

HEINRICH-HERTZ-INSTITUT — BERLIN-CHARLOTTENBURG

Technischer Bericht Nr. 191

Die Fehlerrückkopplung als Verfahren
zur Färbung des Quantisierungsrauschens

von

Dipl.-Ing. Bernd Heuser

Dr.-Ing. Peter Noll

Berlin

1 9 7 6



EINSTEINUFER 37

1000 BERLIN 10

Heinrich-Hertz-Institut

Berlin-Charlottenburg

Technischer Bericht Nr. 191

**Die Fehlerrückkopplung als Verfahren zur
Färbung des Quantisierungsrauschens**

von

Dipl.-Ing. B. Heuser

Dr.-Ing. P. Noll

Berlin

1976

Die Fehlerrückkopplung als Verfahren zur Färbung des
Quantisierungsrauschens

Zusammenfassung

Bei der Analog/Digital- (A/D)- Wandlung von Sprachsignalen entstehen durch den nur endlichen Wertevorrat der Digitalzeichen Quantisierungsfehler, die nach der Rekonstruktion der Analogwerte (D/A-Wandlung) als additives Störsignal in Form eines bandbegrenzten weißen Rauschens auftreten. In diesem Bericht wird als Verfahren zur Formung des Rauschspektrums die Fehlerrückkopplung untersucht. Die "Färbung des Quantisierungsrauschens" wird hierbei durch Rückführung des gefilterten Quantisierungsfehlers auf den Eingang des Quantisierers vorgenommen. Die hierdurch theoretisch zu erwartende Störleistungsverteilung wurde durch Simulation verschiedener PCM-Systeme auf dem Digitalrechner überprüft. Weiterhin wurden die rekonstruierten Signale nach der D/A-Wandlung akustisch wiedergegeben. Die theoretischen Werte der Rauschleistungsverteilung konnten durch die Simulationen bestätigt werden, die akustische Wiedergabe zeigte jedoch die Unbrauchbarkeit des Verfahrens für die Codierung von Sprache. Grund hierfür sind Störgeräusche, die besonders in den Sprachpausen in Erscheinung treten.

Heinrich-Hertz-Institut
Die Bearbeiter

B. Heuser
(Dipl.-Ing. B. Heuser)

Der Abteilungsleiter

Vöge
(Dr. Ing. K.H. Vöge)

P. Noll
(Dr. Ing. P. Noll)

Der Institutsdirektor

H. Ohnsorge
(Dr. Ing. H. Ohnsorge)

Inhaltsverzeichnis:

Seite

1.	<u>Einleitung</u>	1
2.	<u>Vorbemerkungen zur Berechnungsmethode von Abtastsystemen</u>	2
3.	<u>Problemstellung</u>	6
3.1	Weißes Rauschspektrum	7
3.2	Farbiges Rauschspektrum	8
4.	<u>Die Fehlerrückkopplung als Verfahren der Rauschfärbung</u>	10
4.1	Betrachtung im Zeitbereich	12
4.2	Betrachtung im Frequenzbereich	14
4.3	Bestimmung des Gewinns durch die Fehlerrückkopplung	15
4.4	Verteilung der Rauschleistung gemäß einem vorgegebenen Verlauf des Leistungsdichtespektrums	17
5.	<u>Anwendungen der Fehlerrückkopplung</u>	18
6.	<u>Simulation des Prinzips der Fehlerrückkopplung auf einem Digitalrechner</u>	31
7.	<u>Literaturverzeichnis</u>	37

1. Einleitung

Ein wertkontinuierliches Signal kann in digitaler Form nicht fehlerfrei übertragen werden, weil durch die Quantisierung der Wertevorrat von unendlich vielen möglichen Amplitudenstufen auf eine endliche Anzahl begrenzt wird. Der auftretende Fehler, die Differenz zwischen den Abtastwerten des wertkontinuierlichen und des wertediskreten Signals, wird als Quantisierungsfehler bezeichnet. Wie Bennett /1/ gezeigt hat, kann man fast immer davon ausgehen, daß der Quantisierungsfehler stochastisch unabhängig vom Eingangssignal auftritt, außerdem ein Leistungsdichtespektrum hat, das über einen großen Frequenzbereich hinweg annähernd konstant ist und bei zeitdiskreter Signalverarbeitung zusätzlich durch den Alaising- (Spiegelungs-) Effekt gebeeht wird. Hinter dem Rekonstruktionsfilter des Abtastsystems erscheint dann das Quantisierungsrauschen als additive Störung mit einer Leistungsverteilung, die bis zur halben Abtastfrequenz bzw. bis zur Filtergrenzfrequenz fast konstant ist (bandbegrenztes weißes Rauschen). Oft ist eine solche Spektralverteilung nicht erwünscht. So ist aus subjektiven Messungen (z.B. Atal und Schröder /2/) bekannt, daß bei der Digitalisierung von Sprache das Quantisierungsrauschen mit steigender Frequenz abnehmen sollte, um ein über der Frequenz annähernd konstantes Signal-Rausch-Verhältnis sicherzustellen. Manchmal ergibt sich auch die Möglichkeit, Rauschanteile in bestimmten Frequenzbereichen unbeachtet zu lassen, weil sie dort bei der Rekonstruktion weggefiltert werden können, z.B. von der oberen Grenzfrequenz des analogen Zeitsignals bis zur halben Abtastfrequenz.

Spang und Schultheiss /3/ haben eine solche Minimierung des Quantisierungsrauschens in einem eingeschränkten Frequenzbereich durchgeführt. Unsere Arbeit greift diese Untersuchungen noch ein-

mal auf und erweitert die Ergebnisse durch den Ansatz einer beliebigen Bewertung der Spektralverteilung. Außerdem wird gezeigt, daß die Minimierung der bewerteten Rauschleistung auf ein Prädiktionsproblem zurückzuführen ist. Die Färbung des Quantisierungsrauschens wird durch Rückführung des gefilterten (=gefärbten) Quantisierungsfehlers auf den Eingang des Quantisierers vorgenommen. Dadurch wird der Quantisierer stärker belastet und es kann zu Übersteuerungen des Systems kommen. Um diese Probleme studieren zu können, wurde das PCM-System mit Fehlerrückführung auf einem Digitalrechner simuliert.

Diese Arbeit faßt die vor einigen Jahren durchgeführten Untersuchungen im Abschnitt 6 noch einmal zusammen und zeigt die Grenzen bei der Anwendung des Verfahrens.

2. Vorbemerkungen zur Berechnungsmethode von Abtastsystemen

Für die Digitalisierung eines bandbegrenzten Zeitsignals $s(t)$ wird zuerst eine Abtastung vorgenommen. Dabei werden dem Signal $s(t)$ Probenwerte $s(n)$ zu äquidistanten Zeitpunkten entnommen; $s(t)$ bzw. $s(n)$ seien Musterfunktionen eines zeitkontinuierlichen bzw. zeitdiskreten stochastischen Prozesses. Für jeden Zeitindex n ist $s(n)$ eine Zufallsvariable; der zeitdiskrete Prozeß ist damit eine mit Indizes versehene Menge von Zufallsvariablen. Es wird vorausgesetzt, daß ein solcher Prozeß kovarianzstationär ist, d.h., der Mittelwert $s(n)$ ist konstant, und die Werte der Autokorrelationsfolge (AKF) $R_{ss}(k)$ sind allein vom Abstand k , jedoch nicht vom absoluten Index der Abtastwerte abhängig:

$$R_{ss}(k) = E \left[s(n) s(n+k) \right] \quad (2.1)$$

Deshalb ist $R_{ss}(k)$ eine gerade Funktion, also

$$R_{ss}(-k) = R_{ss}(k)$$

Die zweiseitige z-Transformierte der AKF $R_{SS}(k)$ ist

$$S_{SS}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{SS}(k) z^{-k}$$

Längs des Einheitskreises ($z=e^{j\Omega}$) wird $S_{SS}(z)$ zum Leistungsdichtespektrum (LDS) des zeitdiskreten Prozesses $\{s(n)\}$:

$$S_{SS}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{SS}(k) e^{-jk\Omega} \quad (2.2)$$

Das LDS ist also die Fouriertransformierte der AKF:

$$R_{SS}(k) \longleftrightarrow S_{SS}(\Omega) \quad (2.3)$$

Die Rücktransformation (entspr. Berechnung der Fourierkoeffizienten) ist gegeben durch

$$R_{SS}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{SS}(\Omega) e^{jk\Omega} d\Omega \quad (2.4)$$

Das LDS ist eine periodische Funktion (Periode 2π). Da die AKF eine gerade Funktion ist, enthält die Fourierreihe nach Gl. (2.2) nur cos-Glieder. Die mittlere Leistung des zeitdiskreten Prozesses ist

$$\sigma_s^2 = E[s^2(n)] = R_{SS}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{SS}(\Omega) d\Omega \quad (2.5)$$

Die Fläche unter dem LDS innerhalb des Periodizitätsintervalls ist also gleich dem 2π -fachen der mittleren Leistung. Die Musterfunktion des ideal rekonstruierten zeitkontinuierlichen Prozesses lautet

$$\hat{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot \text{si} \frac{\pi}{T} (t-nT). \quad (2.6)$$

Für die Abtastzeitpunkte gilt stets

$$\hat{s}(nT) = s(nT), \quad (2.7)$$

d.h., die nach Gl. (2.5) rekonstruierten Abtastwerte sind identisch mit den Abtastwerten des ursprünglichen Analogsignals. Es wird i.a. vorausgesetzt, daß der eingangs zeitkontinuierliche Prozeß ein bandbegrenzttes Leistungsdichtespektrum hat, d.h. es gilt

$$S_{SS}(\omega) = 0 \quad \text{für } |\omega| > \omega_g \quad (2.8)$$

Werden dessen Musterfunktionen mit genügend kleiner Periode abgetastet, d.h. ist

$$T \leq \frac{\pi}{\omega_g}, \quad (2.9)$$

so ist der mittlere quadratische Rekonstruktionsfehler null:

$$E \left[(s(t) - \hat{s}(t))^2 \right] = 0 \quad (2.10)$$

Die Autokorrelationsfunktion des zeitkontinuierlichen Prozesses läßt sich dann analog zu Gl. (2.6) aus der Autokorrelationsfolge $R_{SS}(k)$ rekonstruieren. Insbesondere gilt die Leistungsinvarianz. Die mittlere Leistung des Prozesses ist mit dem quadratischen Mittel der Zahlenfolge identisch.

PCM-Systeme sind dadurch charakterisiert, daß nach der Abtastung eine Quantisierung der Abtastwerte erfolgt. Der zeitdiskrete Prozeß $\{s(n)\}$ wird in einen zeit- und wertediskreten Prozeß $\{p(n)\}$ überführt. Dabei entsteht der Quantisierungsfehler $q(n)$ als Differenz zwischen den wertediskreten und den wertekontinuierlichen Zahlenfolgen. Bild 1 auf der nächsten Seite zeigt das mathematische Modell für diesen zeitdiskreten Prozeß.

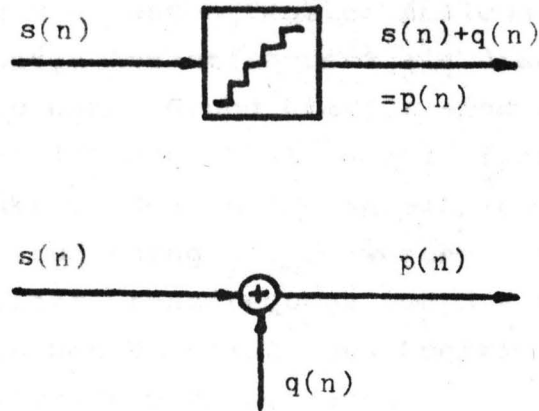


Bild 1: Definition des Quantisierungsfehlers

Ist die Zahl der Quantisierungsstufen genügend groß, so sind die Prozesse $\{s(n)\}$ und $\{q(n)\}$ nicht miteinander korreliert /1/. Es gilt

$$R_{sq}(k) = E [s(n) \cdot q(n+k)] = 0 \quad (2.11)$$

für alle k . Damit wirkt der Quantisierungsfehler als additive Störquelle; Signal und Störung können getrennt behandelt werden. Die AKF und das LDS des quantisierten Signals $p(n)$ berechnen sich somit aus

$$\begin{aligned} R_{pp}(k) &= R_{ss}(k) + R_{qq}(k) \\ S_{pp}(\omega) &= S_{ss}(\omega) + S_{qq}(\omega) \end{aligned} \quad (2.12)$$

3. Problemstellung

Die Abtastung von bandbegrenzten Analogsignalen erfolgt i.a. mit einer höheren Abtastfrequenz als dies nach dem Abtasttheorem notwendig wäre. Grund hierfür sind die physikalischen Grenzen der Realisierbarkeit der Tiefpässe zur Bandbegrenzung und Rekonstruktion des Analogsignals (endliche Flankensteilheit des Amplitudenganges). So werden z.B. PCM-Sprachcodierungssysteme mit einer Grenzfrequenz von 3.4 KHz mit 8 KHz abgetastet, die Lücke zwischen Durchlaß- und Sperrbereich der Tiefpässe kann also maximal 600 Hz betragen.

Die Abtastwerte $q(n)$ des Quantisierungsrauschen enthalten eine Rauschleistung

$$\sigma_q^2 = E [q^2(n)] \quad (3.1)$$

Durch das Rekonstruktionsfilter entsteht am Ausgang des Systems eine bewertete Rauschleistung σ_{q*}^2 , die kleiner ist, als σ_q^2 . Es kann ein Gewinn

$$G = \frac{\sigma_q^2}{\sigma_{q*}^2} \quad (3.2)$$

definiert werden, um den sich das Signal-Rauschverhältnis gegenüber dem durch die Abtastfolgen gegebenen Verhältnis $\frac{\sigma_s^2}{\sigma_q^2}$

erhöht:

$$\text{SNR} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_{q*}^2} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_q^2} \cdot G \quad (3.3)$$

Um die Rauschleistung σ_{q*}^2 bestimmen zu können, wird eine Bewertungsfunktion $B(\Omega)$ eingeführt, durch die das Spektrum der Quantisierungsfehlerfolge bewertet wird. $B(\Omega)$ ist eine gerade, mit 2π periodische Funktion, die im Durchlaßbereich des Rekonstruktionsfilters den Wert 1 hat.

3.1 Weißes Rauschspektrum

Wie Bennett /1/ gezeigt hat, liefern Quantisierer ein annähernd weißes Rauschen, wenn die Zahl der Quantisierungsstufen nicht zu klein ist, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} S_{qq}(\Omega) &= \sigma_q^2 \\ R_{qq}(k) &= \sigma_q^2 \cdot \delta(k) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\text{mit} \quad \delta(k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq 0 \\ 1 & \text{" } k = 0 \end{cases}$$

Die mittlere Leistung des Quantisierungsfehlers läßt sich gem. Gl. (2.5) berechnen

$$\sigma_q^2 = E [q^2(n)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{qq}(\Omega) d\Omega \quad (3.5)$$

Wird das Spektrum des Quantisierungsfehlers bei der Leistungsbestimmung mit der Bewertungsfunktion $B(\Omega)$ bewertet, so ergibt sich

$$\sigma_{q**}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B(\Omega) S_{qq}(\Omega) d\Omega \quad (3.6)$$

Für $S_{qq}(\Omega) = \sigma_q^2$ entsteht dann nach Gl. (3.2) ein Gewinn

$$G = b_0^{-1}; \quad (3.7)$$

dabei ist

$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B(\Omega) d\Omega \quad (3.8)$$

der Mittelwert der Bewertungsfunktion $B(\Omega)$ im Periodizitätsintervall 2π .

Ein Spezialfall ist die Bewertung des Quantisierungsrauschens bei der Übertragung bandpaßbegrenzter Signale. Hierfür kann im Idealfall gelten

$$B(\Omega) = \sigma; \quad |\Omega| < \Omega_u; \quad |\Omega| > \Omega_o$$

$$B(\Omega) = 1; \quad \text{sonst im Intervall } -\pi < \Omega < \pi$$

Es wird dann

$$b_o = \frac{1}{\pi} \cdot (\Omega_o - \Omega_u) \quad (3.9)$$

Für ein Telefon-PCM-System mit 8 KHz-Abtastung und einer Bandbegrenzung von 300 Hz - 3400 Hz erhält man durch die beschriebene Fehlerbewertung einen Gewinn $G = 1.29$.

Damit erhöht sich der bewertete Signal-Rauschabstand um 1.11 dB. Bild 2 zeigt den Verlauf der Bewertungsfunktion $B(\Omega)$.

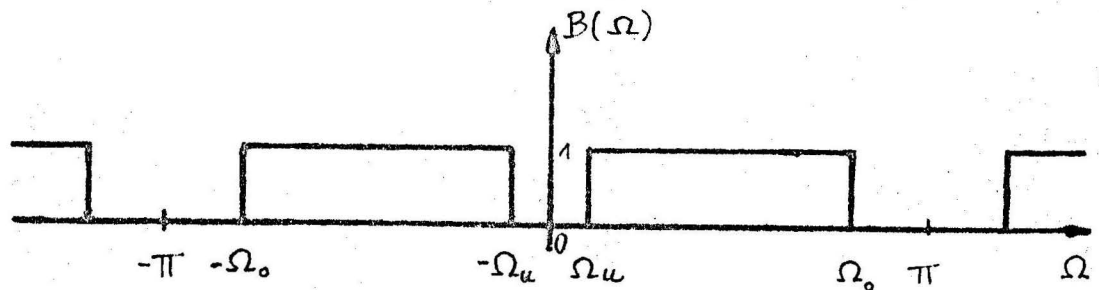


Bild 2: Verlauf der Bewertungsfunktion bei einem Telefonkanal

3.2 Farbige Rauschspektrum

Durch ein im nächsten Abschnitt beschriebenes Verfahren der Rückkopplung des Quantisierungsfehlers ist es möglich, eine Färbung des Rauschspektrums vorzunehmen: die Folge $f(n)$ der Quantisierungsfehler besitzt jetzt kein weißes Spektrum mehr, Korrelationen zum Eingangssignal sind jedoch auch in diesem Fall nicht vorhanden.

Die Färbung wird durch ein lineares Filter mit der Übertragungsfunktion $D(j\Omega)$ vorgenommen. Hierdurch kann das Rauschspektrum $S_{ff}(\Omega)$ so geformt werden, daß es im Durchlaßbereich des Rekonstruktionsfilters geringe Anteile der Rauschleistung σ_f^2 besitzt; der wesentliche Anteil dieser Leistung wird in den Frequenzbereich geschoben, in dem der Sperrbereich des Rekonstruktionsfilters liegt. Es zeigt sich, daß die Gesamt-Rauschleistung $\sigma_f^2 = E[f^2(n)]$ größer ist, als die der unkorrelierten Fehlerfolge $q(n)$, d.h. es tritt eine Verstärkung

$$V = \frac{\sigma_f^2}{\sigma_q^2} \quad (3.10)$$

der gesamten Rauschleistung ein.

Aus dem im Durchlaßbereich des Rekonstruktionsfilters liegende Rauschspektrum

$$S_{f^* f^*}(\Omega) = B(\Omega) S_{ff}(\Omega) \quad (3.11)$$

läßt sich die bewertete Rauschleistung

$$\sigma_{f^*}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B(\Omega) S_{ff}(\Omega) d\Omega \quad (3.12)$$

ableiten, die geringer als die Rauschleistung σ_q^2 ist. Der Gewinn ist

$$G = \frac{\sigma_q^2}{\sigma_{f^*}^2} \geq 1 \quad (3.13)$$

Im folgenden Teil der Arbeit wird beschrieben, wie dem LDS $S_{ff}(\Omega)$ mit $D(j\Omega)$ eine Färbung gegeben werden kann, so daß $\sigma_{f^*}^2$ zum Minimum wird.

4. Die Fehlerrückkopplung als Verfahren der Rauschfärbung

Bild 3 zeigt das Prinzip der Färbung des Quantisierungsrauschens mit dem Verfahren der Fehlerrückkopplung.

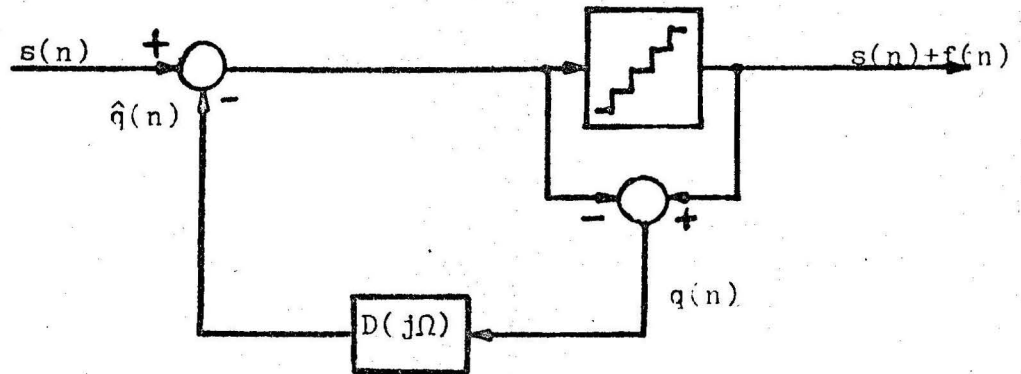


Bild 3: Rückkopplung des Quantisierungsfehlers.

Von den digital zu übertragenden oder abzuspeichernden Abtastwerten $s(n)$ werden vor der Quantisierung durch ein lineares Filter mit der Übertragungsfunktion $D(j\Omega)$ korrelierte Quantisierungsfehler $\hat{q}(n)$ subtrahiert. Resultat ist folgender Gesamtfehler des Systems.

$$f(n) = q(n) - \hat{q}(n) \quad (4.1)$$

Für den stochastischen Prozeß $\{q(n)\}$ werden im folgenden die gleichen Eigenschaften wie im Abschnitt 2 vorausgesetzt. Korrelationen der Eingangsfolge $s(n)$ und der Fehlerfolge $q(n)$ seien nicht vorhanden. Es gelte also

$$R_{sq}(k) = 0 \quad \text{für alle } k. \quad (4.2)$$

Damit gilt ebenfalls

$$R_{sq}^{\wedge}(k) = 0 \text{ für alle } k. \quad (4.3)$$

Dem Prozeß $\{s(n)\}$ werden somit additiv zwei Rauschquellen überlagert. Für den unabhängig vom Eingangsprozeß $\{s(n)\}$ betrachteten, mit $B(\Omega)$ frequenzmäßig bewerteten Fehler $f(n)$ gilt somit das Schema nach Bild 4.

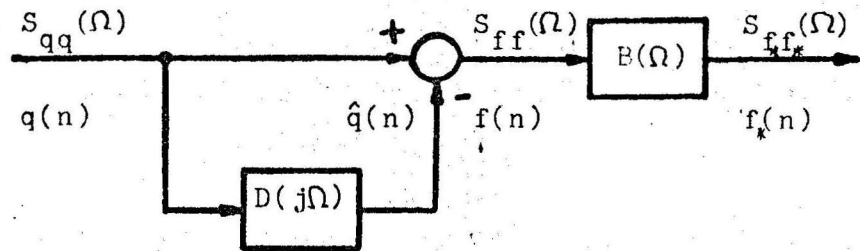


Bild 4: Ersatzbild für das Verfahren der Fehlerrückkopplung

Die Bewertung des Systemfehlers $f(n)$ erfolgt durch ein lineares Filter mit der Leistungsübertragungsfunktion $B(\Omega)$. Die im Abschnitt 3 formulierte Aufgabe besteht darin, $D(j\Omega)$ so zu bestimmen, daß die bewertete Fehlerleistung

$$\sigma_{f^*}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B(\Omega) S_{ff}(\Omega) d\Omega$$

zum Minimum wird.

Durch Vertauschung der in Bild 4 dargestellten linearen Systeme ändert sich für die Bildung des bewerteten Fehlers $f^*(n)$ nichts; Bild 5 zeigt das geänderte Prinzipbild.

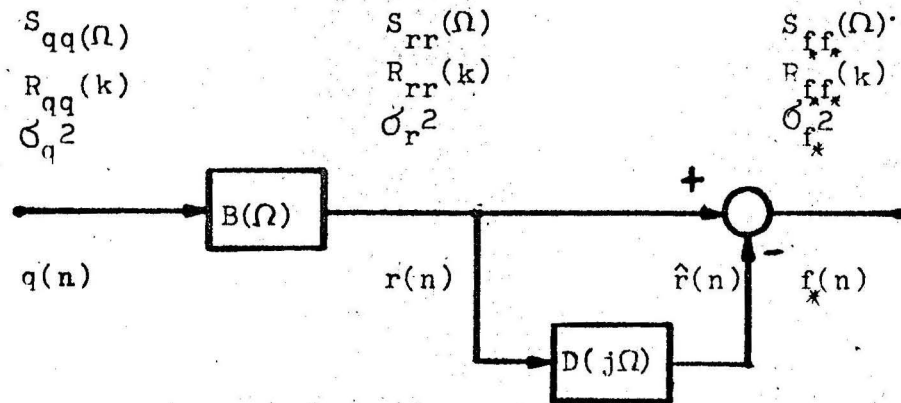


Bild 5: Ersatzbild wie Bild 4, jedoch nach Vertauschen der linearen Operationen

Aus diesem Bild ist die folgende Formulierung des Problems leicht abzulesen:

Die unkorrelierte Folge $q(n)$ wird durch $B(\Omega)$ korreliert. Um $\sigma_{f^*}^2$ zu minimieren, muß die Folge $\hat{r}(n)$ möglichst gut mit der Folge $r(n)$ übereinstimmen - derart, daß

$$\sigma_{f^*}^2 = E \left[(r(n) - \hat{r}(n))^2 \right] = \min \quad (4.4)$$

Das lineare Filter $D(j\Omega)$ muß also eine ungestörte Prädiktion durchführen /4/.

4.1 Betrachtung im Zeitbereich

Die Lösung des Minimierungsproblems kann sofort angegeben werden: Ist der Prädiktor mit der Übertragungsfunktion $D(j\Omega)$ ein nicht-rekursives Filter mit der Impulsantwort

$$d(n) = \sum_{j=1}^N d_j \delta(n-j), \quad (4.5)$$

so erhält man als Schätzwerte

$$\hat{r}(n) = \sum_{j=1}^N d_j r(n-j) \quad (4.6)$$

Die Minimierung der Leistung G_{f^*} nach Gl. (4.4) führt auf das Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^N d_{j^*} \cdot R_{rr}(j-k) = R_{rr}(k) \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4.7)$$

d_{j^*} , $j=1, 2, \dots, N$ sind die optimalen Werte der Impulsantwort des Prädiktors. $R_{rr}(\cdot)$ ist die AKF der Folge $r(n)$. Sie entspricht der Filter-AKF* des Korrelators mit der Leistungsübertragungsfunktion $B(\Omega)$ und ist mit der Folge der Koeffizienten der Fourierreihen-Entwicklung für $B(\Omega)$ identisch. Es gilt also

$$R_{rr}(k) = E [r(n) \cdot r(n+k)] = \sigma_q^2 \cdot b(k) \\ b(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B(\Omega) \cdot e^{jk} d\Omega \quad (4.8)$$

Das Gleichungssystem für die Berechnung des optimalen Prädiktors lautet somit

$$\sum_{j=1}^N d_{j^*} \cdot b(j-k) = b(k) \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (4.9)$$

* - Die Filter-AKF ist die AKF eines linear gefilterten Signals, wenn am Filter-Eingang ein unkorreliertes Signal anliegt. Die AKF einer gefilterten Zahlenfolge läßt sich allgemein aus der Faltung der AKF des Signals am Filter-Eingang mit der Filter-AKF berechnen.

bzw. in Matrixform

$$\begin{bmatrix} b(0) & b(1) & b(2) & \dots & b(N-1) \\ b(1) & b(0) & b(1) & \dots & b(N-2) \\ b(2) & b(1) & b(0) & \dots & b(N-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b(N-1) & b(N-2) & b(N-3) & \dots & b(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_{1*} \\ d_{2*} \\ d_{3*} \\ \vdots \\ d_{N*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b(1) \\ b(2) \\ b(3) \\ \vdots \\ b(N) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Bei der Aufstellung der Koeffizientenmatrix wurde berücksichtigt, daß $b(\cdot)$ eine gerade Funktion ist. Die Matrix besitzt eine Töplitzform und kann daher rekursiv invertiert werden /4/. Bei einer Rechteck-Bewertungsfunktion werden die $b(\cdot)$ zu $si(\cdot)$ - Werten. Diese spezielle Lösung wurde bereits von Spang und Schultheiß angegeben /3/. In abgekürzter Matrizen-Schreibweise wird aus Gl. (4.10)

$$\underline{B} \cdot \underline{d}_* = \underline{b}, \quad (4.11)$$

bzw.

$$\underline{d}_* = \underline{B}^{-1} \underline{b} \quad (4.12)$$

4.2 Betrachtung im Frequenzbereich

Die bewertete Rauschleistung

$$\sigma_{f*}^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} B(\omega) \cdot S_{ff}(\omega) d\omega$$

soll zum Minimum gemacht werden. Bild 4 zeigt, daß

$$S_{ff}(\Omega) = S_{qq}(\Omega) \cdot / 1 - D(j\Omega) / ^2 \text{ ist.} \quad (4.13)$$

Mit $S_{qq}(\Omega) = \sigma_q^2$

wird $S_{ff}(\Omega) = \sigma_q^2 \cdot / 1 - D(j\Omega) / ^2 \quad (4.14)$

Damit ergibt sich für die bewertete Rauschleistung

$$\sigma_{f*}^2 = \frac{\sigma_q^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B(\Omega) / 1 - D(j\Omega) / ^2 d\Omega \quad (4.15)$$

Die Minimierung dieser Leistung kann auch als Approximation einer vorgegebenen Übertragungsfunktion $Dv(j\Omega) = 1$ durch das nicht-rekursive Filter mit $D(j\Omega) = \sum_{l=1}^N d_l \cdot e^{-jl\Omega}$

gedeutet werden, wobei durch $B(\Omega)$ eine frequenzabhängige Bewertung des Fehlers $(D(j\Omega) - Dv(j\Omega))$ vorgenommen wird. Das Lösungsschema wurde bereits in /5/ angegeben, es führt auf das Gleichungssystem (4.9).

4.3 Bestimmung des Gewinns durch die Fehlerrückkopplung

Bei einer optimalen linearen Schätzung ist die Folge der Schätzfehler orthogonal zu allen für die Schätzung herangezogenen Daten:

$$E [f_* (n) \cdot r(n-j)] = 0 \quad j=1,2,\dots,N \quad (4.16)$$

Damit ist die Fehlerfolge auch orthogonal zum Schätzwert $\hat{r}(n)$, der als Linearkombination aus den Werten $r(n-j)$; $j=1,2,\dots,N$ gebildet wird:

$$E [f_* (n) \cdot \hat{r}(n)] = 0 \quad (4.17)$$

Die Rauschleistung ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} \sigma_{f*}^2 &= E [f_{*}^2(n)] \\ &= E [f_{*}(n) \cdot (r(n) - \hat{r}(n))] \\ &= E [(r(n) - \hat{r}(n)) \cdot r(n)] \\ &= R_{rr}(0) - E [\hat{r}(n) \cdot r(n)] \end{aligned}$$

Bei Berücksichtigung der Gl. (4.6) und (4.8) folgt:

$$\begin{aligned} \sigma_{f*}^2 &= \sigma_q^2 \left[b(0) - \sum_{k=1}^N d_{k*} \cdot b(k) \right] \\ &= \sigma_q^2 \left[b(0) - \underline{d}_{*}^T \cdot \underline{b} \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

und damit (bei Verwendung der Gl. (4.12))

$$\sigma_{f*}^2 = \sigma_q^2 \cdot \left[b(0) - \underline{b}^T \cdot \underline{B}^{-1} \cdot \underline{b} \right] \quad (4.19)$$

Der Gewinn wird nach Gl. (3.2)

$$= \frac{\sigma_q^2}{\sigma_{f*}^2} = \frac{1}{b(0) - \underline{b}^T \cdot \underline{B}^{-1} \cdot \underline{b}} \quad (4.20)$$

Um diesen Faktor verbessert sich das Signal-Rausch-Verhältnis σ_s^2 / σ_q^2 der nicht bewerteten Abtastfolgen durch die Fehler-rückkopplung. Gegenüber der (gleichen) Bewertung des Rauschens ohne Anwendung der Fehlerrückkopplung (vgl. Gl. 3.7) wird durch die Färbung ein zusätzlicher Gewinn

$$G' = G \cdot b(0) = \frac{b(0)}{b(0) - \underline{b}^T \cdot \underline{B}^{-1} \cdot \underline{b}} \quad (4.21)$$

erzielt. Ohne Färbung des Quantisierungsrauschens wird $\underline{b} = \underline{0}$ und damit $\underline{b}^T \cdot \underline{B}^{-1} \cdot \underline{b} = \underline{0}$. Der zusätzliche Gewinn G' ist dann, wie erwartet, gleich eins.

4.4 Verteilung der Rauschleistung gemäß einem vorgegebenen Verlauf des Leistungsdichtespektrums

Die Minimierung der bewerteten Rauschleistung wurde bereits als Lösung eines Prädiktionsproblems dargestellt. Sie ist mit der Dekorrelation einer Zahlenfolge identisch. Im Modell nach Bild 5 ist diese Zahlenfolge durch lineare Filterung einer unkorrelierten Rauschquelle dargestellt. Zur optimalen Einstellung des Prädiktors ist hierfür lediglich die Kenntnis der Filter-AKF des Korrelators notwendig. Dessen Werte sind, wie bereits erwähnt, mit dem Fourier-Koeffizienten der Leistungsübertragungsfunktion identisch. Vollständige Dekorrelation bedeutet, daß die AKF des Prädiktionsfehlers identisch ist mit der des weißen Rauschens. Ein nichtrekursives Filter als optimaler Prädiktor muß hierfür i.a. unendlich lang sein. Aus Bild 5 lassen sich für diesen Fall die folgenden Beziehungen ableiten:

$$\begin{aligned} R_{f_{oo} f_{oo}}(k) &= \sigma_r^2 \cdot \delta(k) \\ S_{f_{oo} f_{oo}}(\Omega) &= \sigma_r^2 = \sigma_q^2 \cdot B(\Omega) / |1 - D_{oo}(j\Omega)|^2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Nach Gl. (4.8) gilt

$$\sigma_r^2 = R_{rr}(\sigma) = \sigma_q^2 \cdot b(\sigma) = \sigma_q^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B(\Omega) d\Omega$$

Durch Umformung von Gl. (4.22) ergibt sich

$$|1 - D_{oo}(j\Omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\int_{-\pi}^{\pi} B(\Omega) d\Omega}{B(\Omega)} \quad (4.23)$$

In Gl. (4.22) und Gl. (4.23) wurde vorausgesetzt, daß $B(\Omega)$ nur von Null verschiedene Werte besitzt, damit die Leistungsübertragungsfunktion $|1 - D_{oo}(j\Omega)|^2$ endlich bleibt. Die so beschriebene Einstellung des Prädiktors wird auch als inverse Filterung

bezeichnet, weil die Leistungsübertragungsfunktionen $B(\Omega)$ des Korrelators und des Prädiktionsfehlerfilters $|1-D_{\infty}(j\Omega)|^2$ bei vollständiger Dekorrelation bis auf eine Konstante invers zueinander verlaufen.

Für die Anwendung der inversen Filterung auf die Färbung des Quantisierungsrauschens läßt sich demnach folgendes Lösungsschema angeben:

Eine vorgegebene Spektralverteilung des Quantisierungsrauschens für ein PCM-System nach Bild 3 läßt sich dadurch approximieren, daß man das im Abschnitt 4.1 angegebene Schema der Prädiktion auf eine korrelierte Zahlenfolge anwendet, deren Leistungsdichtespektrum invers zur gegebenen Spektralverteilung verläuft. In Gl. (4.9) sind demnach für die Werte der Filter-AKF $b(\cdot)$ die Fourierkoeffizienten der zur gegebenen Leistungsverteilung inversen Verteilung einzusetzen.

5. Anwendungen der Fehlerrückkopplung

Anhand von drei Beispielen soll die Wirkung der Fehlerrückkopplung erläutert werden.

1. Beispiel: Minimierung der Rauschleistung innerhalb einer Grenzkreisfrequenz $\Omega_0 < \pi$ ($\Omega_u = \sigma$, vgl. Bild 2).

Mit

$$B(\Omega) \begin{cases} = 1; & |\Omega| \leq \Omega_0 \\ = \sigma; & \Omega_0 < |\Omega| < \pi \end{cases} \quad (5.1)$$

können die Fourierkoeffizienten $b(k)$ aus Gl. (4.8) zu

$$b(k) = \frac{\Omega_0}{\pi} \operatorname{si}(k \Omega_0) \quad (5.2)$$

$|k| = 0, 1, 2, \dots$

bestimmt werden.

Der Gewinn, d.h. die mögliche Vergrößerung des Signal-Rausch-
abstandes, durch die Fehlerrückkopplung und Fehlerbewertung,
läßt sich dann aus Gl. (4.20) berechnen, ebenso der nach
Gl. (4.21) definierte Zusatzgewinn G' .

Bild 6 zeigt die Abhängigkeit von G' von der normierten Grenz-
frequenz $\frac{\Omega_0}{T_c}$;

der Parameter N gibt die Zahl der verwendeten Filterkoeffizienten
 d_{k*} , $k=1,2,\dots,N$ an.

(Bild 6 s. nächste Seite).

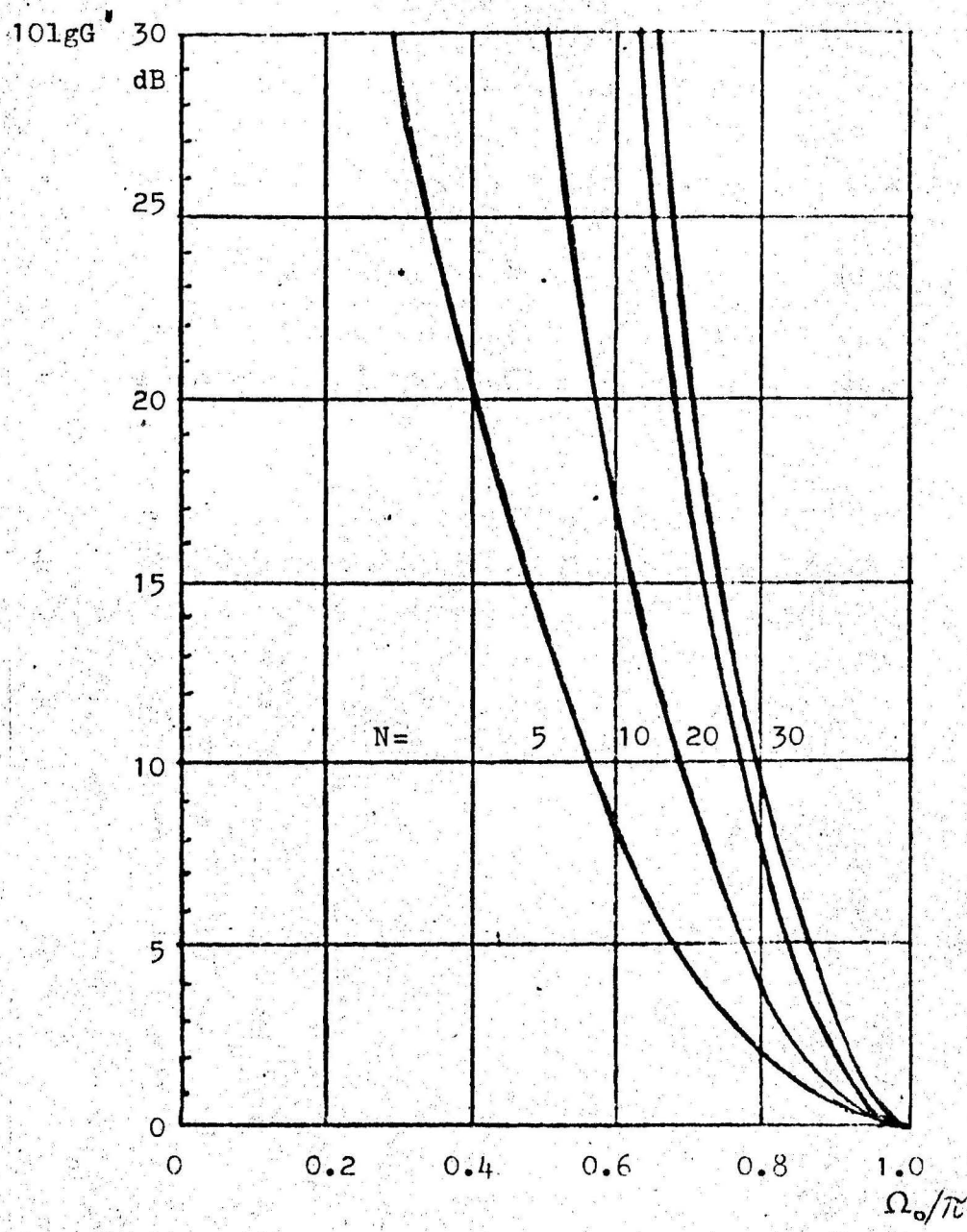


Bild 6: Zusatzgewinn G' für Beispiel 1

Die folgenden Bilder 7 -10 gelten für $\Omega_0 = 0,85 \pi$, d.h. für eine 3.4 KHz-Grenzfrequenz in einem 8 KHz-Abtastsystem. Bild 7 zeigt die normierten Fourierkoeffizienten $b(k)/b(0)$ der Bewertungsfunktion $B(\Omega)$, Bild 8 den Zusatzgewinn G' nach Gl. (4.21) in Abhängigkeit von der Filterlänge N . Für das im Abschnitt 4.1 beschriebene Prädiktionsproblem lassen sich diese dargestellten Größen folgendermaßen deuten: $b(k)/b(0)$ als normierte AKF eines bandbegrenzten weißen Rauschens, und G' als Prädiktionsgewinn, d.h. als Quotient der Leistungen dieses Rauschens und des Schätzfehlers bei einschrittiger Prädiktion.

In Bild 9 ist der Verlauf des Leistungsdichtespektrums $S_{ff}(\Omega)/\sigma_q^2/1-D_*(j\Omega)^2$ bei optimaler Einstellung des Prädiktors nach Gl. (4.9) dargestellt. Parameter ist wiederum die Filterlänge N . Bild 10 zeigt hierzu die resultierende AKF des gefärbten Quantisierungsfehlers $R_{ff} [K] = E [f(n) \cdot f(n+k)]$ für $N=30$.

(Bilder 7 und 8 s. nächste Seite).

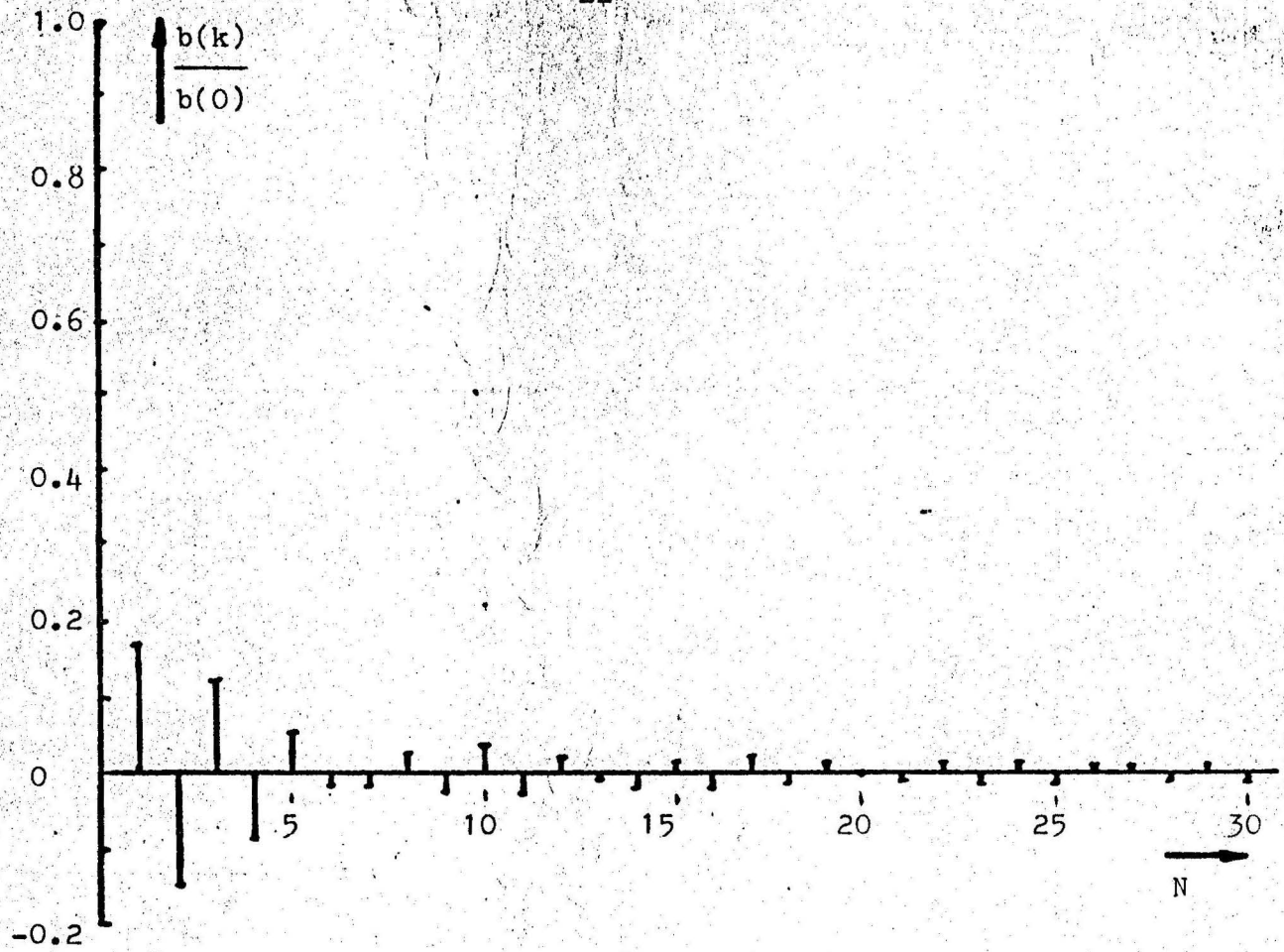


Bild 7: Fourierkoeffizienten von B (Ω)

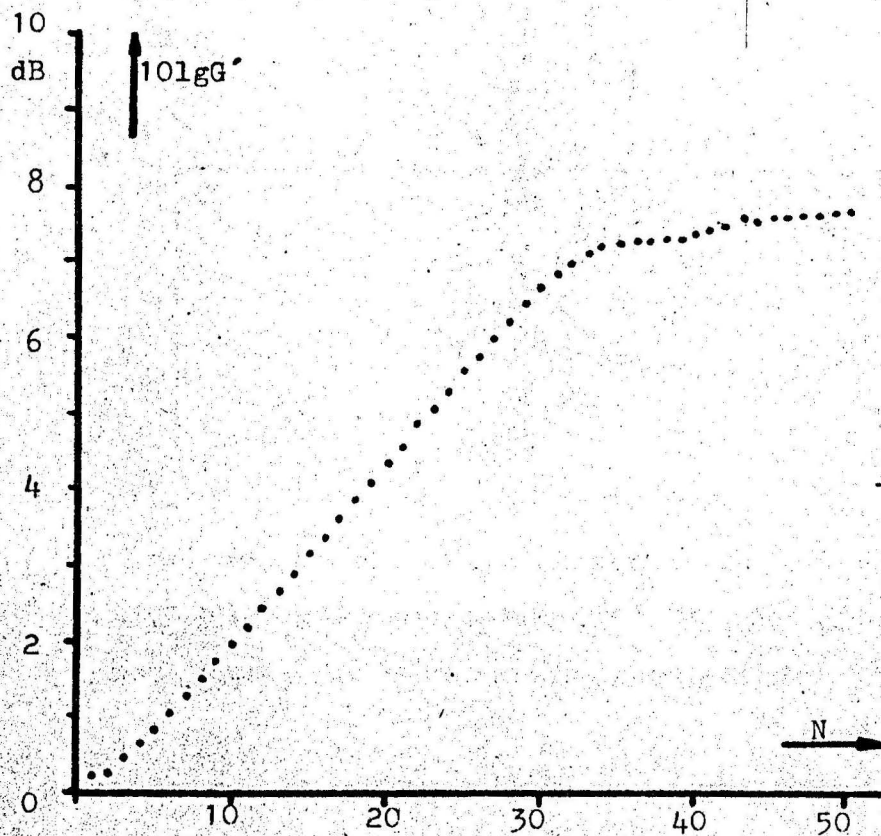


Bild 8: Gewinn in Abhängigkeit von der Zahl der Filterkoeffizienten

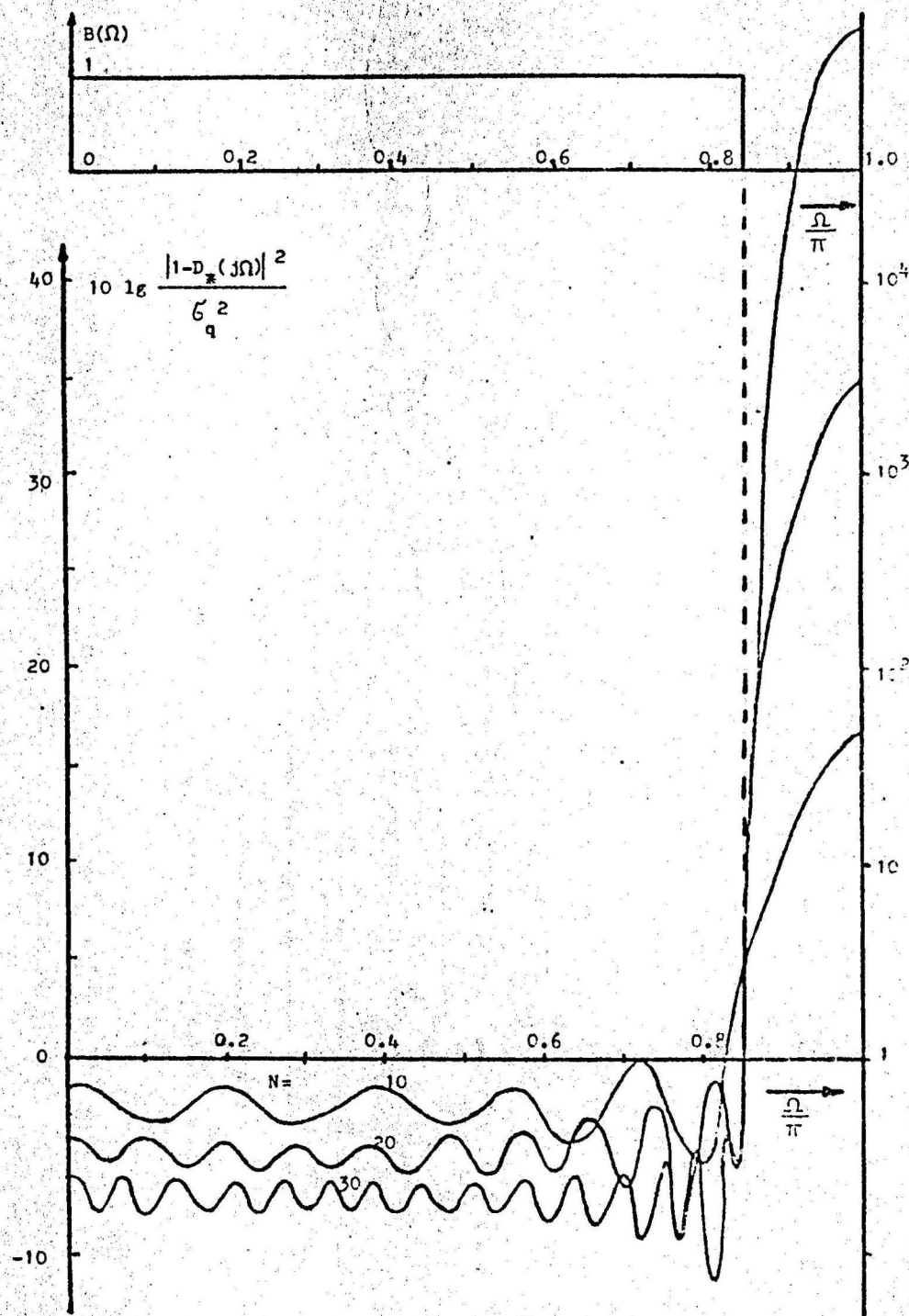


Bild 9: Normiertes Leistungsdichtespektrum für Quantisierungsfehler mit Fehlerrückkopplung über ein Filter der Länge $N = 10, 20, 30$, oben: zugehörige Fehlerbewertungsfunktion (Beispiel 1)

Wie erwartet, erfolgt durch die Rückführung eine Absenkung der Rauschleistung dort, wo $B(\Omega) = 1$ gesetzt wurde, während oberhalb der Grenzfrequenz Ω_0 große Rauschanteile hinzukommen. Aus Bild 6 ist ersichtlich, daß durch Vergrößerung der Koeffizientenzahl N eine weitere Absenkung unterhalb Ω_0 erreicht werden kann, jedoch nur bei Inkaufnahme großer Störleistungsanteile oberhalb Ω_0 ; gleiches gilt für die Verkleinerung von Ω_0 bei gleicher Abtastfrequenz und Koeffizientenzahl.

Mit den optimalen Koeffizienten wurde auch die Übertragungsfunktion $D_*(j\Omega)$ des Rückführungsfilters berechnet. Unterhalb Ω_0 ergibt sich zwar eine Approximation von $D_V(j\Omega) = 1$ (vgl. Abschnitt 4.2); jedoch überwiegt amplitudenmäßig die Verstärkung in der Nähe der halben Abtastfrequenz. Durch $D_*(j\Omega)$ wird das Rauschen so gefärbt, daß die wesentlichen Rauschanteile in dem Frequenzbereich liegen, für die $B(\Omega)$ kleine Werte annimmt. In unserem Beispiel wirkt das Netzwerk mit der Übertragungsfunktion $D_*(j\Omega)$ daher als "Verstärker" für die Rauschanteile im Frequenzbereich $|\Omega| > \Omega_0$. Bild 10 zeigt die durch die Fehlerrückkopplung auftretende Korrelation in der gefärbten Quantisierungsfehlerfolge $f(n)$. Die Rauschanteile bei $\Omega = \tilde{\pi}$ sind gut zu erkennen am alternierenden Vorzeichen der AKF-Werte.

2. Beispiel: Minimierung des Quantisierungsrauschens von einer unteren Grenzfrequenz Ω_u bis zu einer oberen Grenzfrequenz Ω_0 .

Da für das erste Beispiel eine größere Absenkung der Rauschleistung nur durch Einengung des interessierenden Spektralbereiches bei gleicher Abtastfrequenz zu erreichen war, wurde die Bewertung der Störleistung erst oberhalb einer Grenzfrequenz durchgeführt. Für die praktische Anwendung in PCM-Systemen mit einer Abtastfrequenz von 8 KHz wurde eine untere Grenzfrequenz $\Omega_u = 0,08\tilde{\pi}$ (entspr. 300 Hz) eine obere Grenzfrequenz $\Omega_0 = 0,85\tilde{\pi}$ (entsprechend 3,4 KHz) gewählt.

In Bild 11 ist die Bewertungsfunktion $B(\Omega)$ der Störverteilung und das resultierende Leistungsdichtespektrum $S_{ff}(\Omega)/\sigma_q^2$ für Rückführungsfilter mit 10, 20 und 30 Koeffizienten dargestellt.

(Bild 11 s. nächste Seite)

Es zeigt sich, daß gegenüber dem 1. Beispiel ($\Omega_u = 0$, $\Omega_o = 0,85\pi$) ein zusätzlicher Gewinn von 1 ... 2 dB erzielt werden kann (bei 20 bzw. 30 Koeffizienten), jedoch ist auch die periodische Schwankung der Leistungsverteilung im interessierenden Bereich angewachsen.

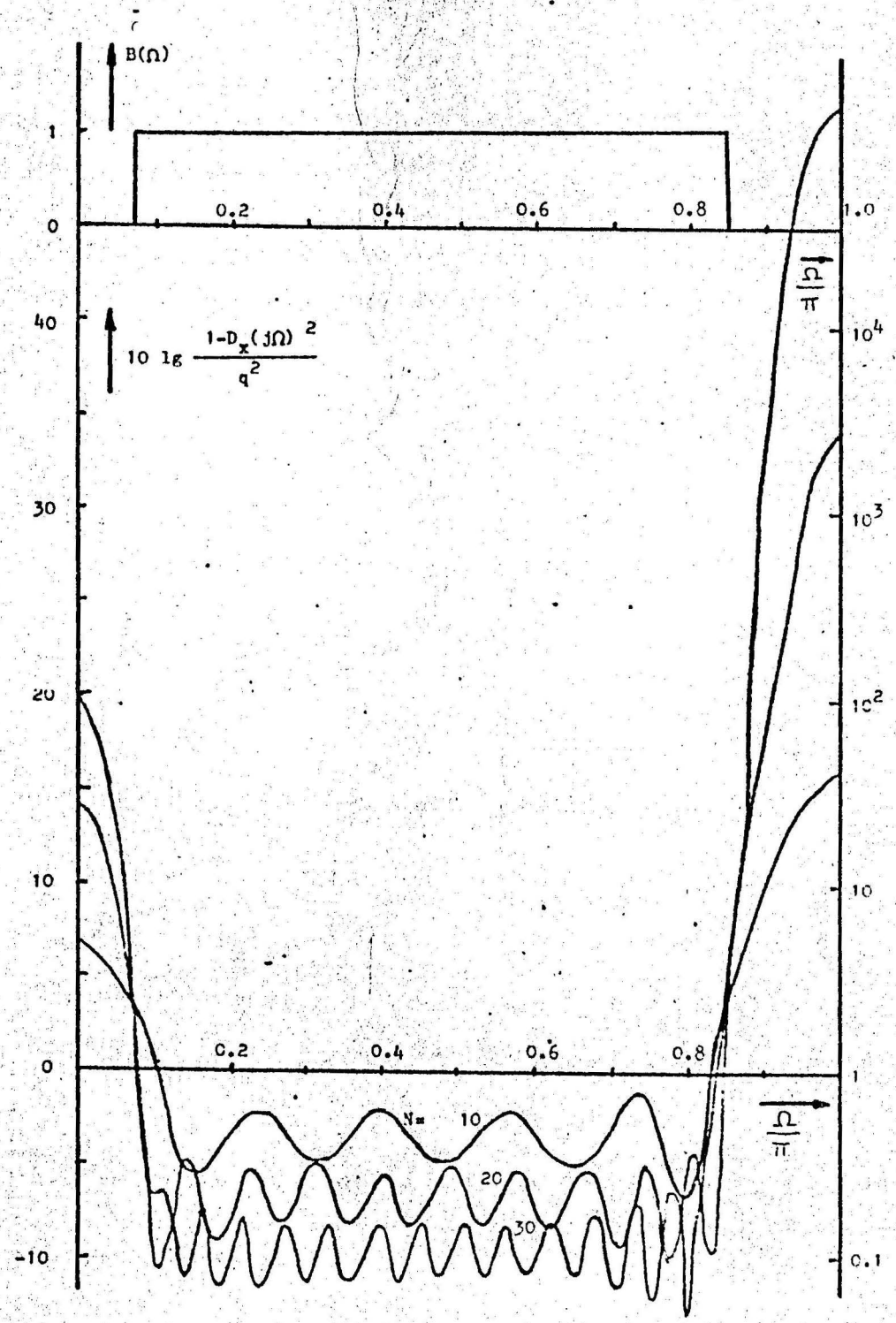


Bild 11: LDS wie in Bild 9, Fehlerbewertung nach Beispiel 2

Bild 12 zeigt (für die Beispiele 1 und 2) die mit den optimalen Filterkoeffizienten auftretende Verstärkung $V = \sigma_f^2 / \sigma_q^2$ der gesamten Rauschleistung durch die Quantisierung mit Fehler-rückkopplung.

Im folgenden wird die Berechnungsvorschrift für diese Größe abgeleitet. Nach Gl. (4.1) gilt mit Gl. (4.5):

$$\begin{aligned}
 \sigma_f^2 &= E [f^2(n)] = E [q(n) - \hat{q}(n)]^2 \\
 &= E \left[\left(q(n) - \sum_{k=1}^N d_k \cdot q(n-k) \right)^2 \right] \\
 &= E [q^2(n)] - 2 \sum_{k=1}^N d_k E [q(n) \cdot q(n-k)] + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N d_k \cdot d_l \cdot E [q(n-k) \cdot q(n-l)] \\
 &= R_{qq}(0) - 2 \sum_{k=1}^N d_k \cdot R_{qq}(k) + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N d_k \cdot d_l \cdot R_{qq}(k-l) \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

Mit $R_{qq}(k) = \sigma_q^2 \cdot \delta(k)$ nach Gl. (3.4) gilt

$$\sigma_f^2 = \sigma_q^2 \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^N d_k^2 \right) \quad (5.4)$$

bzw.

$$V = \frac{\sigma_f^2}{\sigma_q^2} = 1 + \sum_{k=1}^N d_k^2 \quad (5.5)$$

Mit den nach Gl. (4.9) ermittelten optimalen Filterkoeffizienten d_{k^*} , $k = 1, 2, \dots, N$ zeigt Bild 12 die Verstärkung der Rauschleistung als Funktion der Filterlänge N

- 1) für die Tiefpaßbewertung nach Beispiel 1,
- 2) für die Bandpaßbewertung nach Beispiel 2.

Auf diese Darstellung wird noch im Abschnitt 6 eingegangen.

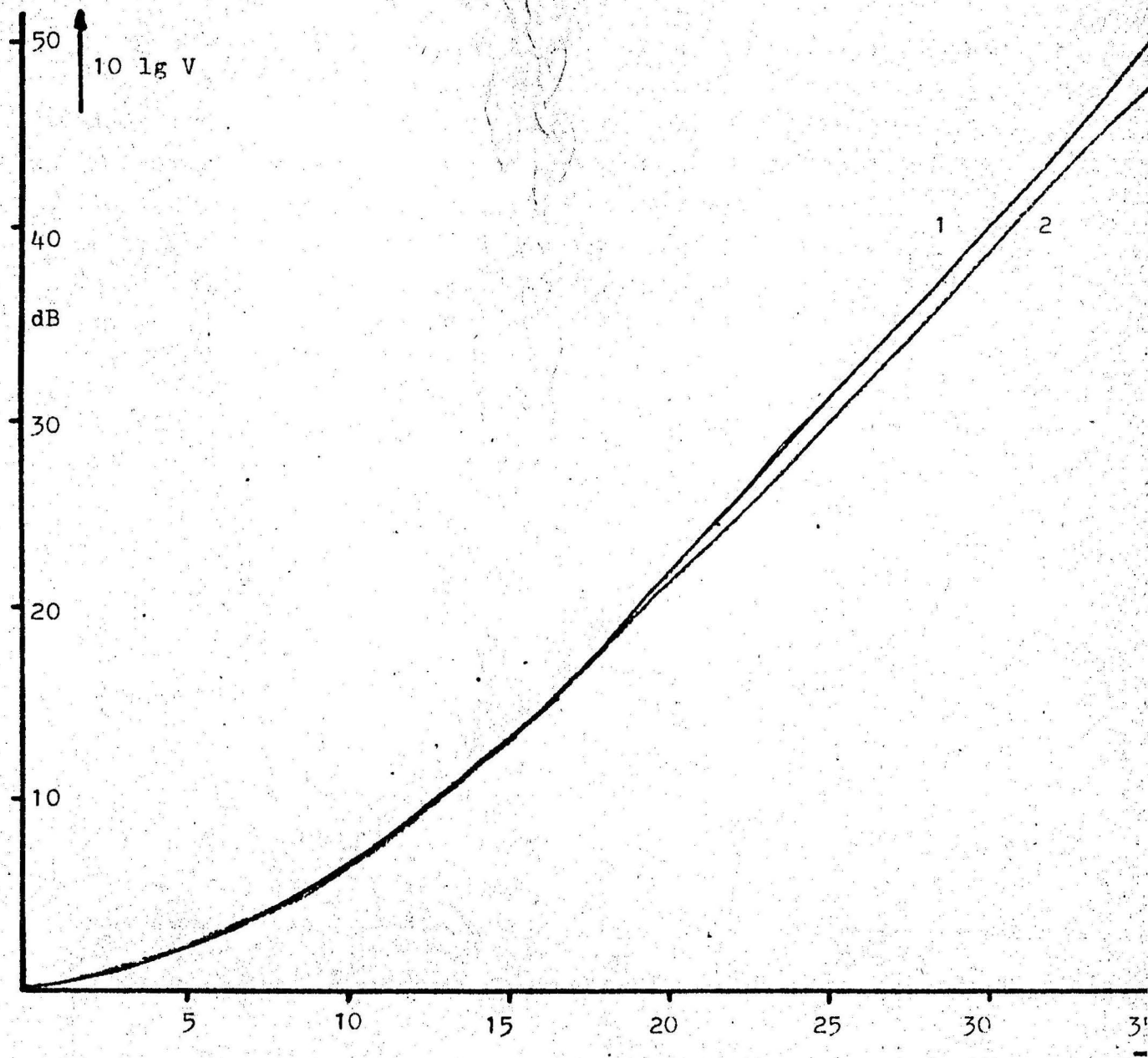


Bild 12: Verstärkung der Rauschleistung :

- 1) für Tiefpaßbewertung ,
 - 2) für Bandpaßbewertung
- des Quantisierungsrauschens
(1: Beispiel 1, 2: Beispiel 2)

3. Beispiel: Approximation eines vorgegebenen Rauschspektrums

Atal und Schröder /2/ haben mit der Forderung nach einem über der Frequenz konstanten Signal-/ Rauschverhältnis bei einer PCM-Übertragung von Sprachsignalen ein Rauschspektrum mit folgendem Verlauf vorgeschrieben: konstant bis etwa 500 Hz, dann mit zunehmender Frequenz ein Abfall mit 12 dB je Oktave. Die Minimierung der reziprok hierzu bewerteten Rauschleistung ergibt ein Spektrum, das in Bild 13 dargestellt ist; Parameter ist die Filterlänge N.

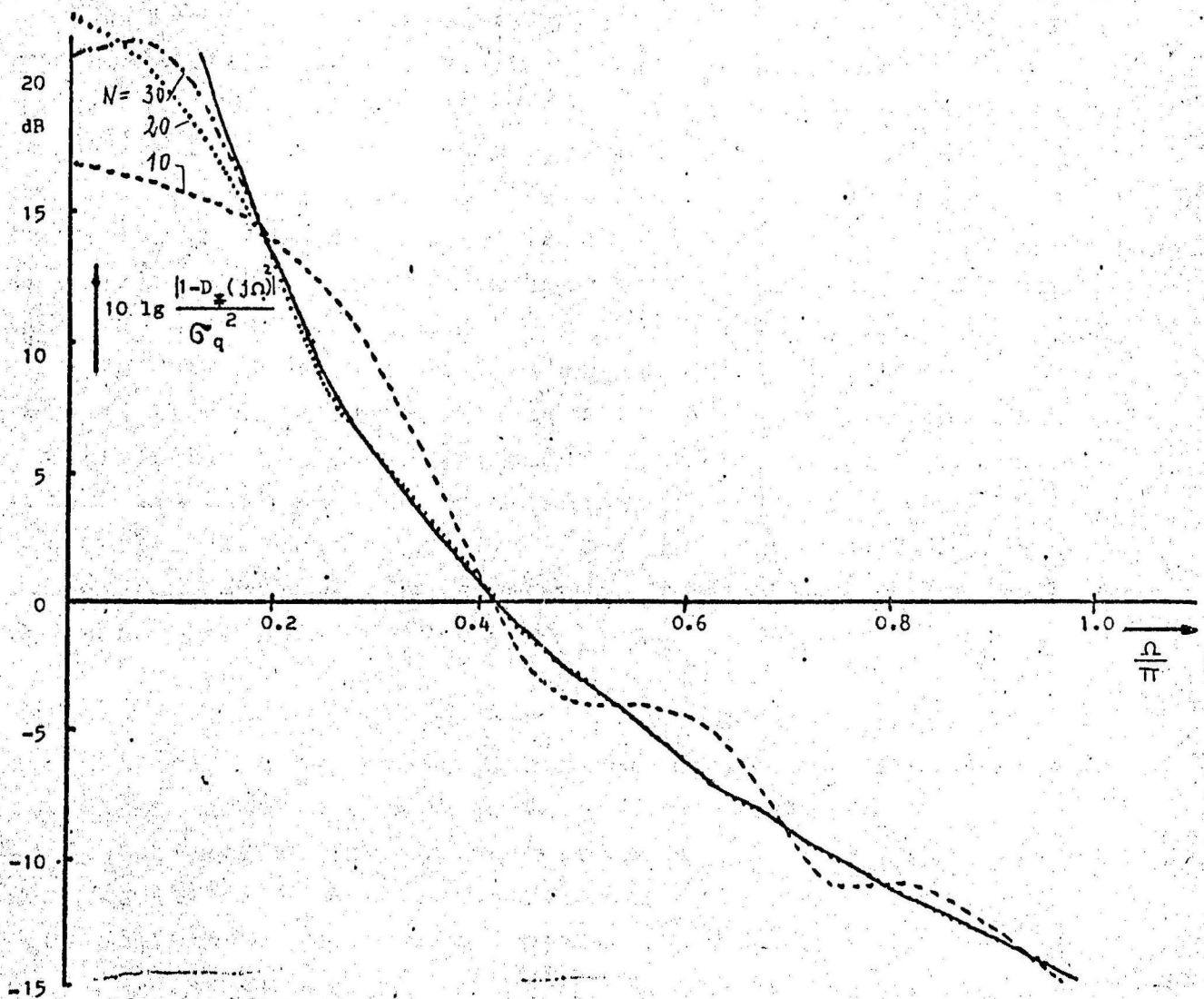


Bild 13: Normiertes Leistungsdichtespektrum des rückgekoppelten Quantisierungsfehlers nach Beispiel 3

6. Simulation des Prinzips der Fehlerrückkopplung auf einem Digitalrechner

Um die Wirksamkeit der Fehlerrückkopplung für die Codierung von Sprachsignalen untersuchen zu können, wurde ein solches System auf dem Digitalrechner simuliert. Einzelheiten über die Simulation der Systemkomponenten eines solchen Systems sind in einem früheren Technischen Bericht beschrieben /5/. In Bild 14 ist das Signal-Rauschverhältnis eines PCM-Systems mit verschiedenen linearen Quantisierern ohne Fehlerrückkopplung dargestellt. Bei den monoton ansteigenden Kurven ist lediglich das granulare Quantisierungsrauschen eingerechnet, Fehler durch Begrenzung der Eingangswerte bei Überschreiten der Quantisierungsgrenze sind nicht berücksichtigt (vgl. /5/). In der Abszisse sind die Aussteuerungswerte der Quantisierer aufgetragen, als Parameter M dient die Anzahl der Binärschritte, die pro Abtastwert zur Verfügung gestellt werden sollen (die Anzahl der Quantisierungsstufen ist demnach $L = 2^M$). Für jeden Wert M sind im Bild 14 mehrere Kurven in einem schraffierten Bereich dargestellt. Die obere Kurve gilt jeweils für einen sog. MIDTREAD-Quantisierer, bei dem die mittlere Quantisierungsstufe symmetrisch zum Ursprung der Quantisierungskennlinie liegt. Die untere Kurve gilt jeweils für einen sog. MIDRISER-Quantisierer, bei dem für Amplitudenwerte in der Nähe des Nullpunktes je nach Vorzeichen verschiedene Quantisierungswerte gehören.

Der ungünstige Störabstand des MIDRISER-Quantisierers ist bedingt durch die Amplitudendichte-Verteilung des Eingangssignals (abgetastete Sprache), wonach die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten sehr kleiner Abtastwerte groß ist.

Gestrichelt sind in den schraffierten Bereichen von Bild 14 die theoretisch erwarteten Signal-Rauschabstände für lineare Quantisierer eingezeichnet, wobei für die Rauschleistung folgender Wert ausgesetzt ist:

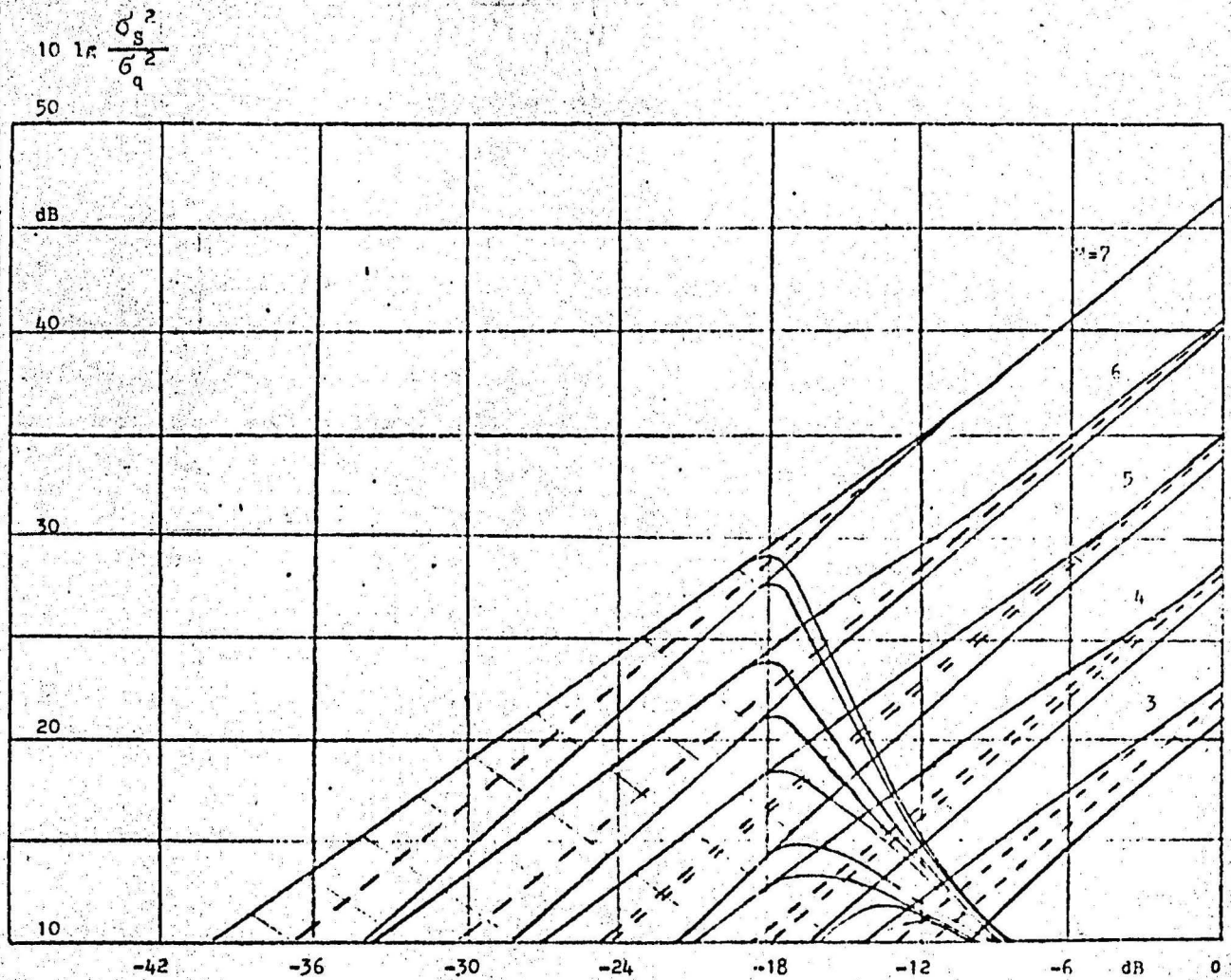


Bild 14: Aussteuerkennlinie linearer Quantisierer
(ohne Fehlerrückkopplung)

$$\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12} \quad (5.6)$$

Δ ist die Stufenhöhe des Quantisierers, die Stufenzahl L ist hierfür als unbegrenzt angenommen.

Für die Messung der bewerteten Rauschleistung nach Gl. (3.6) wurde eine Tiefpaßfilterung des Quantisierungsrauschens vorgenommen (Grenzfrequenz $\Omega_0 = 0,85\pi$). Hierdurch ließ sich eine Verbesserung des Störabstandes um ca. 0,8 dB erzielen (theoretischer Wert 0,7 dB nach Gl. (3.7) bzw. (3.8)). Bei der Simulation des rückgekoppelten Quantisierers wurde das (granulare) Quantisierungsrauschen über ein nichtrekursives Filter der Länge $N=20$ auf den Eingang des Quantisierers zurückgeführt. Bild 15 zeigt die Aussteuerkennlinie (Signal-Rauschverhältnis als Funktion der Quantisieraussteuerung) für einen linearen Quantisierer vom MIDRISER-Typ mit Rückkopplung.

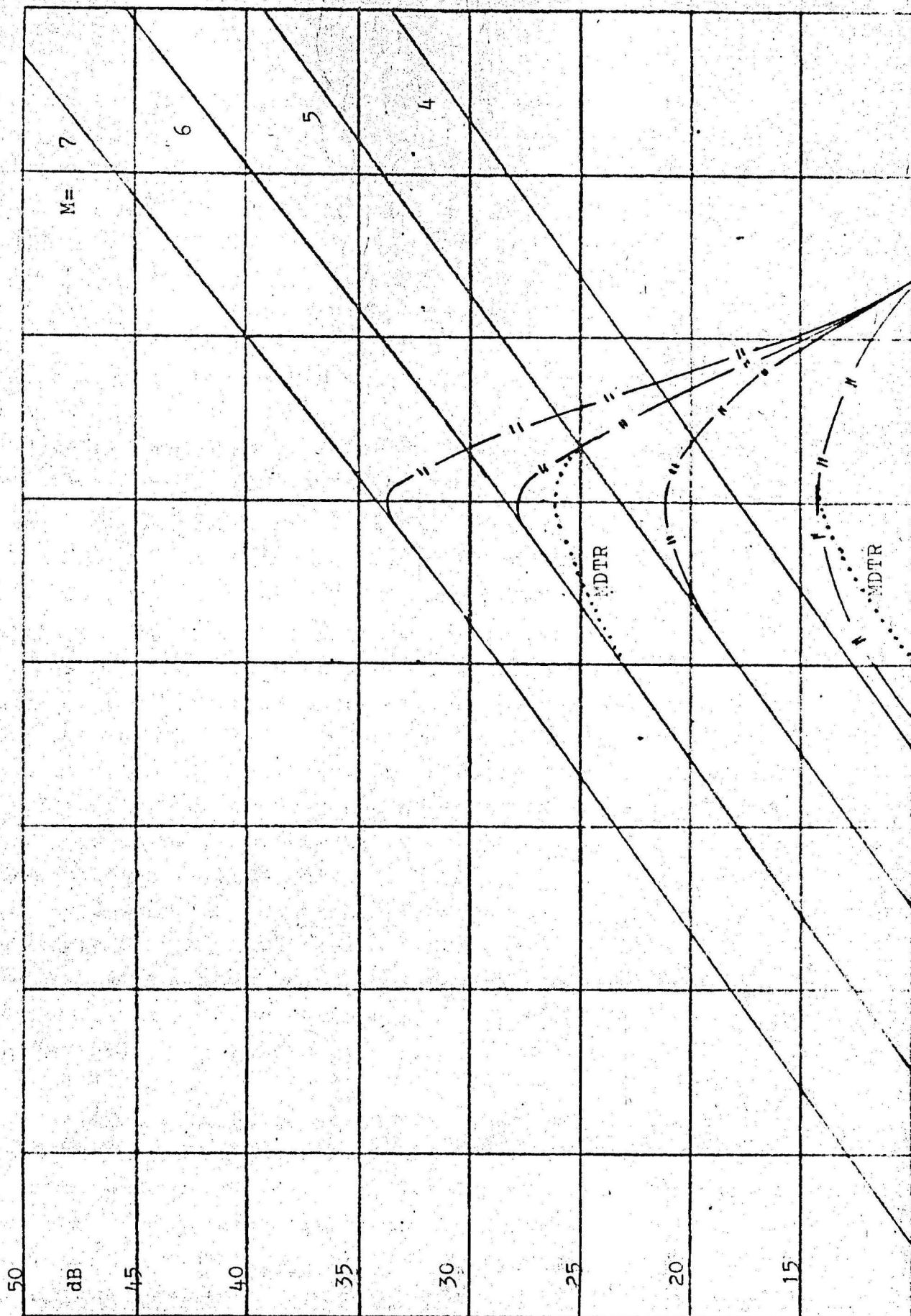


Bild 15: Aussteuerkennlinie von linearen Quantisierern mit Fehler rückkopplung über Filter der Länge $N = 20$

Abweichungen für den MIDTREAD-Typ sind im Bild 15 mit MDTR bezeichnet. Gegenüber einem PCM-System mit gleicher Auslegung des Quantisierers und gleicher Fehlerbewertung konnte ein SNR-Gewinn von 3.2 bis 4.3 dB gemessen werden, je nach Belastung und Stufenzahl des Quantisierers; der theoretische Wert liegt bei 4.35 dB (vgl. Bild 8).

Bei Einsetzen von Übersteuerungen (Begrenzung) zeigte sich kaum eine Verschlechterung des Signal-Rauschabstandes, da nur das granulare Rauschen des Quantisierers zurückgeführt wurde.

Die quantisierten und gefilterten Abtastwerte wurden dann einer Digital- und Analogwandlung unterworfen. Bei der akustischen Wiedergabe eines gesprochenen Satzes zeigte sich jedoch die Unbrauchbarkeit des bisher beschriebenen Verfahrens der Fehlerrückkopplung für die Codierung von Sprache.

Obwohl sich das gleichzeitig gemessene Leistungsdichtespektrum des gefilterten Quantisierungsrauschens nur wenig von dem eines bandbegrenzten weißen Rauschens unterschied, waren trotz der relativ "feinen Quantisierung" (5 Bit pro Abtastwert) unangenehme Störgeräusche, besonders in den Sprachpausen, zu vernehmen. Die oben genannten Ergebnisse gelten für tiefpaßgefilterte Rekonstruktionswerte mit einer Bewertung des Quantisierungsrauschens nach Beispiel 1 im Abschnitt 5. Ebenso ungünstige Eigenschaften zeigte ein Rückführungsfiler, mit dem eine Rauschfärbung nach Atal und Schröder (Abschnitt 5, 3. Beispiel) vorgenommen werden sollte. Hierbei überwogen die Störanteile bei sehr tiefen Frequenzen, die sich durch "Rumpelgeräusche" besonders unangenehm bemerkbar machten.

Das in diesem Bericht beschriebene Verfahren einer Färbung des Quantisierungsrauschens nach Spang und Schultheiß /3/ wurde auf vielfältige Weise modifiziert, wobei neben linearen Quantisierern auch Quantisierer mit logarithmischen Kennlinien eingesetzt wurden. Die rechnerischen Simulationsergebnisse stimmten zwar gut mit dem theoretisch zu erwartenden überein, jedoch zeigte die

akustische Wiedergabe der rekonstruierten Signale, daß das Verfahren in dieser Form nicht zur Codierung von Sprache geeignet ist. Möglicherweise ergeben sich bessere Ergebnisse, wenn das Verfahren in Verbindung mit adaptiv gesteuerten Quantisierern verwendet wird, da dann die auftretenden Probleme des Ruhegeräusches und der Übersteuerung besser beherrschbar sind; Simulationen mit adaptiven Quantisierern wurden nicht durchgeführt.

7. Literaturverzeichnis

- /1/ W.R. Bennet,
"Spectra of Quantized Signals",
BSTJ 1949, S. 446 - 472

- /2/ B.S. Atal und M.R. Schroeder,
"Adaptive Predictive Coding of Speech Signals",
BSTJ 1970, S. 1973 - 1986

- /3/ H.A. Spang und P.M. Schultheiss,
"Reduction of Quantizing Noise by Use of Feedback",
IRE Trans. Comm. Systems, 1962, S. 373 - 380

- /4/ P. Noll
Digitale Wiener-Kolmogoroff-Filterung
NTG-Fachbericht Bd. 46, 1974

- /5/ R. Block und P. Noll
Simulation von Differenz-PCM-Systemen zur Sprachcodierung
Techn. Bericht Nr. 150 des HHI, 1972

