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} \left(\dots, \sin \frac{(2n-1)k\pi}{2N}, \dots \right) ; k, n=1, \dots, N \quad (3.4.1)$$

festgelegt. Sie wurde bereits in /12/ neben der DCT erwähnt, wobei dort aber nicht auf den gegenüber der DCT veränderten Laufbereich von k hingewiesen wurde. Die DSINT kann unter Anwendung der DFT bzw. FFT mit einem schnellen Algorithmus implementiert werden; das Verfahren wird im Anhang (Abschnitt 2.A) beschrieben.

Die DSINT bildet ein Äquivalent zur DCT: Sie ist besonders zur Verarbeitung von AR-1-Prozessen mit sehr hoher negativer Korrelation ($r \rightarrow -1$) geeignet. Dies wird deutlich, wenn man ihre Basis-

vektoren in der Form

$$\underline{a}_k^T = \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} \left(\dots, \sin\left(n\Omega_k - \frac{\Omega_k}{2}\right), \dots \right) ; \quad n=1, \dots, N \quad (3.4.2)$$

wobei

$$\Omega_k = \frac{k\pi}{N} ; \quad k=1, \dots, N \quad (3.4.3)$$

mit den Eigenvektoren der Kovarianzmatrix eines AR-1-Prozesses mit $r < 0$ vergleicht. Diese Eigenvektoren $\underline{u}^{(k)}$ nach Gl. 2.5.30 und Gl. 2.5.31 können auch in der Form

$$u_n = \sin(n\Omega - \varphi) ; \quad n=1, \dots, N \quad (3.4.4)$$

mit

$$\tan\varphi = \frac{|r| \sin\Omega}{1 + |r| \cos\Omega} , \quad r < 0 \quad (3.4.5)$$

geschrieben werden. Für $r \rightarrow -1$ nimmt der Phasenverlauf $\varphi(\Omega)$ genau die Funktion $\varphi = \Omega/2$ an, die auch für die DSINT-Basisvektoren nach Gl. 3.4.2 gültig ist (vgl. Bild 3.2).

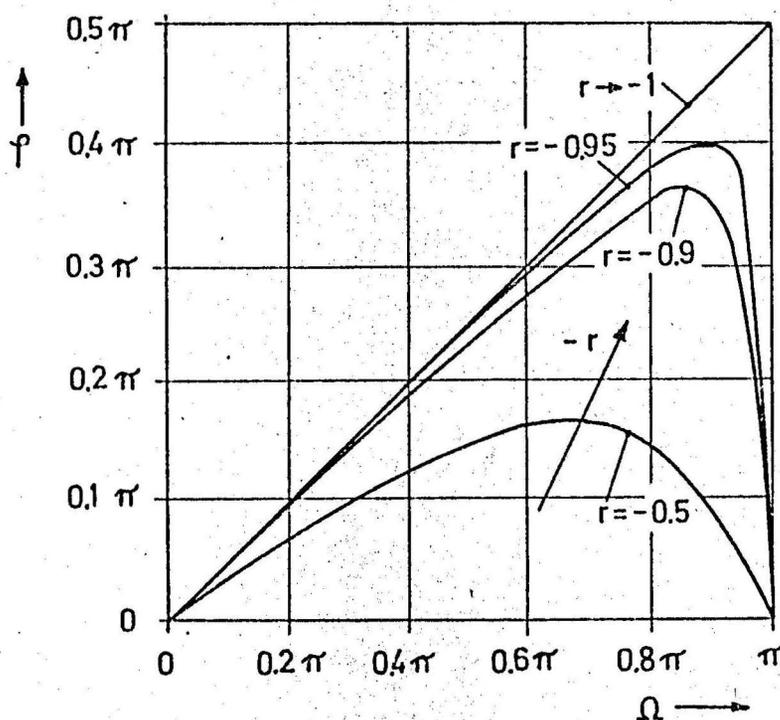


Bild 3.2 : Phasenwinkel φ der Eigenvektoren der Kovarianzmatrix eines AR-1-Prozesses in Abhängigkeit von der Frequenz Ω für negative Korrelationen $r < 0$.

In analoger Weise wie bei der DCT diskutiert (vgl. Abschnitt 3.4) nähern sich für $r \rightarrow -1$ die Eigenvektoren $\underline{u}^{(k)}$ den Basisvektoren \underline{a}_k^T der DSINT. Daher ist für solche negativ korrelierte Prozesse die DSINT der LKT nur sehr wenig unterlegen.

Gesucht ist nun wieder die Struktur der Matrizen \underline{R}_{DSINT} , die durch die Transformation \underline{A}_{DSINT} diagonalisiert werden. Dazu gehen wir ganz analog zu Abschnitt 3.3 vor (Untersuchung der DCT), nur sind hier die beiden Randbedingungen im Eigenwertgleichungssystem der DSINT anzupassen:

Mit der ersten Gleichung wird die Phasenlage gemäß Gl. 3.4.2 zu

$$u_n = \sin\left(n\Omega - \frac{\Omega}{2}\right) \quad (3.4.6)$$

festgelegt; wir machen dazu den Ansatz

$$b u_1 + u_2 = 0 \quad (3.4.7)$$

Daraus folgt

$$b \sin \frac{\Omega}{2} + \sin \frac{3}{2}\Omega = 0 \quad ;$$
$$b = -1 - 2\cos \Omega \quad (3.4.8)$$

Mit der N-ten Gleichung sind die Eigenfrequenzen $\Omega = \Omega_k$ nach Gl. 3.4.3 einzuhalten. Wir machen den Ansatz

$$u_{N-1} + c u_N = 0 \quad , \quad (3.4.9)$$

der mit Gl. 3.4.3 und Gl. 3.4.6 auf die gesuchte Größe

$$c = -1 - 2\cos \Omega_k \quad , \quad k=1, \dots, N \quad (3.4.10)$$

führt.

Entsprechend zu den Gln. 3.3.18 bis 3.3.20 aus Abschnitt 3.3 erhalten wir damit die gesuchte Matrix \underline{R}_{DSINT} , die durch die DSINT exakt diagonalisiert wird:

$$\underline{R}_{-xx} = \frac{6^2}{\epsilon} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ & & & & \ddots & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & N \end{pmatrix} \quad (3.5.2)$$

Die DWPT kann also Matrizen der Struktur nach Gl. 3.5.2 exakt diagonalisieren.

3.6 Die Diskrete Walsh-Transformation (DWT)

Zum Abschluß soll eine Transformation untersucht werden, deren Basisvektoren nicht auf Sinus-Cosinus-Funktionen zurückzuführen sind. Die Basisvektoren der Transformation \underline{A}_{DWT} bestehen aus einem System abgetasteter orthogonaler Rechteckfunktionen. Die Definitions- und Darstellungsmöglichkeiten dieser Basisvektoren sind in der Literatur eingehend diskutiert /14,15/, so daß hier nicht weiter darauf eingegangen werden soll. Es interessiert nun die Struktur der Matrix \underline{R}_{DWT} , die durch die DWT diagonalisiert wird: Die Matrix \underline{R}_{DWT} mit den Elementen R_{ij} ($i, j=0, 1, \dots, N-1$) ist eine dyadische Matrix /16/, die durch einen vorgegebenen Zeilenvektor

$$(R(0), R(1), \dots, R(N-1))^T$$

auf folgende Weise definiert wird: Die Elemente von \underline{R}_{DWT} sind durch

$$R_{ij} = R(i \oplus j) \quad (3.6.1)$$

gegeben, wobei $i \oplus j$ die bitweise modulo-2-Addition (Exklusiv-Oder-Addition) der Zahlen i und j in ihrer binären Darstellung bedeutet, also

$$i \oplus j = \sum_{n=0}^{\infty} (i_n \oplus j_n) 2^n ; \quad \text{wobei } i = \sum_{n=0}^{\infty} i_n 2^n, \quad j = \sum_{n=0}^{\infty} j_n 2^n. \quad (3.6.2)$$

Für $N=4$ nimmt die Matrix \underline{R}_{DWT} folgendes Aussehen an:

$$\underline{R}_{DWT} = \begin{pmatrix} R(0) & R(1) & R(2) & R(3) \\ R(1) & R(0) & R(3) & R(2) \\ R(2) & R(3) & R(0) & R(1) \\ R(3) & R(2) & R(1) & R(0) \end{pmatrix} ; N=4 \quad (3.6.3)$$

Für N=8 erkennt man recht gut die auftretenden Symmetrien in der Kovarianzmatrix (aus Übersichtsgründen sind nur die Indices 1 der Elemente R(l) angegeben):

$$\underline{R}_{DWT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; N=8 \quad (3.6.4)$$

Nicht nur die Haupt-, sondern auch die Nebendiagonale weist gleich große Elemente auf; außerdem treten auch Symmetrien parallel zu diesen Diagonalen auf (angedeutet durch gestrichelte Linien). Zum überwiegenden Teil aber sind die Elemente auf Parallelen zur Hauptdiagonalen jeweils unterschiedlich groß. Daraus ergibt sich:

Matrizen vom Typ \underline{R}_{DWT} weichen in ihrer Struktur stark von der einer Toeplitz-Matrix ab; eine Toeplitz-Matrix kann daher durch die DWT nicht diagonalisiert werden.

Die von einer Toeplitz-Matrix stark abweichende Struktur der Matrix \underline{R}_{DWT} läßt vermuten, daß sich die Eigenschaften der DWT zur Verarbeitung von Toeplitzmatrizen in wesentlichen Punkten von denen "sinusförmiger" Transformationen unterscheiden. In den Abschnitten 4 und 5 wird dieser Gesichtspunkt noch eingehender erörtert werden.

3.7 Vergleich von Matrizenklassen

Die vorausgegangenen Abschnitte haben gezeigt, daß es eine Reihe von Matrixstrukturen \underline{R} gibt, bei denen die Matrixelemente R_{ij} ($i, j=0, 1, \dots, N-1$) ausschließlich aus dem ersten Zeilenvektor der Matrix \underline{R} mit den Komponenten $R(0), \dots, R(N-1)$ hervorgehen.

Beispiele dafür sind:

$$\text{Toeplitz-Matrix: } R_{ij} = R(|i-j|) \quad (3.7.1)$$

$$\text{Zyklische Matrix: } R_{ij} = R([j-i] \bmod N) \quad (3.7.2)$$

$$\text{Dyadische Matrix: } R_{ij} = R(i \oplus j) \quad (3.7.3)$$

Jede vorgegebene Matrix nach Gl. 3.7.1 bis 3.7.3 kann auf Grund ihrer Struktur sofort der jeweiligen Matrizenklasse zugeordnet werden. Daneben gibt es aber auch eine Reihe von Matrizen \underline{R} wie $\underline{R}_{\text{DMA1T}}$, $\underline{R}_{\text{DCT}}$ und $\underline{R}_{\text{DSINT}}$ (vgl. Abschnitt 3.2...3.4), die allein unter Kenntnis ihrer Struktur i.a. nicht unterschieden werden können, da in diesen Fällen die Matrixelemente R_{ij} erheblich mehr als nur N verschiedene Werte aufweisen dürfen. Eine vergleichende Betrachtung beider Gruppen ist möglich, wenn wir die jeweilige Matrizenklasse allein durch ihre Basis \underline{A} definieren:

Def.: Es sei eine feste Basis (Transformation) \underline{A} gegeben.

Eine Matrizenklasse $C_{\underline{A}}$ besteht dann aus der Menge aller Matrizen $\underline{R}_{\underline{A}}$, die durch die vorgegebene Basis \underline{A} in eine Diagonalmatrix im Bildbereich überführt werden.

Im Bild 3.3 sind Beispiele verschiedener Matrizenklassen angegeben. Aus dieser Übersicht wird noch einmal deutlich, daß ausgerechnet für den uns interessierenden Sonderfall von Toeplitz-Matrizen keine allgemeine Basis \underline{A} existiert*, während dagegen z.B. jede zyklische Matrix durch die DFT diagonalisiert wird, wobei diese Transformation sogar mit einem schnellen Algorithmus durchgeführt werden kann. Die optimale Verarbeitung von Prozessen mit Toeplitz-Kovarianzmatrix bereitet daher weit größere Probleme als die Behandlung von Prozessen mit z.B. zyklischer oder dyadischer Kovarianzmatrix.

* abgesehen von der Untermenge aller Kovarianzmatrizen \underline{R}_{xx} eines MA-1-Prozesses

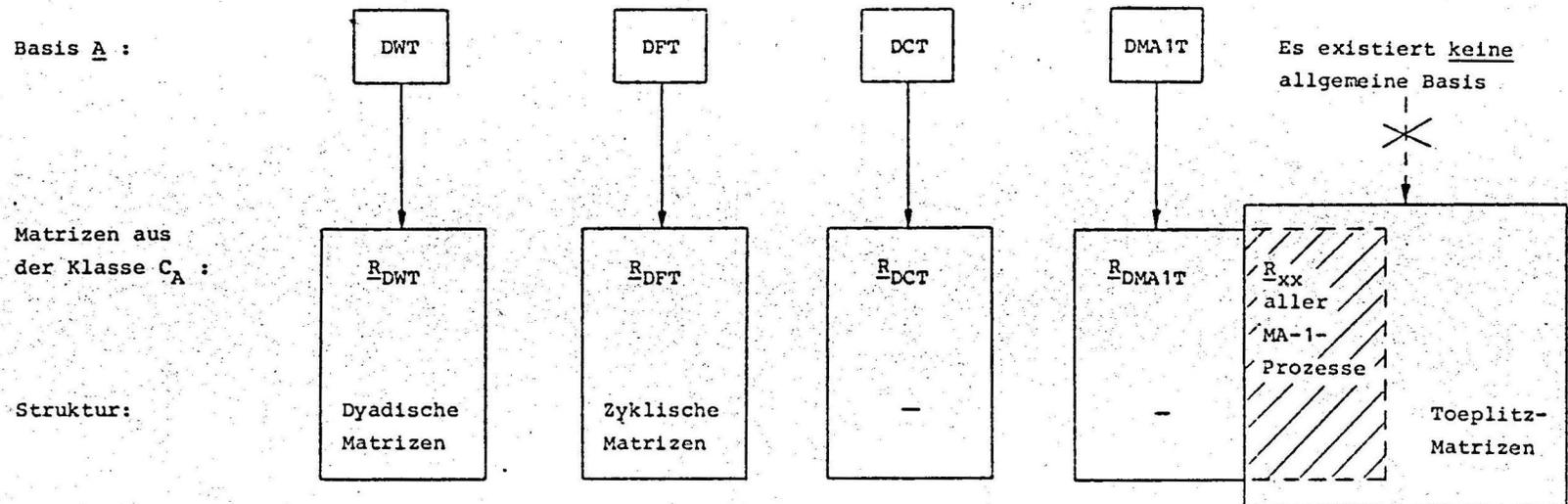


Bild 3.3 : Beispiele verschiedener Matrizenklassen.

4. Asymptotische Eigenschaften im Original- und Bildbereich

Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich stets auf Transformationen mit endlicher Blocklänge N . Beim Übergang auf wachsende Blocklängen $N \rightarrow \infty$ zeigt sich, daß eine Reihe von Transformationen eine Toeplitz-Matrix zwar nicht exakt, aber doch asymptotisch in eine Diagonalmatrix im Bildbereich überführen können. Diese Transformationen sollen als asymptotisch optimal bezeichnet werden. Dieser Abschnitt enthält wichtige Aussagen zu dem asymptotischen Verhalten der bisher eingeführten orthogonalen Transformationen; diese Aussagen beruhen auf Betrachtungen der Kovarianzmatrizen sowohl im Original- als auch im Bildbereich.

4.1 Asymptotisch äquivalente Matrizenfolgen

Die Untersuchungen im Abschnitt 3 zeigten, daß eine Reihe von verschiedenen Matrizenklassen C_A ($C_A :=$ Menge aller Matrizen \underline{R}_A , die durch \underline{A} diagonalisiert werden) Matrixstrukturen aufweisen, die der einer Toeplitz-Matrix zumindest in einem bestimmten Sinne ähnlich sind. Daher ist zu vermuten, daß eine Toeplitz-Matrix durch diese Transformationen \underline{A} wenn nicht exakt, so doch näherungsweise in eine Diagonalmatrix im Bildbereich überführt werden kann. In diesem Abschnitt wird ein Maß für die "Ähnlichkeit" solcher Matrixstrukturen definiert und die Folgerungen für das asymptotische Verhalten bei wachsender Blocklänge werden angegeben.

4.1.1 Definitionen und Beispiele

Wir betrachten zwei Matrizenfolgen $\{\underline{R}_1^{(N)}\}$ und $\{\underline{R}_2^{(N)}\}$ bei wachsender Blocklänge N . $\{\underline{R}_1^{(N)}\}$ sei z.B. die Folge der Kovarianzmatrizen, die zu einem festen vorgegebenen MA-Prozeß der Ordnung M gehören. $\{\underline{R}_2^{(N)}\}$ sei dann z.B. eine Folge von zyklischen Matrizen, deren Elemente für jeden Wert N so gewählt wurden, daß die Matrix $\underline{R}_2^{(N)}$ mit $\underline{R}_1^{(N)}$ möglichst gut übereinstimmt, d.h., daß $\underline{R}_2^{(N)}$ die Matrix $\underline{R}_1^{(N)}$ möglichst gut approximiert. Der "Approximationsfehler" wird durch die Differenzmatrix

$$\underline{E}^{(N)} = \underline{R}_1^{(N)} - \underline{R}_2^{(N)} \quad (4.1.1)$$

mit den Elementen e_{kn} beschrieben.

Es wird nun definiert /17/:

Zwei Matrizenfolgen $\{\underline{R}_1^{(N)}\}$ und $\{\underline{R}_2^{(N)}\}$ sind asymptotisch äquivalent, wenn die Hilbert-Schmidt Norm ihrer Differenz,

$$\left| \underline{E}^{(N)} \right| = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N e_{kn}^2 \right]^{1/2}, \quad (4.1.2)$$

die Bedingung

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \underline{E}^{(N)} \right| = 0 \quad (4.1.3)$$

erfüllt.

Kann man zeigen, daß zwei Matrizenfolgen asymptotisch äquivalent sind, so können eine Reihe von Aussagen, die z.B. für die Folge $\{\underline{R}_2^{(N)}\}$ relativ leicht anzugeben sind, dann auch auf die "schwierigere" Folge $\{\underline{R}_1^{(N)}\}$ übertragen werden. Bevor wir näher darauf eingehen, sollen einige Beispiele für asymptotisch äquivalente Matrizenfolgen angegeben werden:

Aufgabe: Es liege ein MA-Prozeß der Ordnung M vor. Die zu diesem Prozeß mit den von Null verschiedenen AKF-Werten $R(0) \dots R(M)$ gehörende Toeplitz-Matrizenfolge $\{\underline{R}_T^{(N)}\}$ soll durch folgende Matrizenfolgen approximiert werden:

$\{\underline{R}_{DFT}^{(N)}\}$: Matrizen, die durch die DFT diagonalisiert werden.

$\{\underline{R}_{DCT}^{(N)}\}$: Matrizen, die durch die DCT diagonalisiert werden.

$\{\underline{R}_{DSINT}^{(N)}\}$: Matrizen, die durch die DSINT diagonalisiert werden.

Im Bild 4.1 ist für das Beispiel $M=7$ gezeigt, wie die Aufgabe gelöst werden kann. Die von Null verschiedenen Elemente der dargestellten Matrizen, $R(i)$; $i=0, \dots, M$, sind aus Übersichtsgründen einfach durch den Index i gekennzeichnet.

Die Matrix $\underline{R}_{DFT}^{(N)}$ wird allein durch ihren ersten Zeilenvektor bestimmt, der hier so gewählt wurde, daß die Elemente in der Umgebung der Hauptdiagonalen von $\underline{R}_{DFT}^{(N)}$ mit den entsprechenden Elementen der Toeplitz-Matrix $\underline{R}_T^{(N)}$ übereinstimmen.

Für die Matrizenfolgen $\{\underline{R}_{DCT}^{(N)}\}$ bzw. $\{\underline{R}_{DSINT}^{(N)}\}$ kann man entsprechend Gl. 3.3.21 die Koeffizienten b_0, b_1, \dots, b_7 der Matrizen-Potenzreihe so wählen, daß die aus der Linearkombination resultierende Matrix $\underline{R}_{DCT}^{(N)}$ bzw. $\underline{R}_{DSINT}^{(N)}$ genau mit der Toeplitz-Matrix $\underline{R}_T^{(N)}$ über-

Diese Aussage gilt zunächst nur für Matrizenfolgen, die einem MA-Prozeß endlicher Ordnung (Prozeßmodell nur mit Nullstellen in der Übertragungsfunktion) zugeordnet sind. Bei Prozessen, die durch ein Modell beschrieben werden, das auch oder nur Pole aufweist, verschwindet die AKF $R(i)$ nicht bei endlichen Werten i . Für derartige Toeplitz-Matrizenfolgen $\{R_T^{(N)}\}$ können die Verfahren zur Konstruktion asymptotisch äquivalenter Matrizenfolgen aber entsprechend modifiziert werden. Dies soll hier jedoch nicht weiter erläutert werden; ein Beispiel für zyklische Matrizenfolgen zur Approximation von Toeplitz-Matrizenfolgen findet man in /18/.

Mit diesen Überlegungen ist folgender Satz gültig:

* Es sei eine Transformation A vorgegeben (wobei A entweder die DFT, DCT, DSINT oder die DMA1T sei). Dann kann zu jeder Toeplitz-Matrizenfolge $\{R_T^{(N)}\}$ eine asymptotisch äquivalente Matrizenfolge $\{R_A^{(N)}\}$ angegeben werden.

Die Folgerungen, die sich aus diesem Satz ergeben, sind im nächsten Abschnitt aufgeführt. Zur Behandlung dieses Abschnittes benötigen wir aber eine etwas engere Fassung des Begriffes 'asymptotisch äquivalente Matrizenfolgen'. Wir wollen sagen, zwei Matrizenfolgen sind asymptotisch äquivalent im engeren Sinne, wenn nicht nur die Norm $|\underline{E}^{(N)}|$ (Gl.4.1.2), sondern auch die Betragsnorm

$$|\underline{E}^{(N)}| = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N |e_{kn}| \quad (4.1.4)$$

mit wachsendem N gegen Null geht, d.h.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\underline{E}^{(N)}| = 0 \quad (4.1.5)$$

Für den hier schon untersuchten Sonderfall der Approximation von Toeplitz-Matrizenfolgen bedeutet die Forderung Gl. 4.1.5 keinerlei Einschränkung:

Liegt ein MA-Prozeß endlicher Ordnung vor, so ist auch die Summe der Beträge der störenden Eckelemente in der approximierenden Matrizenfolge endlich und unabhängig von N, so daß auch $|\underline{E}^{(N)}|$ mit wachsendem N gegen Null geht. Liegt ein Prozeß vor, für den die AKF $R(i)$ bei endlichen Werten i nicht verschwindet, so geht die Norm $|\underline{E}^{(N)}|$ ebenfalls gegen Null, wenn die AKF absolut summierbar ist (vgl. Abschnitt 2.1). Dies kann z.B. für eine approxi-

mierende Matrizenfolge zyklischer Bauart mit den entsprechenden Schritten gezeigt werden, wie sie für die Norm $|\underline{E}^{(N)}|$ in /18/ bei quadratisch summierbarer AKF angegeben wurden.

Für alle uns interessierenden Toeplitz-Matrizenfolgen ist daher der Satz * nicht nur für die asymptotische Äquivalenz bezüglich der Norm $|\underline{E}^{(N)}|$, sondern auch bezüglich der Norm $|\underline{E}^{(N)}|$ gültig.

4.1.2 Asymptotische Eigenschaften der Kovarianzmatrix im Bildbereich

Werden zwei asymptotisch äquivalente Matrizenfolgen $\{\underline{R}_1^{(N)}\}$ und $\{\underline{R}_2^{(N)}\}$ mit der gleichen Transformation \underline{A} verarbeitet, so ist zu erwarten, daß die beiden Kovarianz-Matrizenfolgen im Bildbereich auch in irgendeiner Weise äquivalent sind. Wir wollen nun untersuchen, welche Aussagen genau möglich sind.

Die Kovarianzmatrizen im Bildbereich seien $\underline{B}_1^{(N)}$ und $\underline{B}_2^{(N)}$, wobei

$$\underline{B}_i^{(N)} = \underline{A} \underline{R}_i^{(N)} \underline{A}^T \quad ; \quad i=1,2 \quad . \quad (4.1.6)$$

Die Abweichung zwischen $\underline{B}_1^{(N)}$ und $\underline{B}_2^{(N)}$ werde analog zum Originalbereich durch die Fehlermatrix

$$\underline{F}^{(N)} = \underline{B}_1^{(N)} - \underline{B}_2^{(N)} \quad (4.1.7)$$

beschrieben. Mit den Gln. 4.1.1, 4.1.6 und 4.1.7 folgt sofort

$$\underline{F}^{(N)} = \underline{A} \underline{E}^{(N)} \underline{A}^T \quad . \quad (4.1.8)$$

Es seien a_{ij} , e_{ij} bzw. f_{ij} ($i, j=1, \dots, N$) die Elemente der Matrizen \underline{A} , $\underline{E}^{(N)}$ bzw. $\underline{F}^{(N)}$. Dann gilt für ein Element der Fehlermatrix

$$f_{il} = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} e_{jn} a_{ln} \quad . \quad (4.1.9)$$

Der Betrag von f_{il} soll nun abgeschätzt werden:

$$|f_{il}| \leq \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^N |a_{ij}| |e_{jn}| |a_{ln}| \quad . \quad (4.1.10)$$

Die Elemente a_{ij} der Basisvektoren können in ihrem Betrage leicht abgeschätzt werden, da für alle hier betrachteten (orthonormalen) Transformationen die Beziehung

$$|a_{ij}| \leq \frac{c}{\sqrt{N}} \quad , \quad c = \text{const.} \quad (4.1.11)$$

gültig ist (vgl. Gl. 3.1.2, 3.2.1, 3.3.1, 3.4.1). Damit wird

$$|f_{il}| \leq \frac{c^2}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^N |e_{jn}| \quad , \quad (4.1.12)$$

oder mit Gl. 4.1.4

$$|f_{il}| \leq c^2 |\underline{E}^{(N)}| \quad . \quad (4.1.13)$$

Sind nun die beiden Matrizenfolgen $\{\underline{R}_1^{(N)}\}$ und $\{\underline{R}_2^{(N)}\}$ asymptotisch äquivalent in engerem Sinne (vgl. Abschnitt 4.1.1), so geht mit wachsendem N nicht nur die Norm $|\underline{E}^{(N)}|$, sondern auch $|f_{il}|$ gegen Null:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |f_{il}| = 0 \quad ; \quad \forall i, l \quad (4.1.14)$$

Aus Gl. 4.1.14 folgt damit unmittelbar folgender Satz:

Zwei Matrizenfolgen $\{\underline{R}_1^{(N)}\}$ und $\{\underline{R}_2^{(N)}\}$ seien asymptotisch äquivalent im engeren Sinne. Bei beliebiger vorgegebener Transformation \underline{A} stimmen dann die Kovarianzmatrizen im Bildbereich, $\underline{B}_1^{(N)}$ und $\underline{B}_2^{(N)}$, für jedes Element asymptotisch überein.

Die Äquivalenz im Bildbereich ist also stärker als im Originalbereich, da asymptotisch äquivalente Matrizenfolgen im Originalbereich durchaus eine (endliche) Zahl von Fehlerelementen e_{jn} aufweisen können, deren Beträge mit $N \rightarrow \infty$ nicht verschwinden (vgl. Abschnitt 4.1.1).

Aus dem angegebenen Satz ergibt sich unmittelbar eine wichtige Folgerung für unsere Untersuchungen der suboptimalen Transformationen:

Eine der beiden asymptotisch äquivalenten Matrizenfolgen $\{\underline{R}_1^{(N)}\}$ und $\{\underline{R}_2^{(N)}\}$ werde durch \underline{A} exakt diagonalisiert. Dann werden die Matrizen der anderen Folge durch \underline{A} zumindest asymptotisch in Diagonalmatrizen überführt. Mit dem Satz * aus Abschnitt 4.1.1 folgt dann sofort:

Jede Toeplitz-Matrix wird durch folgende Transformationen mit wachsender Dimension N asymptotisch in eine Diagonalmatrix überführt: DFT, DCT, DSINT und DMA1T.

Diese Transformationen werden daher als asymptotisch optimal bezeichnet, d.h. sie haben asymptotisch die Wirkung einer Loève-Karhunen-Transformation, die speziell auf den zu verarbeitenden Prozeß mit Toeplitz-Kovarianzmatrix zugeschnitten ist.

Die Eigenschaft, eine Toeplitz-Matrix asymptotisch in eine Diagonalmatrix zu überführen, ist für die DFT schon gezeigt worden, wenn auch erst in jüngster Zeit (/19/, 1975). Zu den anderen Transformationen sind sonst keine weiteren vergleichbaren Untersuchungen bekannt.

Der angegebene Satz legt die Vermutung nahe, daß sämtliche Transformationen \underline{A} , die auf Sinus-Cosinus-Funktionen beruhen, asymptotisch optimal sind. Im Abschnitt 4.2 wird gezeigt werden, ob und unter welchen Bedingungen dies tatsächlich der Fall ist.

4.1.3 Asymptotische Eigenschaften der Eigenwertverteilungen

Asymptotisch äquivalente Matrizenfolgen zeigen nicht nur für ihre Kovarianzmatrizen im Bildbereich ein äquivalentes Verhalten, sondern auch für eine Reihe weiterer wichtiger Eigenschaften.

Besonders erwähnenswert ist das asymptotische Verhalten ihrer Eigenwertverteilungen. Es gilt folgende Aussage /17/:

Sind zwei Matrizenfolgen $\{\underline{R}_1^{(N)}\}$ und $\{\underline{R}_2^{(N)}\}$ asymptotisch äquivalent, so sind die Eigenwerte der Matrizen $\underline{R}_1^{(N)}$ und $\underline{R}_2^{(N)}$ asymptotisch gleichverteilt.

Das bedeutet im einzelnen /17/:

$\underline{R}_1^{(N)}$ besitze die Eigenwerte $\lambda_k^{(N)}$ und $\underline{R}_2^{(N)}$ die Eigenwerte $\nu_k^{(N)}$ ($k=1, \dots, N$) und es sei $F(\cdot)$ eine stetige Funktion, definiert auf dem gesamten möglichen Wertebereich $[m, M]$ der Eigenwerte, d.h.

$$m \leq \lambda_k^{(N)}, \nu_k^{(N)} \leq M \quad ; \quad \forall k, N \quad . \quad (4.1.15)$$

Dann gilt bei asymptotischer Äquivalenz der Matrizenfolgen $\{\underline{R}_1^{(N)}\}$ und $\{\underline{R}_2^{(N)}\}$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N F[\lambda_k^{(N)}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N F[\nu_k^{(N)}] \quad . \quad (4.1.16)$$

Das bedeutet, in jedem Ausdruck, der in der Form $\sum F[\cdot]$ von den Eigenwerten abhängt, können die Eigenwerte der einen Matrix durch die Eigenwerte der anderen Matrix ersetzt werden, wobei der Fehler mit wachsendem N asymptotisch gegen Null geht.

Mit diesem Satz ist z.B. eine Aussage über die (schwer zu berechnenden) Eigenwerte einer Matrix $\underline{R}_1^{(N)}$ möglich, wenn die (z.B. leicht zu berechnenden) Eigenwerte der Matrix $\underline{R}_2^{(N)}$ bekannt sind. Die wohl berühmteste Anwendung dieses Prinzips ist die Bestimmung der asymptotischen Eigenwertverteilung von Toeplitz-Matrizen $(\underline{R}_1^{(N)})$ aus den Eigenwerten approximierender zyklischer Matrizen $(\underline{R}_2^{(N)})$. Die Eigenwerte zyklischer Matrizen können sehr einfach bestimmt werden, denn sie sind die Fourier-Transformierten des ersten Zeilenvektors der Matrix /10/, der seinerseits die AKF des Prozesses mit Toeplitz-Matrix approximiert. Daher führen die Eigenwerte von $\underline{R}_2^{(N)}$ als Fourier-Transformierte der AKF direkt auf das Leistungsdichtespektrum, so daß dann die Eigenwerte von $\underline{R}_1^{(N)}$ asymptotisch gleichverteilt sind sowohl mit den Eigenwerten von $\underline{R}_2^{(N)}$ als auch mit den Sample-Werten des LDS. Dies ist genau das Theorem von Szegö (vgl. Abschnitt 2.4).

Eine ausgezeichnete Darstellung der hier skizzierten Zusammenhänge über asymptotische Eigenwertverteilungen findet man in einem Übersichtsaufsatz von R.M. Gray /17/. Wegen der Bedeutung dieser Aussagen sollten aber die wichtigsten Prinzipien hier kurz angedeutet werden.

4.2 Asymptotisch optimale Transformationen

Im Abschnitt 4.1.2 hatten wir festgestellt, daß die Transformationen DFT, DCT, DSINT und DMA1T eine Toeplitz-Matrix asymptotisch in eine Diagonalmatrix überführen können. Eine zu einer Toeplitz-Matrix konstruierte Løve-Karhunen-Transformation zeichnet sich aber nicht nur dadurch aus, daß die Kovarianzmatrix im Bildbereich eine Diagonalmatrix ist, sondern auch dadurch, daß sich die Verteilung der Varianzen der Spektralkoeffizienten der Verteilung des Sample-LDS nähert. Man kann daher relativ einfach zeigen, daß unter bestimmten Bedingungen sämtliche auf Sinus-Cosinus-Funktionen beruhenden Transformationen asymptotisch optimal sind, wenn man direkt vom Bildbereich ausgeht, d.h. direkt die Varianzen σ_k^2 der Spektralkoeffizienten y_k berechnet. Das Ergebnis dieser Be-

trachtung soll als Satz vorangestellt werden:

Jede Transformation \underline{A} , deren Basisvektoren aus Abtastwerten von Sinus-Funktionen beliebiger Phasenlage bestehen, erreicht für jeden Prozeß mit Toeplitz-Kovarianzmatrix asymptotisch (mit wachsender Blocklänge) die gleiche Varianzverteilung im Bildbereich wie eine Loève-Karhunen-Transformation, wenn die Eigenfrequenzen der Basisvektoren von \underline{A} gleichmäßig über das Intervall $(0, \pi)$ verteilt sind.

Dieser Satz zeigt also, daß nicht nur die bereits untersuchten Transformationen (DFT, DCT, DSINT und DMA1T), sondern auch die DWPT (Abschnitt 3.5) und alle weiteren - ggf. noch unbekannt - Transformationen, die die Bedingungen des Satzes erfüllen, asymptotisch optimal sind, d.h. mit wachsender Blocklänge genauso wie die Loève-Karhunen-Transformation arbeiten.

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir zunächst die Varianz eines Spektralkoeffizienten bei Verarbeitung eines Prozesses mit Toeplitz-Kovarianzmatrix und behaupten:

Beh.: Jeder Basisvektor \underline{a}_k^T vom Betrage Eins, der aus Abtastwerten einer Sinus-Funktion mit beliebiger Phasenlage und der Frequenz Ω_k besteht, führt auf eine Varianz σ_k^2 des zugeordneten Spektralkoeffizienten y_k , die sich mit wachsender Blocklänge asymptotisch der Leistungsdichte $S(e^{j\Omega_k})$ des Prozesses bei der gleichen Frequenz Ω_k nähert.

Wenn diese Behauptung richtig ist, so folgt unmittelbar der anfangs angegebene Satz: Denn sind die Frequenzen Ω_k der Basisvektoren gleichmäßig über $(0, \pi)$ verteilt, so sind die Varianzen σ_k^2 asymptotisch so verteilt wie das Sample-LDS. Nach dem Theorem von Szegö ist dies aber genau die Grenzverteilung der Varianzen σ_k^2 bei der LKT; d.h. eine Transformation \underline{A} , die die Bedingungen des Satzes erfüllt, erreicht asymptotisch die Varianzverteilung der LKT im Bildbereich.

Beweis:

Zum Beweis der Behauptung wird die Varianz σ_k^2 eines Spektralkoeffizienten y_k direkt berechnet. Es treten dabei 2 Terme auf, von denen gezeigt wird, daß der eine den Wert des LDS $S(e^{j\Omega_k})$ annimmt,

während der andere Term mit wachsender Blocklänge N verschwindet.

Um die Normierung des Basisvektors \underline{a}_k^T auf den Betrage Eins zu vereinfachen, betrachten wir nur Frequenzen der Form $\Omega_k = \frac{r}{s} \pi$, wobei r und s natürliche Zahlen sind. Diese Voraussetzung bedeutet praktisch keine Einschränkung, da die Eigenfrequenzen Ω_k der o.a. Transformationen sämtlich in dieser Form darstellbar sind.

Wir werden dann das Verhalten bei wachsender Blocklänge $N \rightarrow \infty$ untersuchen und betrachten dazu - ebenfalls um die Normierung zu vereinfachen - nur solche Blocklängen N , die in der Form $N=p \cdot s$ (p sei natürliche Zahl, $p=1,2,\dots,\infty$) darstellbar sind. Damit ergibt sich folgende Beziehung zwischen Frequenz und Blocklänge:

$$\Omega_k = \frac{p \cdot r}{N} \pi \quad , \text{ wobei } p \cdot r \text{ eine natürliche Zahl.} \quad (4.2.1)$$

Der Basisvektor \underline{a}_k^T wird nun durch

$$\underline{a}_k^T = c (\dots, \cos(\Omega_k \cdot n + \alpha), \dots) \quad ; \quad n=0,1,\dots,N-1 \quad (4.2.2)$$

beschrieben, wobei der Phasenwinkel α beliebig groß ist. Die Konstante c wird so gewählt, daß \underline{a}_k^T den Betrag Eins aufweist. Mit den in /20/ angegebenen Formeln für Summen von Sinus-Cosinus-Termen ist sehr leicht nachzuvollziehen, daß (mit Gl. 4.2.1) c zu

$$c = \sqrt{\frac{2}{N}} \quad , \text{ für } \forall \alpha \quad (4.2.3)$$

gewählt werden muß.

Der Spektralkoeffizient y_k geht dann aus

$$y_k = \sum_{n=0}^{N-1} a_{kn} x_n \quad (4.2.4)$$

hervor, wobei die Komponenten a_{kn} des Basisvektors \underline{a}_k^T in der Form

$$a_{kn} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{N}} [e^{j(\Omega_k n + \alpha)} + e^{-j(\Omega_k n + \alpha)}] \quad (4.2.5)$$

geschrieben werden sollen.

Die Varianz σ_k^2 des Spektralkoeffizienten y_k ist dann

$$\sigma_k^2 = E[y_k^2] \quad ,$$

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} E[x_n x_l] \left\{ e^{j\Omega_k(n-l)} + e^{-j\Omega_k(n-l)} + e^{j[\Omega_k(n+1)+2\alpha]} + e^{-j[\Omega_k(n+1)+2\alpha]} \right\} \quad (4.2.6)$$

Wir spalten diesen Ausdruck in zwei Terme auf:

$$\sigma_k^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2, \text{ wobei} \quad (4.2.7)$$

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} E[x_n x_l] \cos[\Omega_k(n-l)] \quad (4.2.8)$$

und

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} E[x_n x_l] \cos[\Omega_k(n+1)+2\alpha] \quad (4.2.9)$$

1. Term σ_A^2 :

Es gilt

$$E[x_n x_l] = R(n-l) \quad ; \quad (4.2.10)$$

wir betrachten daher den Index $m=n-l$ in der $n \cdot l$ -Ebene:

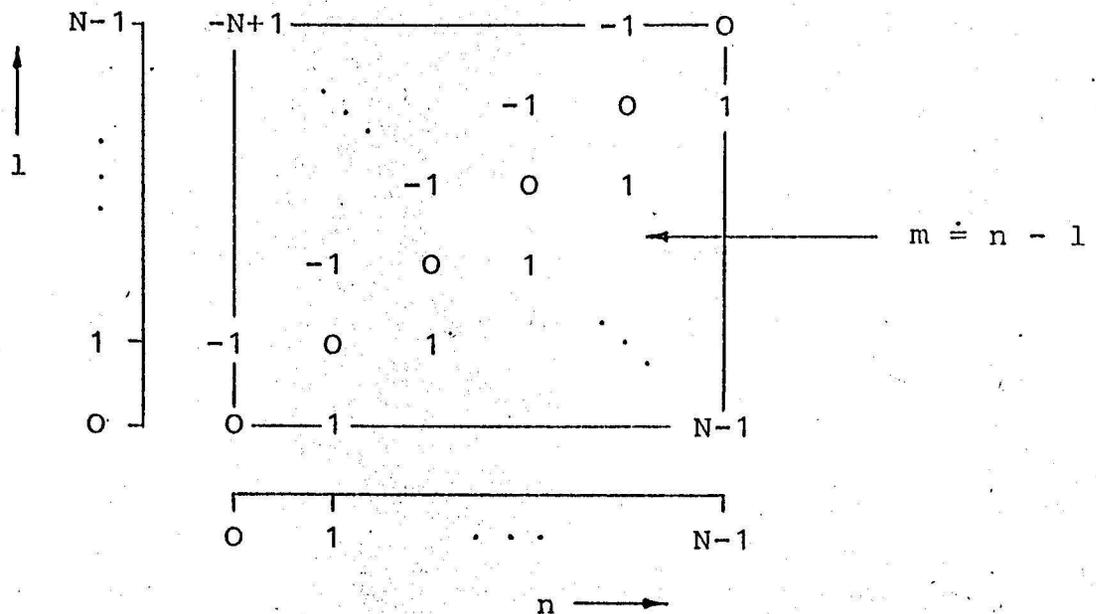


Bild 4.2: Indexwerte $m=n-l$ in der $n \cdot l$ -Ebene.

Aus Bild 4.2 ist zu entnehmen, wie häufig die verschiedenen m -Werte ($m=-N+1, \dots, N-1$) auftreten. Da die Doppelsumme in Gl.4.2.8 selbst nur von m abhängt, kann σ_A^2 sofort in der Form

$$\sigma_A^2 = \sum_{m=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) R(m) \cos(\Omega_k m) \quad (4.2.11)$$

geschrieben werden. Andererseits ist das LDS des Prozesses $\{x_n\}$ gegeben durch (vgl. Gl. 2.1.4)

$$s(e^{j\Omega_k}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R(m) \cos(\Omega_k m) \quad , \quad (4.2.12)$$

so daß im Grenzfalle

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_A^2 = s(e^{j\Omega_k}) \quad (4.2.13)$$

2. Term σ_B^2 :

In Gl. 4.2.9 für σ_B^2 interessiert außerdem auch der Laufbereich für den Index $i=n+1$ in der $n \cdot 1$ -Ebene :

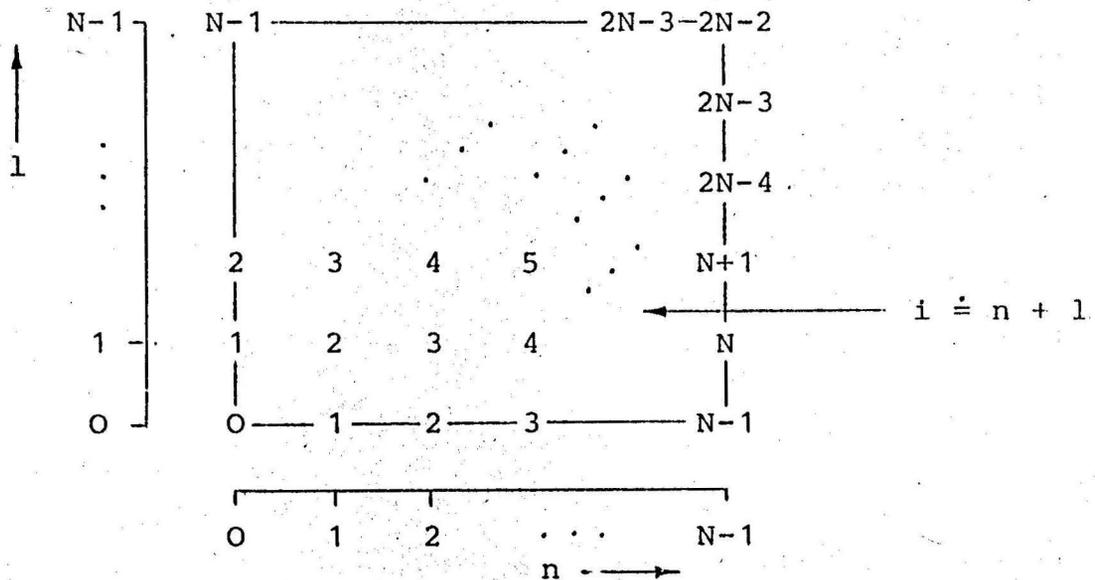


Bild 4.3 : Indexwerte $i=n+1$ in der $n \cdot 1$ -Ebene.

Wir sortieren nun die Doppelsumme in Gl. 4.2.9 so um, daß jeweils Glieder mit gleichem m -Wert zusammengefaßt werden, so daß $R(m)$ ausgeklammert werden kann. Mit Bild 4.2 und 4.3 ist leicht zu sehen, daß wir über die Nebendiagonale bzw. Parallelen dazu summieren, so daß σ_B^2 die Form

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{N} \left\{ R(0) \sum_{q=1}^N \cos[\Omega_k (2q-2)+2\alpha] + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \left[R(m) \sum_{q=1}^{N-m} \cos[\Omega_k (m+2q-2)+2\alpha] \right] \right\} \quad (4.2.14)$$

annimmt. Die erste Summe in Gl. 4.2.14 (Koeffizient von R(0)) ist identisch Null; die anderen Summen können so umgeformt werden, daß zu einem AKF-Wert R(m) eine Summe mit genau m Cosinus-Termen gehört (vgl. Anhang, Abschnitt 3.A). Dann wird Gl. 4.2.14

$$\sigma_B^2 = - \frac{2}{N} \sum_{m=1}^{N-1} \left\{ R(m) \sum_{q=1}^m \cos[(2N-2-m+2q)\Omega_k + 2\alpha] \right\} \quad (4.2.15)$$

Mit $|\cos(\cdot)| \leq 1$ ist sofort folgende Abschätzung möglich:

$$|\sigma_B^2| \leq \frac{2}{N} \sum_{m=1}^{N-1} m |R(m)| \quad (4.2.16)$$

Es ist nun zu zeigen, daß σ_B^2 mit $N \rightarrow \infty$ verschwindet, wobei nur vorausgesetzt wird, daß die AKF R(·) absolut summierbar ist (s. Gl. 2.1.9). Dazu beschreiten wir einen Weg ähnlich wie in /18/; wir wählen eine feste große Zahl P und spalten σ_B^2 in zwei Summen auf, die dann abgeschätzt werden zu

$$|\sigma_B^2| \leq \frac{2}{N} \max_{1 \leq m \leq P} \{|R(m)|\} \underbrace{\sum_{m=1}^P m}_{=\frac{P(P+1)}{2}} + 2 \sum_{m=P+1}^{N-1} |R(m)| \quad (4.2.17)$$

Nun halten wir die Zahl P fest und bilden den Grenzübergang $N \rightarrow \infty$. Der erste Term in Gl. 4.2.17 verschwindet dann mit P^2/N . Der zweite Term bildet zwar einen Beitrag; dieser kann aber, wenn wir P genügend groß wählen, beliebig klein gemacht werden. Daraus folgt

$$\left| \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_B^2 = 0 \right. \quad (4.2.18)$$

und damit auch

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_k^2 = s(e^{j\Omega_k})} \quad (4.2.19)$$

Gl. 4.2.19 ist genau der Beweis für die angegebene Behauptung.

4.3 Varianzverteilung im Bildbereich für asymptotisch optimale und nicht optimale Transformationen

Bei einer Reihe von Transformationen nähert sich die Varianzverteilung im Bildbereich mit wachsender Blocklänge nicht der bei einer Løeve-Karhunen-Transformation eintretenden Varianzverteilung, wenn ein Prozeß mit Toeplitz-Kovarianzmatrix vorliegt. Solche Transformationen sollen als nicht asymptotisch optimal bezeichnet werden. In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß alle Transformationen, die nicht auf Abtastwerte von Sinus-Cosinus-Funktionen zurückzuführen sind, zu der letztgenannten Klasse gehören. Ihre Varianzverteilungen im Bildbereich werden näher untersucht und verglichen mit den Varianzverteilungen asymptotisch optimaler Transformationen.

4.3.1 Darstellung der Basisvektoren einer Transformation durch die Basisvektoren einer Bezugstransformation

Für die weiteren Betrachtungen werden jeweils zwei Transformationen miteinander verglichen. A sei die zu untersuchende Transformation und B sei eine Bezugstransformation mit bekannten Eigenschaften (z.B. die DFT).

Die Basisvektoren \underline{a}_k^T ($k=1, \dots, N$) der Transformation A können durch die Basisvektoren \underline{b}_k^T von B dargestellt werden:

$$\underline{a}_k^T = \sum_{l=1}^N c_{kl} \underline{b}_l^T \quad ; \quad k=1, \dots, N \quad , \quad (4.3.1)$$

wobei

$$c_{kl} = \underline{a}_k^T \underline{b}_l \quad . \quad (4.3.2)$$

Die Entwicklungskoeffizienten c_{kl} sind also die Skalarprodukte zwischen je zwei Basisvektoren der beiden Transformationen A und B.

Im folgenden wird deutlich werden, daß aus den Entwicklungskoeffizienten c_{kl} sehr gut auf die Varianzverteilung der Spektralkoeffizienten im Bildbereich von A geschlossen werden kann:

Es werde ein Datenvektor \underline{x} mit beiden Transformationen transformiert. Die Spektralkoeffizienten bei Verwendung von A sind

$$Y_k = \underline{a}_k^T \underline{x} \quad ; \quad (4.3.3)$$

mit der Transformation \underline{B} entstehen die Spektralkoeffizienten

$$w_1 = \underline{b}_1^T \underline{x} \quad (4.3.4)$$

Der Koeffizient y_k kann nun mit Gl. 4.3.1 und 4.3.4 auch durch w_1, \dots, w_N beschrieben werden:

$$y_k = \sum_{l=1}^N c_{kl} w_l \quad (4.3.5)$$

Die Varianz von y_k ist dann

$$\begin{aligned} \sigma_k^2 &= E[y_k^2] \quad ; \\ \sigma_k^2 &= \sum_{l=1}^N \sum_{n=1}^N c_{kl} c_{kn} E[w_l w_n] \quad (4.3.6) \end{aligned}$$

Wir setzen nun und für die folgenden Betrachtungen voraus, daß die Bezugstransformation \underline{B} eine asymptotisch optimale Transformation (zur Verarbeitung von Toeplitz-Matrizen) sei wie z.B. die DFT, DCT, DMA1T usw. . Dann sind die Koeffizienten w_1 asymptotisch unkorreliert (d.h. $E[w_l w_n] \rightarrow 0$, wenn $l \neq n$) und ihre Varianzen $E[w_l^2]$ nehmen asymptotisch den Wert der Leistungsdichte $S(e^{j\Omega})$ bei der Eigenfrequenz $\Omega = \Omega_1$ des l -ten Basisvektors an. Die Frequenzen Ω_1 sind dabei äquidistant und mit l zunehmend über das Intervall $(0, \pi)$ verteilt. Damit wird dann für die Varianzen σ_k^2 aus Gl. 4.3.6

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_k^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^N c_{kl}^2 S(e^{j\Omega_1}) \quad (4.3.7)$$

Das bedeutet, die Varianz σ_k^2 kann asymptotisch als gewichtetes Mittel des Sample-LDS $S(\cdot)$ dargestellt werden. Die Gewichtungsfaktoren sind die Quadrate der Entwicklungskoeffizienten c_{kl} des Basisvektors \underline{a}_k^T nach den Basisvektoren einer asymptotisch optimalen, aber sonst beliebigen Bezugstransformation.

Die einem Spektralkoeffizienten y_k bzw. Basisvektor \underline{a}_k^T zugeordneten Entwicklungskoeffizienten c_{kl} erlauben daher eine Grenzaussage über die Varianz σ_k^2 direkt im Frequenzbereich, d.h. unter Kenntnis des Leistungsdichtespektrums des zu verarbeitenden Prozesses.

Ist die Bezugstransformation \underline{B} die DFT, so sind die Entwicklungskoeffizienten c_{kl} die dem Basisvektor \underline{a}_k^T zugeordneten Fourier-

koeffizienten; d.h. die Werte $\{c_{kl}^2 ; l=1, \dots, N\}$ bezeichnen das "Spektrum" eines Basisvektors \underline{a}_k^T , das aus der Fouriertransformierten seines "zeitlichen" Verlaufs (Komponenten von \underline{a}_k^T) erhalten wurde. Die Kenntnis dieses Spektrums gibt dann sofort Aufschluß, in welchen Frequenzbereichen aus dem Intervall $(0, \pi)$ die Varianz σ_k^2 durch das LDS $S(e^{j\Omega})$ gemäß Gl. 4.3.7 besonders stark beeinflusst wird (nämlich bei Frequenzen mit hohen Werten von c_{kl}^2).

Zusammenfassend ergibt sich also die Varianz σ_k^2 asymptotisch aus dem Leistungsdichtespektrum $S(e^{j\Omega})$ des Prozesses, gewichtet mit dem "Spektrum" $\{c_{kl}^2 ; l=1, \dots, N\}$ des dazugehörigen Basisvektors \underline{a}_k^T .

4.3.2 Bandbreite eines Basisvektors

Zur Beurteilung der Varianzverteilung im Bildbereich ist es wichtig zu wissen, ob sich die Entwicklungskoeffizienten c_{kl} eines Basisvektors \underline{a}_k^T ihrem Betrage nach auf eine Frequenz bzw. Frequenzgruppe konzentrieren. Es ist leicht zu sehen (Auswertung von Gl. 4.3.6. für ein weißes Spektrum), daß

$$\sum_{l=1}^N c_{kl}^2 = 1 \quad ; \quad k=1, \dots, N \quad . \quad (4.3.8)$$

Wir können nun mit Gl. 4.3.8 jedem Basisvektor \underline{a}_k^T eine Bandbreite $\Delta\Omega_k(\epsilon)$ zuordnen (vgl. Bild 4.4):

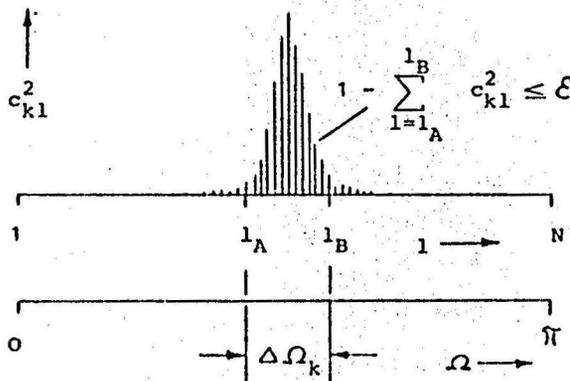


Bild 4.4 : Definition der Bandbreite $\Delta\Omega_k(\epsilon)$ eines Basisvektors \underline{a}_k^T .

Definition: Die Bandbreite $\Delta\Omega_k(\xi)$, $\xi > 0$, eines Basisvektors \underline{a}_k^T ist die kleinstmögliche Bandbreite (bzw. der kleinstmögliche Indexbereich $l_{A,2} \leq l \leq l_B$), die bis auf einen Fehler ξ fast alle Koeffizienten c_{kl} enthält, d.h.

$$1 - \sum_{l=l_A}^{l_B} c_{kl}^2 \leq \xi \quad (4.3.9)$$

Mit dieser Definition können die Basisvektoren bzw. die dazugehörigen Transformationen in zwei Klassen eingeteilt werden:

I) Basisvektoren mit verschwindender Bandbreite

Wir definieren:

Eine Transformation weist Basisvektoren mit verschwindender Bandbreite auf, wenn zu jedem $\xi > 0$ alle Basisvektoren die Bedingung

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta\Omega_k(\xi) = 0 \quad ; \quad k=1, \dots, N \quad (4.3.10)$$

erfüllen.

Ein Beispiel für die Entwicklungskoeffizienten von Basisvektoren mit verschwindender Bandbreite ist in Bild 4.5 angegeben.

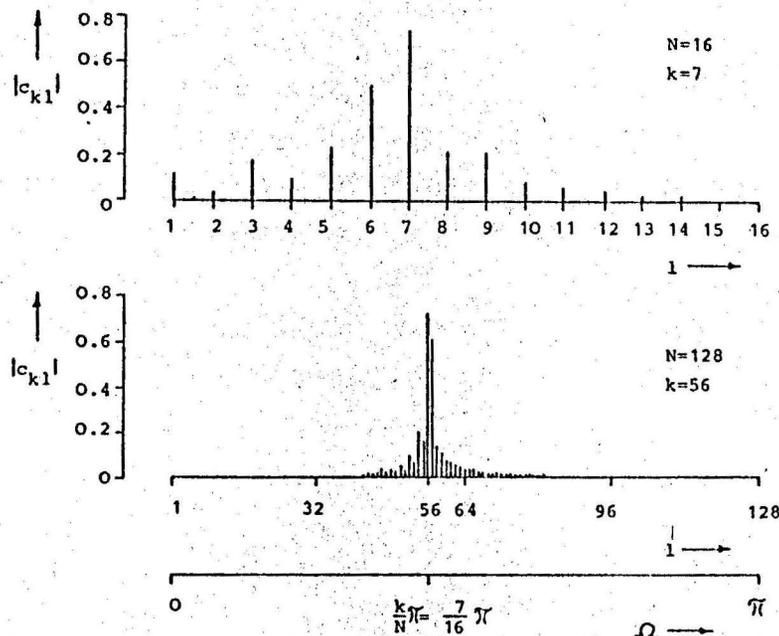


Bild 4.5 : Beispiele für Entwicklungskoeffizienten von Basisvektoren \underline{a}_k^T mit verschwindender Bandbreite.

A: DMA1T ; Bezugstransformation B: DFT

Frequenz von \underline{a}_k^T : $\Omega_k \approx \frac{k}{N}\pi = \frac{7}{16}\pi$.

Es ist gut erkennbar, daß sich mit zunehmender Blocklänge N die Entwicklungskoeffizienten c_{kl} immer enger im Bereich um $\Omega = \Omega_k$, der Eigenfrequenz des analysierten Basisvektors \underline{a}_k^T , konzentrieren. Bei verschwindender Bandbreite eines Basisvektors wird daher die Varianz σ_k^2 (vgl. Gl. 4.3.7) asymptotisch nur durch die Leistungsdichte $S(e^{j\Omega_k})$ bei der Eigenfrequenz Ω_k des Basisvektors bestimmt. Sind diese Eigenfrequenzen Ω_k gleichmäßig über $(0, \pi)$ verteilt, so sind die Varianzen der Spektralkoeffizienten, σ_k^2 , und das Sample-LDS asymptotisch gleichverteilt, d.h. die Transformation \underline{A} ist asymptotisch optimal.

Zu den Transformationen mit Basisvektoren verschwindender Bandbreite gehören alle auf Sinus-Cosinus-Funktionen beruhenden Transformationen.

Wie sieht nun die allgemeine Form (Verlauf) eines Basisvektors \underline{a}_k^T mit verschwindender Bandbreite aus?

Entsprechend Gl. 4.3.1 und 4.3.9 wird \underline{a}_k^T asymptotisch durch

$$\underline{a}_k^T \approx \sum_{l=1_A}^{l_B} c_{kl} \underline{b}_l^T \quad (4.3.11)$$

beschrieben, d.h. als Überlagerung von Sinusschwingungen dicht benachbarter Frequenzen. Mit zunehmender Blocklänge $N \rightarrow \infty$ sinkt zwar nicht notwendig die Zahl $l_B - l_A + 1$ der überlagerten Vektoren \underline{b}_l^T , wohl aber der maximale Frequenzunterschied der Vektoren \underline{b}_l^T ; dieser geht gegen Null. Der allgemeine Verlauf von \underline{a}_k^T entsteht dann aus den Abtastwerten eines sinusförmigen Signals, das mit einem zweiten Signal, dessen maximale Frequenz mit wachsender Blocklänge gegen Null geht, multipliziert wird (vgl. der Fall der "Schwebung"). Ein typisches Beispiel sind die Basisvektoren der LKT für Prozesse höherer Ordnung; ein solcher Basisvektor ist im Bild 4.6 dargestellt.

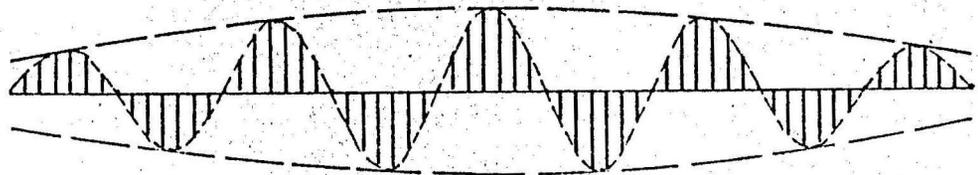


Bild 4.6 : Basisvektor aus einer LKT der Blocklänge $N=64$, die einem AR-10-Prozeß (Toeplitz-Kovarianzmatrix) zugeordnet ist.

Der dort zugrunde gelegte AR-10-Prozeß ist an das Langzeit-LDS von Sprache angepaßt. Das "modulierende" Signal mit verschwindender Frequenz ist in Bild 4.6 durch die gestrichelte Hüllkurve dargestellt.

Basisvektoren mit verschwindender Bandbreite werden also aus Signalen gebildet, die "kurzfristig" rein sinusförmig verlaufen, aber "langfristig" ihre Phasenlage und Amplitude beliebig (aber sehr langsam) ändern dürfen. Solche Basisvektoren mit verschwindender Bandbreite sollen als asymptotisch sinusförmig bezeichnet werden.

Jedes Transformationssystem A mit asymptotisch sinusförmigen Basisvektoren ist asymptotisch optimal, wenn die Eigenfrequenzen der Basisvektoren gleichmäßig oder asymptotisch gleichmäßig über das Intervall $(0, \infty)$ verteilt sind.

Sind zwei Transformationen asymptotisch optimal, so bedeutet es also noch lange nicht, daß auch ihre Basisvektoren asymptotisch äquivalent sind, d.h. nach irgendeiner Fehlernorm asymptotisch übereinstimmen müssen.

II) Basisvektoren mit nicht verschwindender Bandbreite

Die bisherigen Betrachtungen sollten nicht so sehr dazu dienen, weitere Eigenschaften asymptotisch optimaler Transformationen aufzudecken, sondern vielmehr dazu, Kriterien zu finden, um nicht asymptotisch optimale Transformationen zu erkennen. Ein weiterer Schritt auf diesem Wege ist nun die Untersuchung von Basisvektoren mit nicht verschwindender Bandbreite.

Wir definieren:

Eine Transformation weist Basisvektoren mit nichtverschwindender Bandbreite auf, wenn Gl. 4.3.10 nicht erfüllbar ist, d.h. wenn mit wachsender Blocklänge N die Bandbreite $\Delta\Omega_k(\mathcal{E})$ nicht beliebig klein gemacht werden kann.

Ein Beispiel für die Entwicklungskoeffizienten von Basisvektoren mit nicht verschwindender Bandbreite ist in Bild 4.7 angegeben. Der Vergleich mit Bild 4.5 zeigt deutlich, daß sich die Entwicklungskoeffizienten mit wachsender Blocklänge hier nicht auf ein schmales Frequenzband konzentrieren.

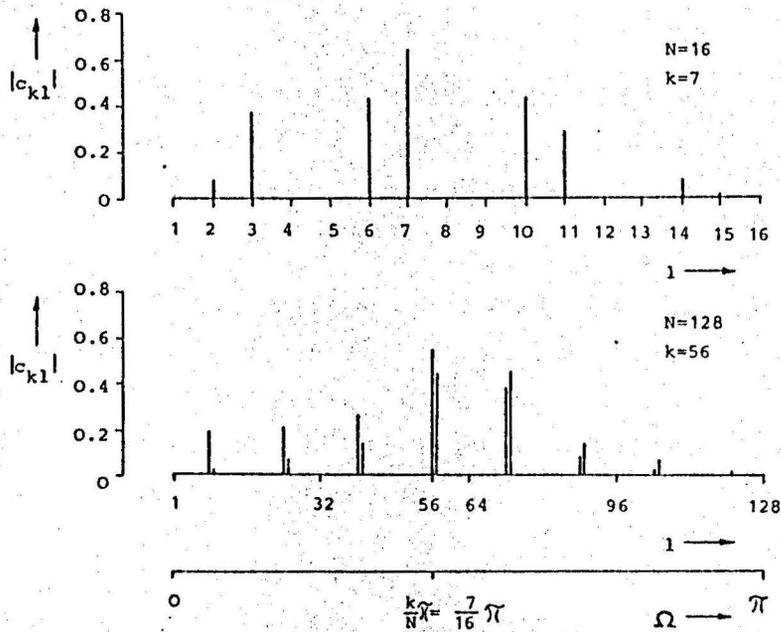


Bild 4.7.: Beispiele für Entwicklungskoeffizienten von Basisvektoren \underline{a}_k^T mit nicht verschwindender Bandbreite.

\underline{A} : DWT ; Bezugstransformation \underline{B} : DFT

Frequenz von \underline{a}_k^T : $\Omega_k \cong \frac{k}{N}\pi = \frac{7}{16}\pi$

Wie sehen nun die Basisvektoren mit nicht verschwindender Bandbreite allgemein aus? Die Antwort ist sehr einfach; sie ergibt sich sofort aus der Umkehrung des Teils I :

Ein Basisvektor mit nicht verschwindender Bandbreite liegt dann vor, wenn er nicht durch Abtastwerte von Sinus-Funktionen bzw. asymptotisch sinusförmig verlaufenden Funktionen dargestellt werden kann.

Aus diesem Satz folgt unmittelbar, daß eine Reihe von bekannten Transformationen wie die DWT, DST (Diskrete Slant-Transformation, /21/) und die Haar-Transformation /15/ Basisvektoren mit nicht verschwindender Bandbreite aufweisen. Bei diesen Transformationen wird dann die Varianz eines Spektralkoeffizienten auch bei großer Blocklänge stets durch den Verlauf des LDS über einen breiteren, nicht verschwindenden Frequenzbereich festgelegt.

4.3.3 Nicht asymptotisch optimale Transformationen

Mit den Betrachtungen aus Abschnitt 4.3.2 können wir nun folgenden Satz beweisen:

Jede Transformation, die Basisvektoren mit nicht verschwindender Bandbreite aufweist, ist nicht asymptotisch optimal bei Prozessen mit Toeplitz-Kovarianzmatrix.

Dieser Satz ist genau das Gegenstück zu dem Satz aus Abschnitt 4.2 über Transformationen mit aus Sinus-Funktionen abgeleiteten Basisvektoren. Mit Hilfe dieser beiden Sätze können wir jede Transformation \underline{A} - nur unter Kenntnis des Typs von Basisvektoren - sofort und ohne weitere Rechnung einer der beiden Klassen (asymptotisch optimal und nicht optimal) zuordnen.

Beweis:

Eine Transformation ist nur dann asymptotisch optimal, wenn sie für jeden Prozeß mit Toeplitz-Kovarianzmatrix asymptotisch dieselbe Varianzverteilung im Bildbereich wie bei Verwendung einer LKT bzw. wie das Sample-LDS aufweist. Wir betrachten nun einen Prozeß mit streng monoton verlaufendem LDS $S(e^{j\Omega})$ (z.B. AR-1-Prozeß, vgl. Bild 4.8).

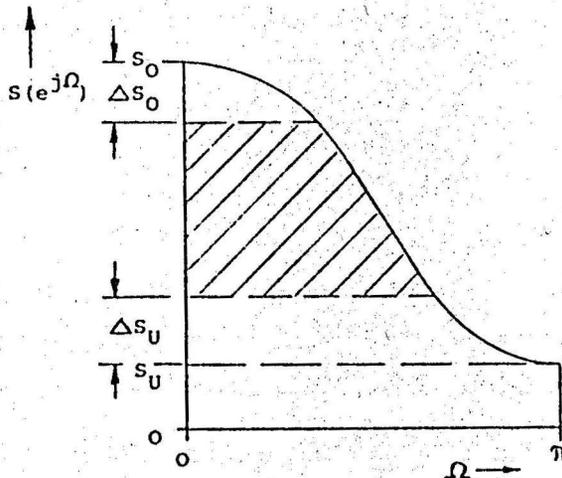


Bild 4.8 : LDS $S(e^{j\Omega})$ für einen AR-1-Prozeß.

Die Bandbreite der Basisvektoren geht nach Voraussetzung mit wachsender Blocklänge nicht gegen Null. Da entsprechend Gl. 4.3.7 die Varianzen σ_k^2 der Spektralkoeffizienten asymptotisch als gewichtete Mittel des LDS beschrieben werden, wobei hier die Mittelung über einen nicht verschwindenden Bereich $\Delta\Omega > 0$ durchgeführt wird, können die Varianzen σ_k^2 nicht die Extremwerte des LDS, s_0 und s_U

(vgl. Bild 4.8), annehmen. Es gilt daher

$$S_U + \Delta S_U \leq \sigma_k^2 \leq S_O - \Delta S_O \quad \forall k, \quad (4.3.12)$$

wobei die Werte ΔS_O und ΔS_U mit wachsender Blocklänge nicht gegen Null gehen.

Der Wertebereich der Varianzen σ_k^2 ist daher durch den schraffierten Bereich in Bild 4.8 festgelegt: Die Verteilung der σ_k^2 kann sich dann mit wachsender Blocklänge nicht der Verteilung des Sample-LDS nähern; womit der Satz bewiesen ist.

Anmerkung zum Beweis:

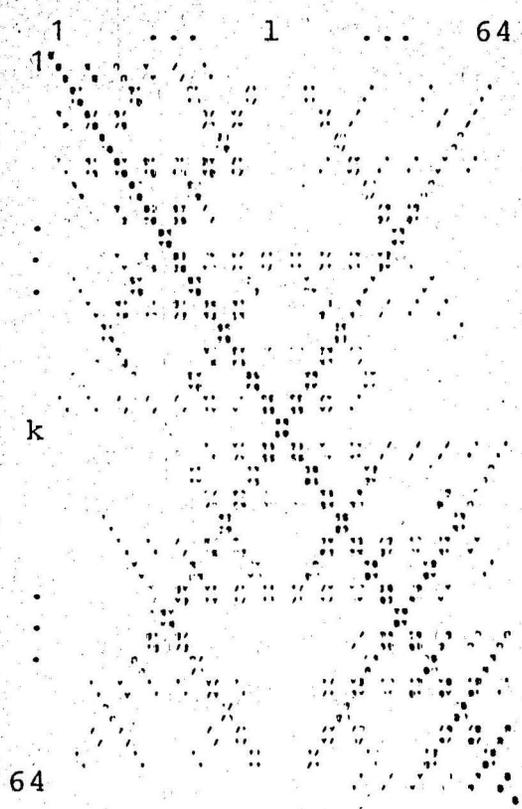
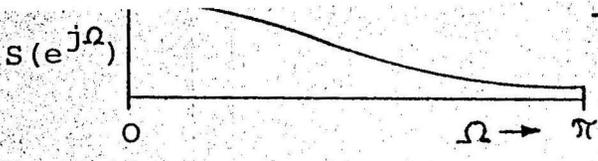
Eine nicht asymptotisch optimale Transformation kann auch einige Basisvektoren (Anzahl L) mit verschwindender Bandbreite aufweisen (z.B. der erste Basisvektor bei DWT und DST). Wenn der Anteil L/N mit $N \rightarrow \infty$ gegen Null geht, wird die Varianzverteilung durch diese L Basisvektoren nicht beeinflusst, d.h. diese bilden eine "Nullmenge", so daß der angegebene Satz auch für solche Transformationen gültig ist.

4.3.4 Beispiele für Verteilungen von Entwicklungskoeffizienten

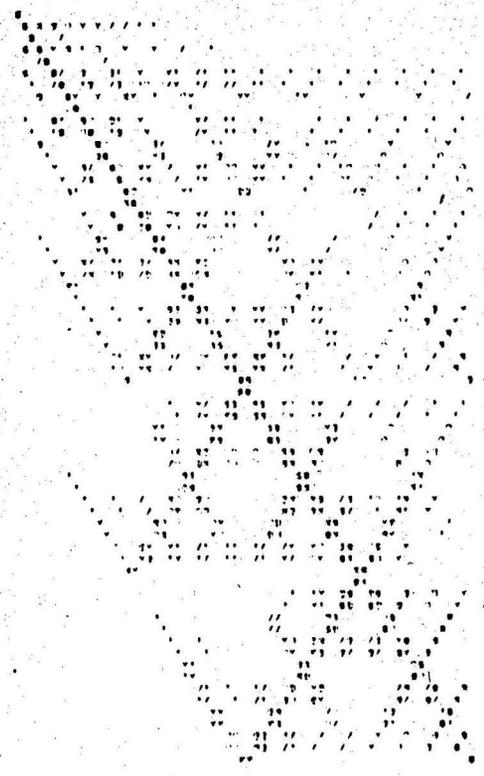
In diesem Abschnitt sollen abschließend einige Beispiele zu den vorangegangenen Betrachtungen angegeben werden. Es wurden die Entwicklungskoeffizienten c_{kl} ($k, l=1, \dots, N$) für einige Transformationen A und der Bezugstransformation B = DFT bei der Blocklänge $N=64$ berechnet. Die Beträge der Werte c_{kl} sind in Bild 4.9 durch Schwärzungsgrade dargestellt, d.h. je höher der Betrag $|c_{kl}|$, desto dunkler ist die entsprechende Komponente im Bild.

Bild 4.9 ist folgendermaßen zu lesen:

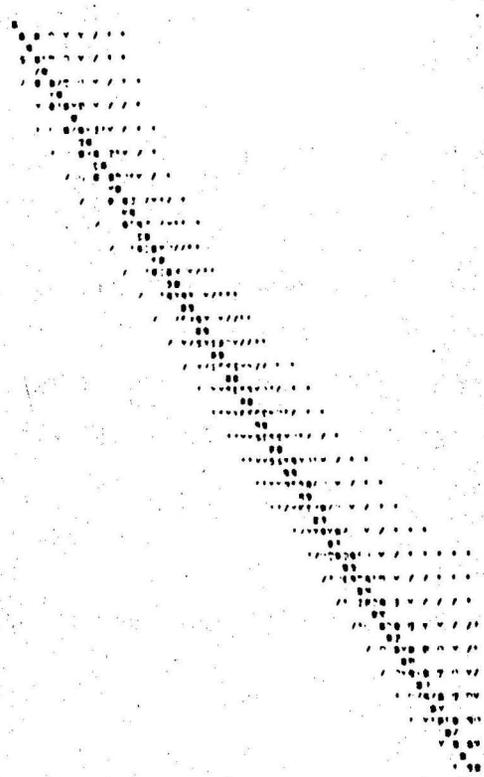
Die k-te Zeile einer "Grauwertmatrix" enthält die Beträge der Entwicklungskoeffizienten, $|c_{kl}|$, für den k-ten Basisvektor \underline{a}_k^T der zu untersuchenden Transformation A. Die Varianz σ_k^2 des zugeordneten Spektralkoeffizienten ergibt sich dann aus dem mit den Quadraten von c_{kl} ($l=1, \dots, N$) gewichteten Mittel des über der Abszisse aufgetragenen LDS $S(e^{j\Omega})$.



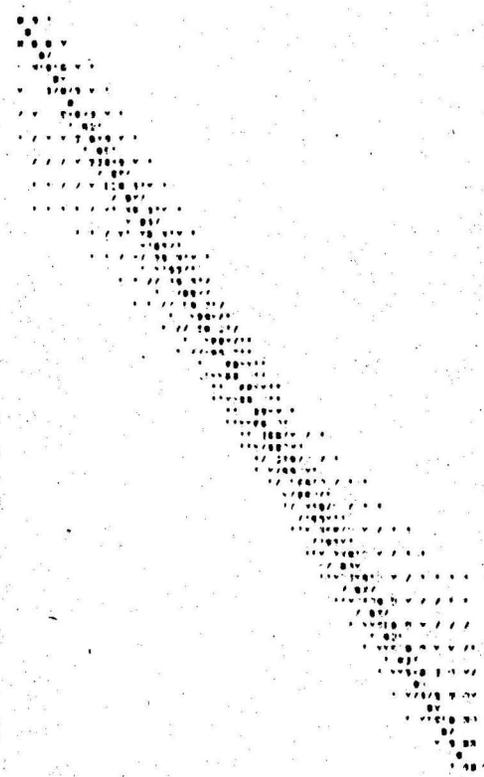
A = DWT



A = DST



A = DCT



A = DMA1T

Bild 4.9 : Darstellung der Beträge der Entwicklungskoeffizienten c_{kl} durch Schwärzungsgrade für verschiedene Transformationen A.
 Bezugstransformation B=DFT ; Blocklänge $N=64$.
 DST: Diskrete Slant-Transformation

Aus Bild 4.9 wird noch einmal der Unterschied zwischen den asymptotisch optimalen und nicht optimalen Transformationen deutlich: Bei DCT und DMA1T konzentrieren sich die Entwicklungskoeffizienten $|c_{kl}|$ mit wachsender Blocklänge auf der Hauptdiagonalen. Das LDS wird also asymptotisch in sich selbst abgebildet; d.h. die Varianzen σ_k^2 nähern sich dem Sample-LDS.

Bei DWT und DST dagegen ist zwar die Hauptdiagonale auch ausgeprägt, jedoch konzentrieren sich die Entwicklungskoeffizienten auch auf der Nebendiagonalen und Parallelen dazu. Das LDS wird daher nicht asymptotisch in sich selbst abgebildet, sondern jeder Wert σ_k^2 wird entsprechend der Grauwertverteilung der k-ten Zeile durch den LDS-Verlauf über einen breiten Frequenzbereich festgelegt.

Gleichzeitig wird dadurch noch einmal die Überlegung zum Beweis in Abschnitt 4.3.3 deutlich: Die Entwicklungskoeffizienten im Nebendiagonalbereich beeinflussen die Varianzen σ_k^2 so, daß z.B. bei einem monoton fallenden LDS im Bereich hoher Frequenzen ($k \rightarrow N$) "zu große" Varianzen σ_k^2 und im Bereich kleiner Frequenzen ($k \rightarrow 1$) "zu kleine" Varianzen σ_k^2 gegenüber den entsprechenden LDS-Werten auftreten. Dadurch können die Extremwerte des LDS nicht erreicht werden.

4.3.5 Ein aus den Entwicklungskoeffizienten abgeleitetes Abstandsmaß

In diesem Abschnitt soll die Brauchbarkeit eines von Pearl in /7/ und /22/ verwendeten Abstandsmaßes zwischen zwei Transformationen A und B diskutiert werden. Pearl verwendet dort die Summe der Entwicklungskoeffizienten c_{kl} (A nach B entwickelt),

$$S = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N c_{kl}^4 \quad , \quad (4.3.13)$$

die durch die Schranken

$$1 \leq S \leq N \quad (4.3.14)$$

eingengt wird. Sind A und B identisch, so ist $S=N$; bei größtmöglicher Unterschiedlichkeit zwischen A und B sind alle Entwicklungskoeffizienten gleich groß und S nimmt den Minimalwert 1 an. Der Wert S ist daher ein Maß für die Ähnlichkeit zweier Transformationen A und B.

Pearl gibt nun in /7/ eine notwendige und eine hinreichende Bedingung für das Verhalten $S(N)$ mit wachsender Blocklänge N an, die erfüllt sein müssen, damit die Transformationen A und B asymptotisch äquivalent sind, d.h., daß jeweils eine Transformation die Matrizen, die durch die andere Transformation exakt diagonalisiert werden, asymptotisch diagonalisieren kann. Wenn B z.B. die DFT ist und A sei zu B asymptotisch äquivalent, so würde A zyklische Matrizen, aber auch /7/ Toeplitz-Matrizen asymptotisch diagonalisieren. Ist B die DFT, so kann man also die Transformation A auch für die Eignung zur Verarbeitung von Toeplitz-Matrizen überprüfen.

Wendet man nun das Abstandsmaß von Pearl auf die hier untersuchten Transformationen an, so zeigt sich, daß die notwendige Bedingung für asymptotische Äquivalenz stets erfüllt ist, die hinreichende Bedingung aber praktisch nie. Wenn die hinreichende Bedingung aber nicht erfüllt ist, so bedeutet es noch lange nicht, daß A nicht doch Toeplitz-Matrizen (wobei $B=DFT$) asymptotisch diagonalisieren kann. So erfüllen z.B. die Paare DWT-DFT und DMA1T-DFT beide nicht die hinreichende Bedingung, obwohl im Gegensatz zur DWT die DMA1T sehr wohl Toeplitz-Matrizen asymptotisch diagonalisieren kann.

Das Maß von Pearl ist also für die Untersuchung einer Transformation A zur Verarbeitung von Toeplitz-Matrizen wenig brauchbar. Die Ursache dieser Unzulänglichkeit ist darin zu suchen, daß das Maß S nach Gl. 4.3.13 nur die Amplitudenverteilung der Werte c_{kl} berücksichtigt, nicht aber unterscheidet, ob z.B. zwei von Null verschiedene Werte c_{kl} und c_{km} dicht benachbart sind ($l \approx m$) oder weit auseinander liegen. So könnten z.B. die Summen S für die Paare DWT-DFT und DMA1T-DFT etwa gleich sein, aber die Lage der von Null verschiedenen Werte c_{kl} bestimmt dann, ob das LDS asymptotisch in sich selbst abgebildet wird oder nicht (vgl. Bild 4.9 und Diskussion dazu). Im letzteren Falle (bei räumlich weit gestreuten c_{kl} -Werten) liegt dann tatsächlich keine asymptotische Äquivalenz vor.

Pearl hat außer diesem Abstandsmaß auch eine Reihe von Schranken angegeben, die den Güteunterschied kennzeichnen, wenn statt einer Transformation A eine Transformation B eingesetzt wird (z.B. Unterschied in der Codierverzerrung bei Blockquantisierung). Diese Schranken berücksichtigen die Statistik des zu verarbeitenden Pro-

zesses entweder gar nicht /7,22/ oder nur in viel zu grobem Maße /18/. Die Güteunterschiede hängen aber sehr wesentlich von der Prozeßstatistik und auch von der verwendeten Blocklänge ab (vgl. dazu /11/, S.47 und auch /23/). Diese Schranken sind also für praktische Fragen kaum brauchbar bzw. viel zu grob; es ist sinnvoller, sich typische Modellstatistiken des zu verarbeitenden Prozesses herauszugreifen und dafür die gewünschten Gütemaße exakt zu berechnen.

5. Eigenschaften der untersuchten Transformationen am Beispiel eines Modellprozesses

In diesem Abschnitt sollen einige der angegebenen Eigenschaften orthogonaler Transformationen an einem Beispiel verdeutlicht werden. Wir betrachten einen Prozeß mit Toeplitz-Kovarianzmatrix; einen autoregressiven Prozeß 10. Ordnung, der dem Langzeit-LDS von Sprache angepaßt ist. Für diesen Prozeß wurden eine Reihe von theoretischen Größen berechnet; die Ergebnisse sind im folgenden dargestellt.

5.1 Varianzverteilung im Bildbereich als Funktion der Blocklänge

Die Größen bzw. die Verteilung der Varianzen σ_k^2 im Bildbereich bestimmen maßgebend die Güte eines Transformationssystems (vgl. Abschnitt 2.4). Die Güte des Systems steigt um so mehr, je größer die Varianzunterschiede der verschiedenen Spektralkoeffizienten sind. Als Maß für die Stärke der Varianzunterschiede wird die Größe

$$G = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=1}^N \sigma_k^2 \right] / \left[\prod_{k=1}^N \sigma_k^2 \right]^{1/N} \quad (5.1.1)$$

eingeführt. Ihr Minimalwert $G=1$ wird nur erreicht, wenn alle Varianzen σ_k^2 gleich groß sind; sobald unterschiedlich große Varianzen auftreten gilt $G > 1$.

Die Größe G ist gleichzeitig der Gewinn bei Blockquantisierung; d.h. G gibt die Verzerrungsverringerung an, die erzielt wird, wenn die Signalcodierung nicht mit PCM, sondern mit Blockquantisierung durchgeführt wird /11/.

Bild 5.1 zeigt einige Ergebnisse in Abhängigkeit von der Blocklänge N .

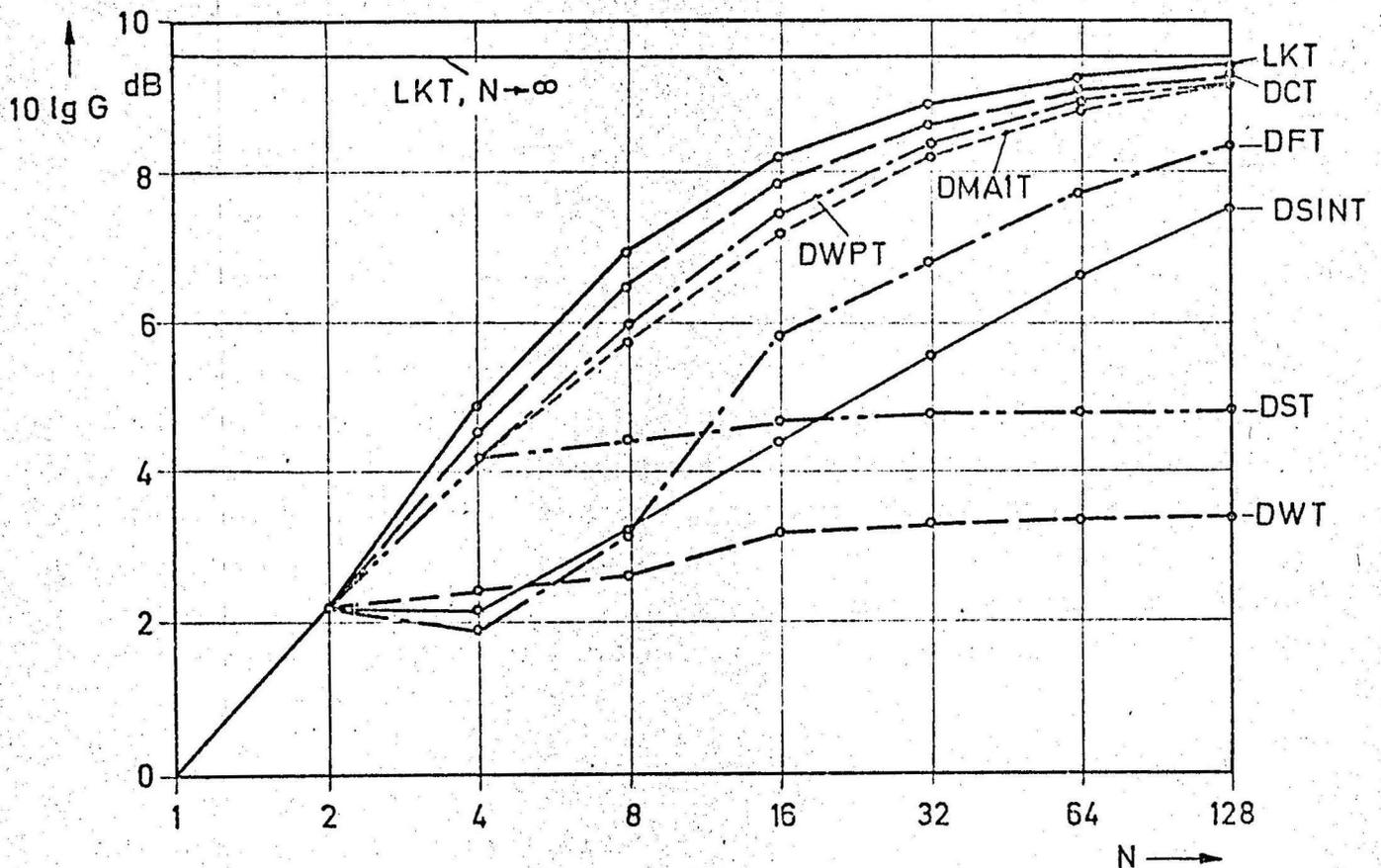


Bild 5.1 : Varianzverteilungsmaß G (Gewinn bei Blockquantisierung) als Funktion der Blocklänge N für verschiedene Transformationen.

Prozeß: AR-10-Prozeß, dem Sprach-Langzeit-LDS nachgebildet.

Bei der Blocklänge $N=128$ erreicht die LKT nahezu den Maximalwert von G , der sich erst bei unendlich großer Blocklänge einstellt. Von den suboptimalen Transformationen arbeitet die DCT am besten, da sie ja (vgl. Abschnitt 3.3) an Prozesse mit hoher positiver Korrelation (ein solcher liegt hier in etwa vor) angepaßt ist. Entsprechend arbeitet dann die DSINT sehr ungünstig, da diese Transformation bezüglich der vorliegenden Prozeßstatistik extrem fehlangepaßt ist. Auffällig ist aber, daß sämtliche Transformationen, die auf Sinus-Funktionen beruhen, mit wachsender Blocklänge sich dem G -Wert der LKT nähern. Dies ist auch zu erwarten, denn diese Transformationen sind asymptotisch optimal.

Die beiden übrigen Transformationen, die DWT und DST (Diskrete Slant-Transformation) erreichen bereits bei der Blocklänge $N=16$ nahezu ihren Sättigungswert für G . Eine Erhöhung der Blocklänge kann G nicht nennenswert vergrößern, da diese beiden Transformationen zu der Klasse der nicht asymptotisch optimalen Transformationen gehören.

5.2 Varianzverteilung im Bildbereich für nicht asymptotisch optimale Transformationen

Wir wissen, daß bei allen asymptotisch optimalen Transformationen die Varianzen σ_k^2 ($k=1, \dots, N$) sich dem Sample-LDS des Prozesses nähern. Dabei sind die beiden Mengen $[\sigma_k^2, \forall k]$ und das Sample-LDS nicht nur asymptotisch gleichverteilt, sondern die Folge $\{\sigma_k^2, k=1, \dots, N\}$ geht mit wachsender Blocklänge direkt in das Sample-LDS über, wenn die Basisvektoren \underline{a}_k^T nach steigender Frequenz sortiert sind.

Bei den nicht asymptotisch optimalen Transformationen kann man die Basisvektoren ganz entsprechend nach ihrer Sequenz /15/ (Zahl der Vorzeichenwechsel im Basisvektor) sortieren. Die Folge $\{\sigma_k^2, k=1, \dots, N\}$ wird sich dann nicht dem Sample-LDS nähern, aber in irgendeiner Form dem Sample-LDS ähnlich sein. Ein Beispiel für den AR-10-Prozeß zeigt Bild 5.2.

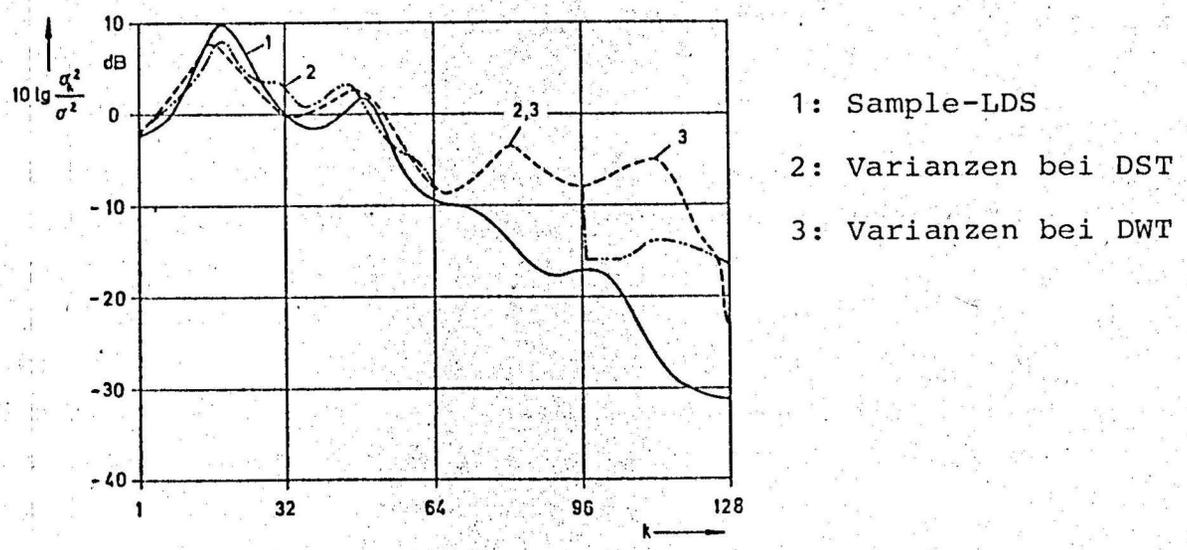


Bild 5.2 : Varianzen $\sigma_k^2; k=1, \dots, N$ für DST und DWT und Vergleich mit dem Sample-LDS.
 Prozeß: AR-10-Prozeß, dem Sprach-Langzeit-LDS nachgebildet. Blocklänge $N=128$.

Die Varianzen σ_k^2 wurden dabei auf ihren Mittelwert

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 \quad (5.2.1)$$

normiert.

Es ist ersichtlich, daß das auf der DWT oder DST beruhende "Spektrum" $\{\sigma_k^2; k=1, \dots, N\}$ zumindest bei tiefen Frequenzen (d.h. bei kleinen Werten von k) das LDS recht gut approximieren kann.

Bei höheren Frequenzen nehmen die σ_k^2 zu hohe Werte an; dies kann sofort durch die Größe der Entwicklungskoeffizienten c_{k1} der Basisvektoren \underline{a}_k^T erklärt werden (vgl. Bild 4.9):

Die Entwicklungskoeffizienten der Basisvektoren \underline{a}_k^T mit $k \rightarrow N$ weisen auch bei tiefen Frequenzen noch deutlich von Null verschiedene Beträge auf. Bei diesen Frequenzen hat das LDS recht hohe Werte, die die Varianz σ_k^2 - als gewichtetes Mittel des LDS (Gl. 4.3.7) - hochtreiben.

Im Bereich $k \rightarrow N$ sind außerdem die Varianzen σ_k^2 bei Verwendung der DST erheblich kleiner als bei der DWT. Dies kann ebenfalls mit Bild 4.9 sofort erklärt werden: Der Vergleich der Darstellungen der Entwicklungskoeffizienten in Bild 4.9 für DWT und DST ergibt, daß im Gegensatz zur DWT bei der DST die linke untere Ecke nicht ausgefüllt ist, d.h.: die energiestarken niedrigen Frequenzen des LDS beeinflussen die Varianzen σ_k^2 für $k \rightarrow N$ bei der DST in erheblich geringerem Umfang.

Aus Bild 5.2 ist ferner ersichtlich, daß das "Spektrum" $\{\sigma_k^2; k=1, \dots, N\}$ nicht notwendig stetig sein muß; es kann durchaus Sprünge aufweisen (s. DST für $k=96$).

Generell läßt sich also sagen, daß die Varianzen $\{\sigma_k^2; k=1, \dots, N\}$ bei nicht asymptotisch optimalen Transformationen nicht gegen das Sample-LDS konvergieren, sondern gegen einen davon abweichenden nicht notwendig stetigen Verlauf, der von Transformation zu Transformation sehr verschieden sein kann.

Abschließend sei noch eine Bemerkung gemacht:

Da das z.B. auf der DWT beruhende "Spektrum" $\{\sigma_k^2; k=1, \dots, N\}$ eine gewisse Ähnlichkeit zum LDS zeigt, kann man statt des LDS bzw. des mittels DFT geschätzten LDS auch die mit der DWT gewonnene Folge $\{\sigma_k^2\}$ zur Charakterisierung des Prozesses verwenden. Gegenüber einer

spektralen Schätzung mittels DFT ist bei der DWT ein erheblich verringerter Rechenaufwand gegeben. Ein Anwendungsgebiet ist die Parameterextraktion bei der Mustererkennung, wenn ein datenreiches Ereignis zwecks Klassifizierung mit geringdimensionalem Merkmalsvektor z.B. durch wenige Stützwerte seines Spektrums beschrieben wird.

Die DWT wurde auf diese Weise statt einer spektralen Schätzung mittels DFT in der Sprechererkennung eingesetzt /24/. Erwartungsgemäß war die Erkennungsleistung geringer als bei Verwendung der DFT, da die eine Ereignisklasse charakterisierenden Varianzunterschiede im Spektrum auf der Basis der DWT geringer sind als bei Verwendung der DFT bzw. im LDS selbst. Je nach Anwendungsfall kann aber auch diese verringerte Erkennungsleistung ausreichend sein bzw. in Verbindung mit anderen zur Klassifizierung eingesetzten Merkmalen noch erhöht werden, so daß ggf. der gesamte Rechenaufwand immer noch geringer ist als bei Verwendung der DFT allein.

6. Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse

In dieser Arbeit wurden eine Reihe von orthogonalen Transformationen hinsichtlich ihrer Eignung zur Verarbeitung bestimmter Prozeßklassen untersucht. Die wichtigsten Ergebnisse sind im folgenden zusammengestellt.

Prozesse:

- * Nicht nur die Eigenvektoren eines MA-1-Prozesses, sondern auch die eines AR-1-Prozesses sind Abtastwerte von Sinus-Funktionen. Für die Eigenvektoren des AR-1-Prozesses wurden die Phasenlagen und engere Schranken für die Lage der Eigenfrequenzen bzw. Eigenwerte angegeben.
- * Die Kovarianz-Matrizen, die durch die DCT, DSINT und DMA1T diagonalisiert werden, sind weder Toeplitz-Matrizen noch zyklische Matrizen (bis auf eine Ausnahme bei der DMA1T). Ihre Strukturen wurden angegeben; diese Strukturen sind für einige Beweise von Interesse und außerdem für den nachfolgend aufgeführten Punkt.
- * Es ist nicht nur wichtig, für einen Prozeß die optimale Transformation zu suchen, sondern ggf. vorteilhafter, die Prozeß-

Kovarianzmatrix so zu modifizieren (z.B. durch Vertauschung der Komponenten im Datenvektor), daß sie durch eine gegebene Transformation zumindest näherungsweise diagonalisiert wird. Voraussetzung dazu ist die Kenntnis der im vorangegangenen Punkt erwähnten Matrixstrukturen.

- * Es ist gezeigt worden, wie zu einer Toeplitz-Matrizenfolge asymptotisch äquivalente Matrizenfolgen konstruiert werden können, die durch die DCT, DSINT bzw. DMA1T exakt diagonalisiert werden.
- * Werden zwei asymptotisch äquivalente Matrizenfolgen mit derselben Transformation verarbeitet, so sind ihre Kovarianz-Matrizenfolgen im Bildbereich asymptotisch identisch, d.h. sie stimmen asymptotisch für jedes Matrixelement überein.

Transformationen:

- * Alle Transformationen, deren Basisvektoren aus Abtastwerten von Sinus-Funktionen beliebiger Phasenlage bestehen, sind asymptotisch optimal zur Verarbeitung von Toeplitz-Matrizen, wenn die Eigenfrequenzen der Basisvektoren gleichmäßig über das Intervall $(0, \pi)$ verteilt sind.
Beispiele: DFT, DCT, DSINT, DMA1T, DWPT.
- * Alle Transformationen, deren Basisvektoren nicht auf Abtastwerte von Sinus-Funktionen bzw. asymptotisch sinusförmig verlaufenden Funktionen zurückgeführt werden können, sind nicht asymptotisch optimal zur Verarbeitung von Toeplitz-Matrizen.
Beispiele: DWT, Diskrete Slant-Transf., Haar-Transf. .
- * Es liege ein Prozeß mit Toeplitz-Kovarianzmatrix vor; die Basisvektoren der einzusetzenden Transformation seien frequenz- bzw. sequenzsortiert. Dann geht die Folge der Varianzen der Spektralkoeffizienten für jede asymptotisch optimale Transformation in das Sample-LDS über und für jede nicht asymptotisch optimale Transformation in einen Verlauf, der mehr oder weniger stark von dem Sample-LDS abweicht.
- * Für die DCT und DSINT kann auch analytisch gezeigt werden, daß diese Transformationen jeden AR-1-Prozeß mit dem Korrelationskoeffizienten $r \rightarrow +1$ bzw. $r \rightarrow -1$ nahezu so gut wie eine LKT verarbeiten.

Folgerungen für die Auswahl einer Transformation:

Der zu verarbeitende Prozeß besitze eine Toeplitz-Matrix. Die Güte eines Transformationssystems hängt dann nicht nur von der Transformation, sondern auch in starkem Maße von der Prozeßstatistik und der Blocklänge ab. Gegebenenfalls kann eine nicht asymptotisch optimale Transformation eine asymptotisch optimale Transformation bei kleineren Blocklängen weit übertreffen (vgl. /11/, S.47), aber genauso gut auch erheblich schlechter arbeiten.

Bei sehr großen Blocklängen arbeitet jede asymptotisch optimale Transformation fast so gut wie die LKT. Bei kleineren Blocklängen, die aus Aufwandsgründen - oder weil das Signal sonst nicht mehr quasistationär ist - eingesetzt werden, gelten folgende Richtlinien bei Verwendung asymptotisch optimaler Transformationen:

- * Bei stark positiv korrelierten Prozessen sollte die DCT eingesetzt werden.
- * Bei stark negativ korrelierten Prozessen sollte die DSINT eingesetzt werden.
- * Ist der Prozeß instationär mit stark wechselnden Korrelationen, dann sollte die Transformation umschaltbar gemacht werden oder aber eine "neutrale" Transformation wie die DFT eingesetzt werden, die nicht speziell signalangepaßt ist.
- * Wenn der Prozeß näherungsweise durch einen MA-1-Prozeß beschrieben werden kann, so ist der Einsatz der DMA1T sinnvoll. Diese Transformation kann jede Kovarianzmatrix eines MA-1-Prozesses mit beliebiger Korrelation exakt diagonalisieren.

Anhang

1.A Durchführung der DMA1T mittels der DFT

Aus dem zu transformierenden Datenvektor

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T \quad (1.A.1)$$

wird durch Ergänzen mit Nullen ein Vektor \underline{y} mit $2N+2$ Komponenten gebildet:

$$\underline{y} = (0, x_1, x_2, \dots, x_N, 0, \dots, 0)^T \quad (1.A.2)$$

Der Vektor \underline{y} wird mittels einer DFT der Blocklänge $N^* = 2N+2$ in den Vektor \underline{w} mit den Komponenten w_k überführt:

$$w_k = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{n=1}^N e^{-j \frac{2\pi}{N^*} n \cdot k} x_n ; \quad k=0, 1, \dots, 2N+1 \quad (1.A.3)$$

Der gesuchte - durch die DMA1T transformierte - Vektor \underline{y} ,

$$\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)^T \quad (1.A.4)$$

ist dann einfach

$$Y_k = - \operatorname{Im}\{w_k\} \quad ; \quad k=1, \dots, N \quad (1.A.5)$$

Die Rücktransformation ist leicht zu finden, da für die DMA1T gilt

$$\underline{A}_{\text{DMA1T}}^T = \underline{A}_{\text{DMA1T}} \quad (1.A.6)$$

Der Vektor \underline{y} wird daher in der gleichen Weise rücktransformiert wie die Hintransformation für \underline{x} ausgeführt wurde.

2.A Durchführung der DSINT mittels der DFT

Aus dem zu transformierenden Datenvektor \underline{x} (s. Gl. 1.A.1) wird durch Ergänzen mit Nullen ein Vektor \underline{y} mit $2N$ Komponenten gebildet:

$$\underline{y} = (0, x_1, x_2, \dots, x_N, 0, \dots, 0)^T \quad (2.A.1)$$

Der Vektor \underline{y} wird mittels einer DFT der Blocklänge $N^* = 2N$ in den Vektor \underline{w} mit den Komponenten w_k überführt:

$$w_k = \sum_{n=1}^N e^{-j \frac{2\pi}{N^*} n \cdot k} x_n ; \quad k=0, 1, \dots, 2N-1 \quad (2.A.2)$$

Der gesuchte - durch die DSINT transformierte - Vektor \underline{y} nach Gl. 1.A.4 ist dann

$$y_k = -\sqrt{\frac{2}{N}} \operatorname{Im} \left\{ e^{j \frac{k \pi}{N^*}} w_k \right\} ; \quad k=1, \dots, N \quad (2.A.3)$$

Die Rücktransformation von \underline{y} nach \underline{x} erhält man leicht mittels der Überlegung, daß ja $\underline{A}^{-1} = \underline{A}^T$, also $\underline{x} = \underline{A}^T \underline{y}$. Mit Gl. 3.4.1 für die Basisvektoren von \underline{A} ergibt sich dann

$$x_n = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^N y_k \sin \frac{(2n-1)k \pi}{2N} ; \quad n=1, \dots, N \quad (2.A.4)$$

Gl. 2.A.4 kann entsprechend über die DFT ausgeführt werden. Dazu wird aus \underline{y} ein Vektor \underline{w} mit $N^* = 2N$ Komponenten gebildet:

$$\underline{w} = (0, y_1 e^{-j \frac{\pi}{N^*}}, \dots, y_N e^{-j \frac{\pi N}{N^*}}, 0, \dots, 0)^T \quad (2.A.5)$$

Der Vektor \underline{w} wird mittels der inversen DFT in den Vektor \underline{v} überführt:

$$v_n = \sum_{k=1}^N \left[\underbrace{y_k e^{-j \frac{\pi k}{N^*}}}_{=w_k} \right] e^{j \frac{2\pi}{N^*} k \cdot n} ; \quad n=0, 1, \dots, 2N-1 \quad (2.A.6)$$

Der gesuchte Vektor \underline{x} ist dann gegeben durch

$$x_n = \sqrt{\frac{2}{N}} \operatorname{Im} \{ v_n \} ; \quad n=1, \dots, N \quad (2.A.7)$$

3.A Formeln zum Beweis des Satzes in Abschnitt 4.2

Im Abschnitt 4.2 werden in Gl. 4.2.14 einige Formeln für Summen von Cosinus-Termen benötigt, die hier zusammengestellt sind.

Wichtige Voraussetzung ist die Gleichung

$$\Omega_k = \frac{p \cdot r}{N} \pi, \quad \text{wobei } p \cdot r \text{ natürliche Zahl,} \quad (4.2.1)$$

um Periodizitäten bezüglich N ausnutzen zu können. Wir benötigen außerdem einige Formeln, die in /20/ angegeben sind:

$$\sum_{n=1}^N \cos(n \cdot v + \beta) = \cos \beta \sum_{n=1}^N \cos n \cdot v - \sin \beta \sum_{n=1}^N \sin n \cdot v, \quad (3.A.1)$$

wobei

$$\sum_{n=1}^N \cos n \cdot v = -\frac{1}{2} + \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})v]}{2\sin \frac{1}{2}v} \quad (3.A.2)$$

und

$$\sum_{n=1}^N \sin n \cdot v = \frac{\sin[\frac{N+1}{2}v] \sin[\frac{N}{2}v]}{\sin \frac{v}{2}} \quad (3.A.3)$$

I) Es interessiert die Summe

$$S_0 = \sum_{q=1}^N \cos[\Omega_k(2q-2) + 2\alpha] \quad (3.A.4)$$

Mit Gl. 4.2.1 gilt auch

$$S_0 = \sum_{q=1}^N \cos[\underbrace{2\Omega_k \cdot q}_{\doteq v} + \underbrace{2\alpha}_{\doteq \beta}] \quad (3.A.5)$$

Mit Gl. 4.2.1 und Gl. 3.A.1 bis 3.A.3 wird

$$S_0 = \cos 2\alpha \left[-\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{\sin(2N\Omega_k + \Omega_k)}{2 \sin \Omega_k}}_{=\frac{1}{2}} \right] - \sin 2\alpha \frac{\overbrace{\sin[(N+1)\Omega_k] \sin(N\Omega_k)}^{=0}}{\sin \Omega_k}$$

so daß schließlich

$$\boxed{S_0 = 0} \quad (3.A.6)$$

II) Es interessiert die Summe

$$S_1 = \sum_{q=1}^{N-1} \cos[\Omega_k(2q-1) + 2\alpha] \quad (3.A.7)$$

Es ist

$$S_1 = \sum_{q=1}^{N-1} \cos [2\Omega_k \cdot q + 2\alpha - \Omega_k]$$

$$S_1 = \sum_{q=1}^N \cos [\underbrace{2\Omega_k \cdot q}_{\doteq v} + \underbrace{2\alpha - \Omega_k}_{\doteq \beta^*}] - \cos [2N\Omega_k + 2\alpha - \Omega_k] \quad (3.A.8)$$

Entsprechend Gl. 3.A.5 folgt sofort, daß die erste Summe in Gl. 3.A.8 Null ist; daher wird S_1 mit Gl. 4.2.1

$$\boxed{S_1 = -\cos[2\alpha - \Omega_k]} \quad (3.A.9)$$

III) Es interessieren die weiteren Summen

$$S_m = \sum_{q=1}^{N-m} \cos[\Omega_k(m+2q-2) + 2\alpha] \quad \text{für } m=2,3,4,\dots \quad (3.A.10)$$

Wir brauchen nun kaum noch zu rechnen, denn die Summe in Gl. 3.A.10 kann stets so ergänzt werden, daß gerade die Summe S_0 bzw. S_1 entsteht. Durch die hinzugefügten Terme ist der Wert S_m dann festgelegt:

$$S_m = -\sum_{q=1}^m \cos[(2N-2-m+2q)\Omega_k + 2\alpha]; \quad m=2,3,\dots \quad (3.A.11)$$

Literaturverzeichnis:

- /1/ Andrews, H.C.
Multidimensional rotations in feature selection.
IEEE Trans. on Comput., Vol. C-20, 1971, S. 1045-1051 .
- /2/ Huang, J.; Schultheiss, P.
Block quantization of correlated Gaussian random variables.
IEEE Trans. on Commun. Systems, Vol. CS-11, 1963, S.289-296.
- /3/ Pearl, J.; Andrews, H.C.; Pratt, W.K.
Performance measures for transform data coding.
IEEE Trans. on Commun., Vol. COM-20, 1972, S. 411-415.
- /4/ Pratt, W.K.
Generalized Wiener filtering computation techniques.
IEEE Trans. on Comput., Vol. C-21, 1972, S. 636-641.
- /5/ Grenander, U.; Szegö, G.
Toeplitz forms and their applications.
Berkeley, Calif. : Univ. California Press, 1958.
- /6/ Shanmugam, K.S.
Comments on "discrete cosine transform" .
IEEE Trans. on Comput., Vol. C-24, 1975, S.759.
- /7/ Pearl, J.
Asymptotic equivalence of spectral representations.
IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Processing, Vol.
ASSP-23, 1975, S.547-551.
- /8/ Toeplitz, O.
Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von un-
endlich vielen Veränderlichen.
Math. Ann., Vol. 70, 1911, S. 351-376.
- /9/ Widom, H.
Toeplitz matrices.
In "Studies in real and complex analysis", I.I. Hirschmann,
Jr., Ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1965.

- /10/ Zurmühl, R.
Matrizen.
Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1964.
- /11/ Zelinski, R.; Noll, P.
Adaptive Blockquantisierung von Sprachsignalen.
Technischer Bericht Nr. 181 des Heinrich-Hertz-Instituts,
Berlin-Charlottenburg, 1975.
- /12/ Ahmed, N.; Natarajan, T.; Rao, K.
Discrete cosine transform.
IEEE Trans. on Comput., Vol. C-23, 1974, S.90-93.
- /13/ Berger, T.
Rate distortion theory.
Prentice-Hall, 1971.
- /14/ Kremer, H.
On the representation of Walsh functions and fast Walsh
transform algorithms.
Angewandte Informatik, Vol.15, 1973, S. 7-20.
- /15/ Ahmed, N. ; Rao, K.
Orthogonal transforms for digital signal processing.
Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1975.
- /16/ Gulamhusein, M.N.
On matrix representation of periodic and aperiodic dyadic
convolutions.
Forschungsbericht Nr. 53 der TH Darmstadt, FG Übertragungs-
technik, 1973.
- /17/ Gray, R.M.
On the asymptotic eigenvalue distribution of Toeplitz matrices.
IEEE Trans. on Inform. Theory, Vol. IT-18, 1972, S. 725-730.
- /18/ Pearl, J.
On coding and filtering stationary signals by discrete Fourier
transforms.
IEEE Trans. on Inform. Theory, Vol. IT-19, 1973, S. 229-232.

- /19/ Hamidi, M.; Pearl, J.
On the residual correlation of finite-dimensional discrete Fourier transforms of stationary signals.
IEEE Trans. on Inform. Theory, Vol. IT-21, 1975, S. 480-482.
- /20/ Georgi, K.H.
Die Orthogonalität der aus den Abtastwerten von sin- und cos-Funktionen gebildeten reellen Fouriermatrix.
Forschungsbericht Nr. 39 der TH Darmstadt, FG Übertragungstechnik, 1972.
- /21/ Pratt, W.; Chen, W.; Welch, L.
Slant transform image coding.
IEEE Trans. on Commun., Vol. COM-22, 1974, S.1075-1093.
- /22/ Pearl, J.
Basis-restricted transformations and performance measures for spectral representations.
IEEE Trans. on Inform. Theory, Vol. IT-17, 1971, S.751-752.
- /23/ Algazi, V.R.; Fino, B.J.
Comments on " Basis-restricted transformations and performance measures for spectral representations".
IEEE Trans. on Inform. Theory, Vol. IT-19, 1973, S. 564-565.
- /24/ Höfker, U.
Mündliche Mitteilung.

