HEINRICH-HERTZ-INSTITUT — BERLIN-CHARLOTTENBURG

# Technischer Bericht Nr. 195

## Untersuchungen zum Problem der Kostenoptimierung von Nachrichtensystemen mit zentraler Vermittlung

von

Dr.-Ing. Dietrich Dreyer



Berlin

1976

EINSTEINUFER 37 1000 BERLIN 10

Technischer Bericht Nr. 195

# UNTERSUCHUNGEN ZUM PROBLEM DER KOSTENOPTIMIERUNG VON NACHRICHTENSYSTEMEN MIT ZENTRALER VERMITTLUNG

## Zusammenfassung

Nach Bereitstellung der mathematischen Sprache zur Beschreibung der wesentlichsten Kenngrößen eines Nachrichtensystems mit zentraler Vermittlung wird das Problem der Kostenoptimierung derartiger Nachrichtensysteme mit Hilfe dieser Sprache als Optimierungsaufgabe formuliert. Die aus der entsprechenden Literatur ablesbaren Algorithmen zur Lösung bzw. näherungsweisen Lösung dieser Optimierungsaufgabe werden angegeben. Anschließend wird ein Algorithmus zur "lokalen Optimierung" des Anschlußnetzes genauer analysiert.

Heinrich-Hertz-Institut

Der Bearbeiter

Dietrich Dreyer

(Dr.-Ing. Dietrich Dreyer)

Der Abteilungsleiter

Rolf Evers

(Dr.-Ing. R. Evers)

Der Geschäftsführer

H. Ohnsorge

(Dr.-Ing. H. Ohnsorge)

Berlin-Charlottenburg, den 30.12.1976

INHALTSVERZEICHNIS

## 1. ÜBERSICHT

Nachrichtensysteme mit zentraler Vermittlung bestehen im wesentlichen aus zwei unterschiedlich gearteten Netzwerken: aus dem Anschlußnetz, das die einzelnen Teilnehmer mit einer Vermittlungsstelle verbindet, und aus dem Verbindungsnetz zwischen den Vermittlungsstellen. Der optimale Entwurf eines derartigen Vermittlungssystems bestehe darin, ausgehend von der Lage und dem Verkehrsangebot der einzelnen Teilnehmer, das Anschlußnetz und das Verbindungsnetz so zu dimensionieren, daß der vorgegebene Verkehr mit einem bestimmten Verlust abgewickelt werden kann und ein Nachrichtensystem entsteht, das mit minimalen Kosten zu realisieren ist.

Bei der Berücksichtigung weiterer Informationen, wie beispielsweise spezieller topographischer Eigenschaften des Netzbereiches oder schon vorhandener Netzteile, würde sich die Entwicklung eines Verfahrens für diesen optimalen Entwurf des Nachrichtensystems sicherlich erheblich schwieriger gestalten. Aus diesem Grunde sollen zunächst neben den Lagen und dem Verkehrsangebot der Teilnehmer keine weiteren Eingangsdaten berücksichtigt werden.

Dies führt natürlich dazu, daß mit dem zu entwickelnden optimalen Entwurfsverfahren nur ein Teil der Kosten des Nachrichtensystems zu minimieren sein wird. So wird beispielsweise mit diesem optimalen Entwurfsverfahren nicht entschieden werden können, welche Kabel als Erdkabel und welche Kabel als Röhrenkabel verlegt werden sollen, da zu dieser Entscheidung weitere Informationen notwendig wären. Der genaue Anteil der Kosten des Nachrichtensystems, der mit Hilfe des zu entwickelnden optimalen Entwurfsverfahrens zu minimieren ist, wird noch genauer bestimmt werden müssen.

Zunächst wird aber in Abschnitt 2 die Schreibweise der Ausgangsdaten vereinbart, und es wird gezeigt, wie das Fernsprechverkehrsprofil näherungsweise aus dem Teilnehmerprofil berechnet werden kann. Außerdem wird in Abschnitt 2 festgelegt, von welchen Zusammenhängen zwischen der Anzahl, den Lagen und den Anschlußbereichen der Vermittlungsstellen, dem Verbindungsnetz und den Kosten des Nachrichtensystems bei der Optimierung ausgegangen werden soll.

Im Abschnitt 3 wird dann, mit Hilfe der im Abschnitt 2 bereitgestellten Sprache, das Problem der Kostenoptimierung von Nachrichtensystemen mit zentraler Vermittlung als Optimierungsaufgabe formuliert. Außerdem werden im Abschnitt 3 die aus der Literatur ablesbaren Algorithmen zur Lösung bzw. zur näherungsweisen Lösung dieser Optimierungsaufgabe angegeben. Hierbei wird jeweils kurz darauf eingegangen, welche Aufgaben mit welchen Algorithmen bisher schon in der Literatur gelöst wurden.

Im Abschnitt 4 wird sodann der Algorithmus zur Optimierung des Anschlußnetzes, der in sämtlichen der bisher in der Literatur angegebenen Lösungsversuche der Optimierungsaufgabe vorhanden ist, ausformuliert und auf seine Ausführbarkeit hin untersucht.

## 2. DAS MATHEMATISCHE MODELL EINES NACHRICHTENSYSTEMS MIT ZENTRALER VERMITTLUNG

### (2.1) Der Netzbereich

Der Netzbereich wird als eine vorgegebene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ angesehen. Es wird weiter o.B.d.A. angenommen, daß der Netzbereich rechteckförmig ist und sich in M mal N gleichgroße und achsenparallele Rechtecke, die sogenannten Flächengrundeinheiten, einteilen läßt. Siehe hierzu Bild 1.

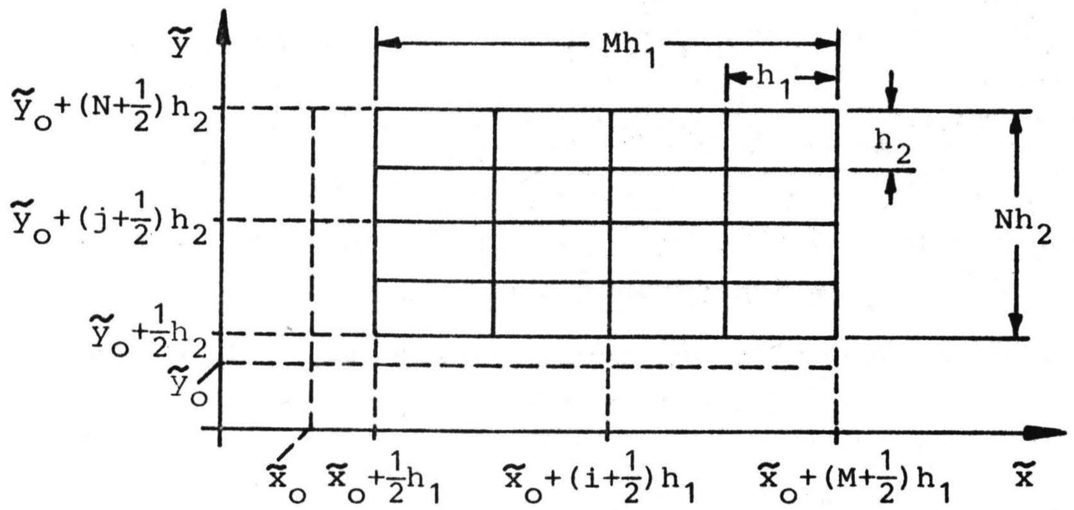


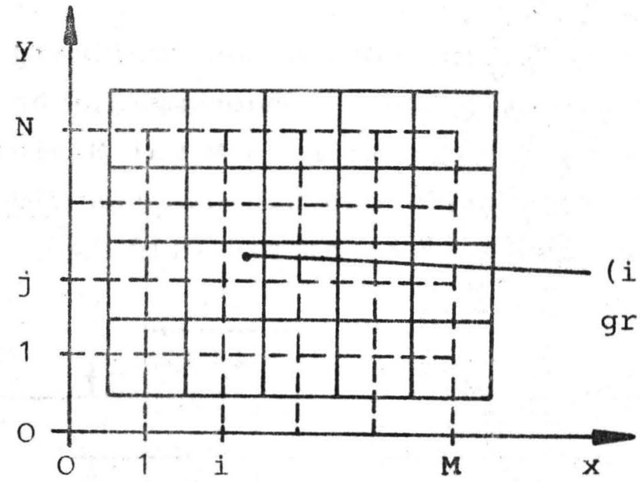

Bild 1: Der Netzbereich und seine Einteilung in Flächengrundeinheiten.

Mit der einfachen Koordinatentransformation

$$x = \frac{1}{h_1}(\tilde{x} - \tilde{x}_o)$$

$$y = \frac{1}{h_2}(\tilde{y} - \tilde{y}_o)$$

wird aus diesem Netzbereich der Bereich $\left[\frac{1}{2}, M+\frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}, N+\frac{1}{2}\right] \subset \mathbb{R}^2$. Dieser neue Bereich soll im folgenden der Norm-Netzbereich genannt werden. Analog sollen im folgenden die M mal N gleichgroßen und achsenparallelen Quadrate, in die der Norm-Netzbereich eingeteilt ist, die Norm-Flächengrundeinheiten genannt werden. Siehe Bild 2. Mit diesem Norm-Netzbereich gemäß Bild 2 soll im folgenden zumeist gerechnet werden. Hin und wieder wird es sich auch als zweckmäßig erweisen, wenn lediglich mit der Menge $\mathbb{N}^2_{M\times N}$, der Gesamtheit aller Mittelpunkte der Norm-Flächengrundeinheiten, gearbeitet wird. Die Menge $\mathbb{N}^2_{M \times N}$ soll dann das <u>Netzraster</u> genannt werden.




<u>Bild 2:</u> Der Norm-Netzbereich und seine Einteilung in Norm-Flächengrundeinheiten

Sofern nichts anderweitiges gesagt wird, soll stets $h = h_1 = h_2$ angenommen werden.

<u>(2.2) Das Teilnehmerprofil</u>

Die Verteilung der Teilnehmer im Netzbereich wird ebenfalls als vorgegeben angesehen, und zwar in der folgenden Form: Es wird angenommen, daß die Anzahl der Teilnehmer innerhalb einer jeden einzelnen Flächengrundeinheit bekannt ist. Die Anzahl der Teilnehmer in der (i,j)-Flächengrundeinheit soll mit $t_{i,j}$ bezeichnet werden ( $(i,j) \in \mathbb{N}^2_{M \times N}$ ). Die Matrix $t := (t_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2_{M \times N}} \in \mathbb{N}_0^{M \times N}$ heiße das <u>Teilnehmerprofil</u>.

Da hier vor allem die Anzahl, die Lagen und die Anschlußbereiche der Vermittlungsstellen bestimmt werden sollen, ist es zunächst sicherlich gerechtfertigt anzunehmen, daß die Teilnehmer der (i,j)-Flächengrundeinheit im Mittelpunkt dieser Flächengrundeinheit konzentriert sind.

Die Zahl $t_{i,j}$ soll in diesem Zusammenhang auch die Stärke der (i,j)-Teilnehmergruppe genannt werden ( $(i,j) \in \mathbb{N}^2_{M \times N}$ ).

### (2.3) Die Lagen der Vermittlungsstellen

Sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Vermittlungsstellen. Die Lagen dieser n Vermittlungsstellen seien mit $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bezeichnet. Es gelte $v_i \in \mathbb{R}^2$ für $i \in \mathbb{N}_n$ und $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$. Es sei aber zunächst nicht $v_i \in \mathbb{N}^2_{M \times N}$ und auch nicht $v_i \in \left[\frac{1}{2}, M+\frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}, N+\frac{1}{2}\right]$ für $i \in \mathbb{N}_n$ angenommen.

Der Vektor $v := (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in (\mathbb{R}^2)^n$ heiße der <u>Lagevektor</u> der n Vermittlungsstellen. Die Gesamtheit aller möglichen Lagevektoren der n Vermittlungsstellen werde mit $\mathcal{L}_n$ bezeichnet.

$$\mathcal{L}_n := \left\{ (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in (\mathbb{R}^2)^n \;\middle|\; \forall i, j \in \mathbb{N}_n : i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j \right\}$$

### (2.4) Die Anschlußbereiche der Vermittlungsstellen

Sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Vermittlungsstellen und $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathcal{L}_n$ ihr Lagevektor.

Die Gesamtheit aller möglichen Zerlegungen der Menge $\mathbb{N}^2_{M \times N}$ in höchstens n Teilmengen werde mit $\mathcal{Z}_n$ bezeichnet.

$$\mathcal{Z}_n := \left\{ (M_1, M_2, \ldots, M_n) \in (\mathfrak{P}(\mathbb{N}^2_{M \times N}))^n \;\middle|\; \bigcup_{i=1}^{n} M_i = \mathbb{N}^2_{M \times N} \text{ und } \forall i, j \in \mathbb{N}_n : i \neq j \Rightarrow M_i \cap M_j = \emptyset \right\}$$

Die Anschlußbereicheder n Vermittlungsstellen seien mit $B_1, B_2, \ldots, B_n$ bezeichnet. Es gelte $B_i \subset \mathbb{N}^2_{M \times N}$ mit $B_i \neq \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}_n$, $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \mathbb{N}^2_{M \times N}$. Die Anschlußbereiche $B_1, B_2, \ldots, B_n$ bilden also eine Zerlegung des Netzrasters $\mathbb{N}^2_{M \times N}$ in n nichtleere Mengen. Es sei vereinbart, daß $B_i$ stets der Anschlußbereich der Vermittlungsstelle im Punkte $v_i$ sein soll ( $i \in \mathbb{N}_n$ ).

Der Vektor $B := (B_1, B_2, \ldots, B_n) \in \mathcal{Z}_n$ mit $B_i \neq \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}_n$ heiße der <u>Anschlußbereichsvektor</u> der n Vermittlungsstellen. Die Gesamtheit aller möglichen Anschlußbereichsvektoren der n Vermittlungsstellen werde mit $\mathfrak{A}_n$ bezeichnet.

$$\mathfrak{A}_n := \left\{ (B_1, B_2, \ldots, B_n) \in \mathcal{Z}_n \;\middle|\; \forall i \in \mathbb{N}_n : B_i \neq \emptyset \right\}$$

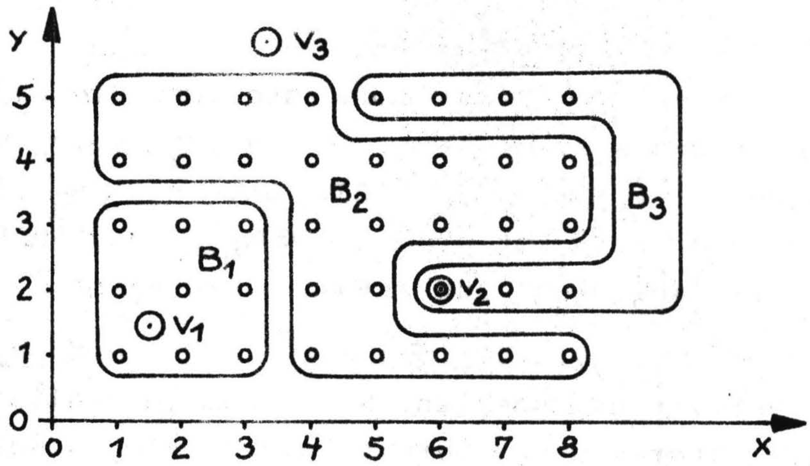



Bild 3: Ein Beispiel für ein $M{\times}N = 8{\times}5$ Netzraster mit $n = 3$ Vermittlungsstellen mit dem Lagevektor $v = (v_1, v_2, v_3)$ und dem Anschlußbereichsvektor $B = (B_1, B_2, B_3)$ .

o Elemente des Netzrasters (Lage der Teinehmergruppen)

⊙ Lage der Vermittlungsstellen

◯ Anschlußbereiche der Vermittlungsstellen.

An die Elemente der Menge $\mathfrak{A}_n$ könnten weitere Forderungen gestellt werden. So können z.B. zwei Zahlen $n_u, n_o \in \mathbb{N}$ gegeben sein und dann gesetzt werden:

$$\mathfrak{A}'_n := \mathfrak{A}'_n(n_u, n_o) := \left\{ (B_1, B_2, \ldots, B_n) \in \mathfrak{Z}_n \,\middle|\, \forall i \in \mathbb{N}_n : n_u \leq \sum_{(j,k) \in B_i} t_{j,k} \leq n_o \right\}$$

Hiermit könnte beispielsweise berücksichtigt werden, daß die Anzahl der Teilnehmer pro Vermittlungsstelle innerhalb vorgegebener Schranken liegen soll. Im weiteren Verlauf soll aber zunächst immer mit $\mathfrak{A}_n$ gemäß der ersten Definition gearbeitet werden.

Es sei noch angemerkt, daß natürlich für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > MN$ gilt: $\mathfrak{A}_n = \phi$ . Im Folgenden können wir uns daher auf den Fall $n \in \mathbb{N}_{MN}$ beschränken ( n ist immer die Anzahl der Vermittlungsstellen ).

## (2.5) Die verwendete Metrik

Zur Abstandsmessung im Anschlußnetz und in kleineren Verbindungsnetzen ( Ortsverbindungsnetzen ) soll die $l_1$-Metrik $d_1$ , die auch kartesische Metrik genannt wird, verwendet werden. Diese Metrik $d_1$ wird durch die Betragssummennorm $|\cdot|_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ des $\mathbb{R}^2$ induziert. Es gilt:

$$\begin{aligned} d_1 &: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+ \\ &((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mapsto d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \\ &= |(x_1,y_1) - (x_2,y_2)|_1 = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \,. \end{aligned}$$

Zur Abstandsmessung in großen Verbindungsnetzen soll dagegen die $l_2$-Metrik $d_2$ , die auch euklidische Metrik genannt wird, verwendet werden. Diese Metrik $d_2$ wird durch die euklidische Norm $|\cdot|_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ des $\mathbb{R}^2$ induziert. Es gilt:

$$\begin{aligned} d_2 &: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+ \\ &((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mapsto d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \\ &= |(x_1,y_1) - (x_2,y_2)|_2 = ((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2)^{1/2} \,. \end{aligned}$$

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit soll an denjenigen Stellen, an denen nicht im voraus entschieden werden kann welche der Metriken $d_1$ oder $d_2$ zur Anwendung kommt, das Symbol $d$ verwendet werden.

## (2.6) Die Preisfunktion für die Anschlußleitungen

Die Preisfunktion $p_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ist eine isotone, nicht notwendig stetige Funktion, mit deren Hilfe die Kosten der einzelnen Anschlußleitungen in Abhängigkeit von ihrer Länge festgelegt werden können. Wird beispielsweise ab einer gewissen Länge $l_o$ von der 0,4mm Cu-Leitung zu einer 0,6mm Cu-Leitung übergegangen, und soll die gesammte Länge einer Anschlußleitung die Länge $l_{gr}$ möglichst nicht übersteigen, so kann man $p_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ wie in Bild 4 angegeben wählen.

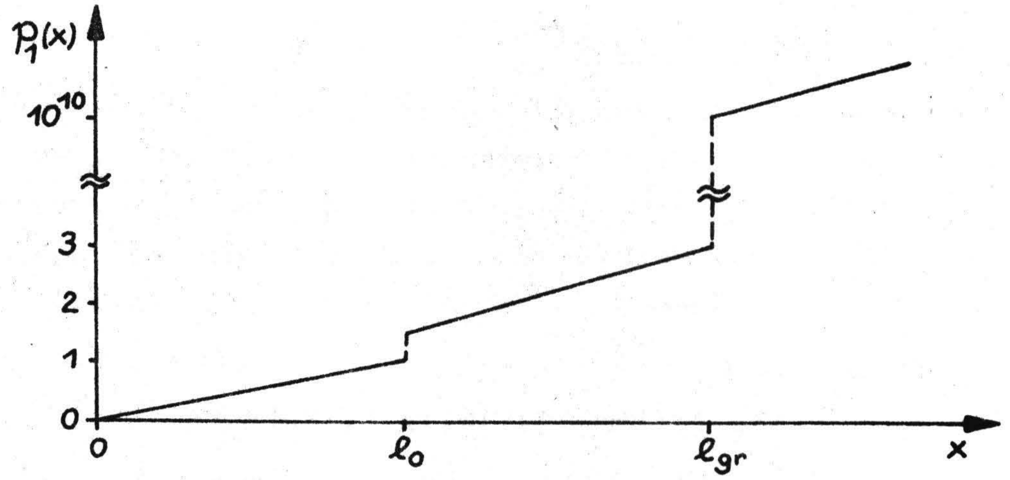



Bild 4: Ein Beispiel für den Graphen einer Preisfunktion.

Um die Überlegungen jedoch nicht allzusehr zu komplizieren, wird zumeist $p_1 = id_{\mathbb{R}_+}$ gesetzt werden.

## (2.7) Die Kosten des Anschlußnetzes

Sei $n \in \mathbb{N}$, $z=(z_1,z_2,\dots,z_n) \in (\mathbb{R}^2)^n$ und $Z=(Z_1,Z_2,\dots,Z_n) \in \mathfrak{Z}_n$. Dann werde gesetzt:

$$L_n(z,Z) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{(i,j)\in Z_k} t_{i,j} \cdot p_1(d_1(z_k,(i,j)))$$

und damit dann definiert:

$$L_n : (\mathbb{R}^2)^n \times \mathfrak{Z}_n \to \mathbb{R}_+$$
$$(z,Z) \mapsto L_n(z,Z).$$

Diese Abbildung heiße die Kostenfunktion des Anschlußnetzes für n Vermittlungsstellen. Denn ist $n \in \mathbb{N}_{MN}$ die Anzahl der Vermittlungsstellen, $v \in \mathfrak{C}_n \subset (\mathbb{R}^2)^n$ ihr Lagevektor und $B \in \mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{Z}_n$ ihr Anschlußbereichsvektor, dann ist $L_n(v,B)$ ein Maß für den Anteil der Kosten des Anschlußnetzes, der durch die Anzahl, die Lagen und die Anschlußbereiche der Vermittlungsstellen zu beeinflussen ist.

(2.8) Das Verkehrsprofil

Es wird angenommen, daß das Verkehrsangebot von jeder zu jeder Teilnehmergruppe gegeben ist. Das Verkehrsangebot der Teilnehmer der x-ten Teilnehmergruppe an die Teilnehmer der y-ten Teilnehmergruppe soll mit $V_{x,y}$ bezeichnet werden $(x,y \in \mathbb{N}^2_{M\times N})$. Die Matrix $V = (V_{x,y})_{x,y \in \mathbb{N}^2_{M\times N}} \in (\mathbb{R}_+^{M\times N})^{M\times N}$ heiße das Verkehrsprofil.

(2.9) Die Berechnung des Verkehrsprofils aus dem Teilnehmerprofil

(1) Die Annahme, daß auch für große Netzbereiche mit vielen Teilnehmergruppen das Verkehrsprofil $V \in (\mathbb{R}_+^{M\times N})^{M\times N}$ gegeben ist, ist sicherlich nicht sehr realistisch. Und selbst dann, wenn dieses Verkehrsprofil für große Netzbereiche gegeben sein sollte, ist die Speicherung und Weiterverarbeitung der Matrix V nicht ganz einfach. Denn beispielsweise für M=N=100 besteht die Matrix V schon aus $10^8$ reellen Zahlen. Aus diesem Grunde wird in [4,5,6] ein Verfahren vorgeschlagen, wie im Falle des Fernsprechens das Verkehrsprofil näherungsweise mit Hilfe einer Entfernungsfunktion aus dem Teilnehmerprofil berechnet werden kann. Dieses Verfahren soll im folgenden, zusammen mit einigen Erläuterungen, nochmals angegeben werden.

(2) Sei $\mathcal{T}$ die Gesamtheit aller Teilnehmer des Netzbereiches und $\mathcal{T}_x$ die Gesamtheit der Teilnehmer der x-ten Teilnehmergruppe. Es gilt dann:

$$\mathcal{T} = \bigcup_{x \in \mathbb{N}^2_{M\times N}} \mathcal{T}_x \quad \text{und} \quad \mathcal{T}_x \cap \mathcal{T}_y = \phi \text{ für alle } x,y \in \mathbb{N}^2_{M\times N} \text{ mit } x \neq y.$$

Sei weiter $q \in \mathbb{N}$. Dann werde die Gesamtheit aller Teilnehmer $\mathcal{T}$ derart in q Klassen $\mathcal{T}^1, \mathcal{T}^2, \ldots \mathcal{T}^q$ eingeteilt, daß sich in jeder Klasse $\mathcal{T}^k$ $(k \in \mathbb{N}_q)$ nur Teilnehmer mit nahezu gleichem Verkehrsverhalten befinden.

Es gilt dann wieder: $\mathcal{T} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_q} \mathcal{T}^k$ und $\mathcal{T}^k \cap \mathcal{T}^l = \emptyset$ für alle $k,l \in \mathbb{N}_q$ mit $k \neq l$.

Nun seien im folgenden für alle $x,y \in \mathbb{N}^2_{M \times N}$, für alle $k,l \in \mathbb{N}_q$ und für alle $H \subset \mathbb{N}^2_{M \times N}$ noch einige Abkürzungen eingeführt.

(3) $\mathcal{T}^k_x$ sei die Gesamtheit der Teilnehmer der k-ten Klasse der x-ten Teilnehmergruppe. Es gilt: $\mathcal{T}^k_x = \mathcal{T}^k \cap \mathcal{T}_x$.

(4) $t^k_x = |\mathcal{T}^k_x|$ sei die Anzahl der Teilnehmer der k-ten Klasse in der x-ten Teilnehmergruppe, d.h., die Anzahl der Teilnehmer in $\mathcal{T}^k_x$.

(5) $t_x = |\mathcal{T}_x|$ sei die Anzahl der Teilnehmer in der x-ten Teilnehmergruppe, d.h., die Anzahl der Teilnehmer in $\mathcal{T}_x$.
Es gilt: $t_x = |\mathcal{T}_x| = |\bigcup_{i \in \mathbb{N}_q} \mathcal{T}^i_x| = \sum_{i \in \mathbb{N}_q} |\mathcal{T}^i_x| = \sum_{i \in \mathbb{N}_q} t^i_x$.
Diese Definition ist mit derjenigen im Teil (2.2) verträglich.

(6) $t^k(H)$ sei die Anzahl der Teilnehmer der k-ten Klasse in allen Teilnehmergruppen der Menge H, d.h., die Anzahl der Teilnehmer in $\bigcup_{z \in H} \mathcal{T}^k_z$. Es gilt:
$t^k(H) = |\bigcup_{z \in H} \mathcal{T}^k_z| = \sum_{z \in H} |\mathcal{T}^k_z| = \sum_{z \in H} t^k_z$.

(7) $t(H)$ sei die Anzahl der Teilnehmer in allen Teilnehmergruppen der Menge H, d.h., die Anzahl der Teilnehmer in $\bigcup_{z \in H} \mathcal{T}_z$. Es gilt: $t(H) = |\bigcup_{z \in H} \mathcal{T}_z| = \sum_{z \in H} |\mathcal{T}_z| = \sum_{z \in H} t_z = \sum_{\substack{z \in H \\ i \in \mathbb{N}_q}} t^k_z = \sum_{k \in \mathbb{N}_q} t^k(H)$.

(8) $A^{k,l}_{x,y}$ sei das mittlere Verkehrsangebot eines Teilnehmers der k-ten Klasse der x-ten Teilnehmergruppe an einen Teilnehmer der l-ten Klasse der y-ten Teilnehmergruppe, d.h., das mittlere Verkehrsangebot eines Teilnehmers aus $\mathcal{T}^k_x$ an einen Teilnehmer aus $\mathcal{T}^l_y$.

(9) $A^{k,l}_x$ (H) sei das mittlere Verkehrsangebot eines Teilnehmers aus der k-ten Klasse der x-ten Teilnehmergruppe an sämtliche Teilnehmer der l-ten Klasse in allen Teilnehmergruppen der Menge H, d.h., das mittlere Verkehrsangebot eines Teilnehmers aus $\mathcal{T}^k_x$ an die Teilnehmer in $\bigcup_{z\in H} \mathcal{T}^l_z$. Es gilt: $A^{k,l}_x (H) = \sum_{z\in H} t^l_z \cdot A^{k,l}_{x,z}$ .

(10) $A^k_x$ (H) sei das mittlere Verkehrsangebot eines Teilnehmers der k-ten Klasse der x-ten Teilnehmergruppe an sämtliche Teilnehmer in allen Teilnehmergruppen der Menge H, d.h., das mittlere Verkehrsangebot eines Teilnehmers aus $\mathcal{T}^k_x$ an die Teilnehmer in $\bigcup_{z\in H} \mathcal{T}_z = \bigcup_{\substack{z\in H\\ i\in \mathbb{N}_q}} \mathcal{T}^i_z$ .

Es gilt: $A^k_x (H) = \sum_{i\in \mathbb{N}_q} A^{k,i}_x (H) = \sum_{\substack{z\in H\\ i\in \mathbb{N}_q}} t^i_z \cdot A^{k,i}_{x,z}$ .

(11) $A^k_x$ sei das mittlere Verkehrsangebot eines Teilnehmers der k-ten Klasse der x-ten Teilnehmergruppe, d.h., das mittlere Verkehrsangebot eines Teilnehmers aus $\mathcal{T}^k_x$ .

Es gilt: $A^k_x = A^k_x\,(\mathbb{N}^2_{M\times N}) = \sum_{\substack{z\in \mathbb{N}^2_{M\times N}\\ i\in \mathbb{N}_q}} t^i_z \cdot A^{k,i}_{x,z}$ .

(12) $A^k$ sei das mittlere Verkehrsangebot eines Teilnehmers der k-ten Klasse, d.h., das mittlere Verkehrsangebot eines Teilnehmers aus $\mathcal{T}^k$. Es gilt:

$$A^k = \frac{1}{MN} \sum_{z\in \mathbb{N}^2_{M\times N}} A^k_z = \frac{1}{MN} \sum_{\substack{z,z'\in \mathbb{N}^2_{M\times N}\\ i\in \mathbb{N}_q}} t^i_{z'} \cdot A^{k,i}_{z,z'} .$$

(13) $A$ sei das mittlere Verkehrsangebot eines Teilnehmers.
Es gilt: $A = \frac{1}{q} \sum_{i \in \mathbb{N}_q} A^i = \frac{1}{q \cdot MN} \sum_{\substack{z \in \mathbb{N}^2_{M\times N} \\ i \in \mathbb{N}_q}} A^i_z =$

$\frac{1}{q \cdot MN} \sum_{\substack{z,z' \in \mathbb{N}^2_{M\times N} \\ i,j \in \mathbb{N}_q}} t^j_{z'} \cdot A^{i,j}_{z,z'}$ .

(14) $V^{k,l}_{x,y}$ sei das Verkehrsangebot der Teilnehmer der k-ten Klasse der x-ten Teilnehmergruppe an die Teilnehmer der l-ten Klasse der y-ten Teilnehmergruppe, d.h., das Verkehrsangebot der Teilnehmer aus $\mathcal{T}^k_x$ an die Teilnehmer in $\mathcal{T}^l_y$ .
Es gilt: $V^{k,l}_{x,y} = t^k_x \cdot t^l_y \cdot A^{k,l}_{x,y}$ .

(15) $V_{x,y}$ sei das Verkehrsangebot der Teilnehmer der x-ten Teilnehmergruppe an die Teilnehmer der y-ten Teilnehmergruppe, d.h., das Verkehrsangebot der Teilnehmer aus $\mathcal{T}_x$ an die Teilnehmer in $\mathcal{T}_y$. Es gilt:
$V_{x,y} = \sum_{i,j \in \mathbb{N}_q} V^{i,j}_{x,y} = \sum_{i,j \in \mathbb{N}_q} t^i_x \cdot t^j_y \cdot A^{i,j}_{x,y}$ .
Diese Definition ist mit derjenigen in Teil (2.8) verträglich.

(16) Für $r \in \mathbb{N}_0$ sei $S(x;r)$ die Sphäre mit dem Radius $r$ um den Punkt $x \in \mathbb{N}^2_{M\times N}$ . Es gilt:
$S(x;r) = \left\{ z \in \mathbb{N}^2_{M\times N} \mid d_1(z,x) = r \right\}$ .

(17)
$$f^k_x : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$r \longmapsto f^k_x(r) = \begin{cases} \dfrac{A^k_x(S(x;r))}{A^k_x \cdot t\ (S(x;r))} & \text{für } A^k_x \cdot t(S(x;r)) \neq 0 \\ +\infty & \text{für } A^k_x \cdot t(S(x;r)) = 0 \end{cases}$$

sei die Entfernungsfunktion zur k-ten Klasse und x-ten Teilnehmergruppe.

(18) $\beta^{k,l}_{x,y}$ sei das Verhältnis zwischen dem mittleren Verkehrsangebot eines Teilnehmers aus der k-ten Klasse der x-ten Teilnehmergruppe an sämtliche Teilnehmer der l-ten Klasse in allen Teilnehmergruppen der Sphäre $S(x;d_1(x,y))$ und dem mittleren Verkehrsangebot eines Teilnehmers aus der k-ten Klasse der x-ten Teilnehmergruppe an sämtliche Teilnehmer in allen Teilnehmergruppen der Sphäre $S(x;d_1(x,y))$. Es gilt:

$$\beta^{k,l}_{x,y} = \frac{A^{k,l}_x(S(x;d_1(x,y)))}{A^k_x\ (S(x;d_1(x,y)))}$$

Hierbei ist $\sum_{i \in \mathbb{N}_q} \beta^{k,i}_{x,y} = 1$

und speziell für q =1 : $\beta^{1,1}_{x,y} = 1$ .

(19) $\gamma^{l}_{x,y}$ sei das Verhältnis zwischen der Anzahl der Teilnehmer der l-ten Klasse in allen Teilnehmergruppen der Sphäre $S(x;d_1(x,y))$ und der Anzahl der Teilnehmer in allen Teilnehmergruppen der Sphäre $S(x;d_1(x,y))$. Es gilt:

$$\gamma^{l}_{x,y} = \frac{t^l(S(x;d_1(x,y)))}{t\ (S(x;d_1(x,y)))}$$

Speziell für q=1 ist $\gamma^{1}_{x,y} = 1$ .

(20) Nun zu einigen Näherungsbeziehungen, wie sie in den Darstellungen [4,5,6] empfohlen werden.

(21) Die Einteilung der Teilnehmer in die q verschiedenen Klassen sei gerade so vorgenommen worden, daß für alle $x \in \mathbb{N}^2_{M \times N}$ und für alle $k \in \mathbb{N}_q$ gilt: $A^k_x \approx A^k$.

(22) In [4,5] ist gezeigt worden, daß für bestimmte Klasseneinteilungen der Teilnehmer und ein festes $x_o \in \mathbb{N}^2_{M \times N}$ Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q \in \mathbb{R}_+$ und eine Entfernungsfunktion $f': \mathbb{N}_o \longrightarrow \mathbb{R}_+$ existieren, so daß für alle $k \in \mathbb{N}_q$ und alle $r \in \mathbb{N}_o$ gilt: $f^k_{x_o}(r) \approx \alpha_k \cdot f'(r)$.

In [4,5] wird auch vorgeschlagen anzunehmen, daß für alle $k \in \mathbb{N}_q$, für alle $x \in \mathbb{N}^2_{M\times N}$ und für alle $r \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$f^k_x(r) \approx \alpha_k \cdot f'(r)$. Es soll hierbei gesetzte werden:

$$f' : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$r \longmapsto f'(r) = \frac{1}{1 + \left(\frac{h}{1{,}17\ \mathrm{km}} \cdot r\right)^{1{,}58}}$$

Diese Funktion ist bei einigem guten Willen aus Bild 9 A in [5] abzulesen.

(23) In [6] wird erwähnt, daß für eine Einteilung der Teilnehmer in zwei Klassen, in die Klasse $\mathcal{T}^1$ der "Privatanschlüsse" und in die Klasse $\mathcal{T}^2$ der "Geschäftsanschlüsse", vier Konstanten

$$\beta^{1,1} = 0{,}74, \quad \beta^{1,2} = 0{,}26$$
$$\beta^{2,1} = 0{,}49, \quad \beta^{2,2} = 0{,}51$$

existieren, so daß für alle $k,l \in \mathbb{N}_2$ und alle $x,y \in \mathbb{N}^2_{M\times N}$ gilt:

$\beta^{k,l}_{x,y} \approx \beta^{k,l}$.

Es sei daher angenommen, daß in jedem Fall für alle $k,l \in \mathbb{N}_q$ Konstanten $\beta^{k,l}$ mit $\sum_{l \in \mathbb{N}_q} \beta^{k,l} = 1$ existieren, so daß für alle $k,l \in \mathbb{N}_q$ und für alle $x,y \in \mathbb{N}^2_{M\times N}$ gilt:

$\beta^{k,l}_{x,y} \approx \beta^{k,l}$.

(24) Wird nun in die Beziehung $A^{k,l}_x(S(x;d_1(x,y))) = \sum_{z \in S(x;d_1(x,y))} t^l_z \cdot A^{k,l}_{x,z}$ gemäß (9) mit $H=S(x;d_1(x,y))$ die Näherung $A^{k,l}_{x,z} \approx A^{k,l}_{x,y}$ eingesetzt, dann folgt

$$A^{k,l}_x(S(x;d_1(x,y))) \approx \sum_{z \in S(x;d_1(x,y))} t^l_z \cdot A^{k,l}_{x,y} =$$
$$A^{k,l}_{x,y} \cdot \sum_{z \in S(x;d_1(x,y))} t^l_z = t^l(S(x;d_1(x,y))) \cdot A^{k,l}_{x,y}$$

und hieraus schließlich für $t^l(S(x;d_1(x,y))) \neq 0$

$$A^{k,l}_{x,y} \approx \frac{A^{k,l}_x(S(x;d_1(x,y)))}{t^l(S(x;d_1(x,y)))}.$$

(25) Nach diesen Vorbereitungen kann nun die Endformel für das Verkehrsprofil aufgestellt werden. Seien $x,y \in \mathbb{N}^2_{M \times N}$ beliebig. Dann gilt zunächst zufolge (14),(15):

$V_{x,y} = \sum_{k,l \in \mathbb{N}_q} t^k_x \cdot t^l_y \cdot A^{k,l}_{x,y}$ und damit zufolge der Näherung (24):

$$V_{x,y} \approx \sum_{k,l \in \mathbb{N}_q} t^k_x \cdot t^l_y \cdot \frac{A^{k,l}_x\ (S(x;d_1(x,y)))}{t^l\ (S(x;d_1(x,y)))} .$$

Für den Quotienten $A^{k,l}_x\ (S(x;d_1(x,y)))/t^l\ (S(x;d_1(x,y)))$ kann nun aber geschrieben werden:

$$\frac{A^{k,l}_x\ (S(x;d_1(x,y)))}{t^l\ (S(x;d_1(x,y)))} = A^k_x \cdot \frac{A^k_x\ (S(x;d_1(x,y)))}{A^k_x \cdot t\ (S(x;d_1(x,y)))} \cdot \frac{\dfrac{A^{k,l}_x\ (S(x;d_1(x,y)))}{A^k_x\ (S(x;d_1(x,y)))}}{\dfrac{t^l\ (S(x;d_1(x,y)))}{t\ (S(x;d_1(x,y)))}} =$$

$$A^k_x \cdot f^k_x\ (d_1(x,y)) \frac{\beta^{k,l}_{x,y}}{\gamma^l_{x,y}}$$

Damit gilt zufolge der Näherungen (21),(22) und (23)

$$\frac{A^{k,l}_x\ (S(x;d_1(x,y)))}{t^l\ (S(x;d_1(x,y)))} \approx A^k \cdot \alpha_k \cdot f'(d_1(x,y)) \frac{\beta^{k,l}}{\gamma^l_{x,y}} .$$

Dies nun in die obige Näherungsbeziehung für $V_{x,y}$ eingesetzt ergibt die Endformel:

$$V_{x,y} \approx \sum_{k,l \in \mathbb{N}_q} t^k_x \cdot t^l_y \cdot A^k \cdot \alpha_k \cdot f'(d_1(x,y)) \frac{\beta^{k,l}}{\gamma^l_{x,y}} .$$

Wird keine Einteilung der Teilnehmer in Klassen vorgenommen, d.h. gilt $q = 1$, dann wird diese Beziehung zu:

$V_{x,y} \approx t_x \cdot t_y \cdot A \cdot \alpha_1 \cdot f'(d_1(x,y))$.

Anhand der beiden letzten Formeln kann nun, sofern die Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ bzw. die Konstante $\alpha_1$ geeignet festgelegt sind, das Verkehrsprofil näherungsweise aus dem Teilnehmerprofil berechnet werden.

(26) Die Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ sind so festzulegen, daß gilt: $\sum_{x,y \in \mathbb{N}^2_{M \times N}} V_{x,y} = A \cdot \sum_{z \in \mathbb{N}^2_{M \times N}} t_z$ . Man kann jedoch auch anders vorgehen und verlangen, daß für ein "typisches" $x_o \in \mathbb{N}^2_{M \times N}$ gilt: $\sum_{y \in \mathbb{N}^2_{M \times N}} V_{x_o,y} = A \cdot t_{x_o}$. In diesem Fall folgt dann für $q = 1$ : $\alpha_1 = \frac{1}{\sum_{y \in \mathbb{N}^2_{M \times N}} t_y \cdot f'(d_1(x_o,y))}$ .

## (2.10) Der Verkehr zwischen den Vermittlungsstellen

Sei $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathcal{L}_n$ der Lagevektor und $B = (B_1, B_2, \ldots, B_n) \in \mathfrak{A}_n$ der Anschlußbereichsvektor der n Vermittlungsstellen. Das Verkehrsangebot von der Vermittlungsstelle im Punkte $v_i$ an die Vermittlungsstelle im Punkte $v_j$ werde mit $W_{i,j}(B)$ bezeichnet $(i,j \in \mathbb{N}_n)$.

Für alle $i,j \in \mathbb{N}_n$ gilt: $W_{i,j}(B) = \sum_{x \in B_i} \sum_{y \in B_j} V_{x,y}$.

Die Matrix $W(B) := (W_{i,j}(B))_{i,j \in \mathbb{N}_n} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ heiße die <u>Verkehrsmatrix</u> zum Anschlußbereichsvektor B.

## (2.11) Das Verbindungsnetz

Sei $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathcal{L}_n$ der Lagevektor und $B = (B_1, B_2, \ldots, B_n) \in \mathfrak{A}_n$ der Anschlußbereichsvektor der n Vermittlungsstellen. Es werde zunächst angenommen, daß diese n Vermittlungsstellen durch ein vollständiges Maschennetz miteinander verbunden sind. Die Anzahl der Verbindungsleitungen von der Vermittlungsstelle im Punkte $v_i$ zu der Vermittlungsstelle im Punkte $v_j$ sei $l_{i,j} \in \mathbb{N}_o$ $(i,j \;\; \mathbb{N}_n,\ i \neq j)$. Es sei noch $l_{i,i} = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_n$ festgelegt. Die Matrix $l = (l_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}_n} \in \mathbb{N}_o^{n \times n}$ heiße dann die <u>Verbindungsleitungsmatrix</u> der n Vermittlungsstellen.

Die Gesamtheit aller Verbindungsmatrizen für n Vermittlungsstellen werde mit $\mathcal{V}_n$ bezeichnet.

$$\mathcal{V}_n = \left\{ (l_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}_n} \in \mathbb{N}_o^{n \times n} \;\middle|\; \forall i \in \mathbb{N}_n : l_{i,i} = 0 \right\}$$

Die Verbindungsleitungsmatrix $l \in \mathcal{N}_n$ heiße zulässig in bezug auf die Verkehrsmatrix W(B) zum Anschlußbereichsvektor B, oder auch kurz: zulässig in bezug auf den Anschlußbereichsvektor B, wenn durch das Verbindungsnetz zufolge l das Verkehrsangebot gemäß W(B) mit einem bestimmten vorgegebenen Verlust abgewickelt werden kann.

Die Gesamtheit aller Verbindungsleitungsmatrizen für n Vermittlungsstellen, die bezüglich des Anschlußbereichsvektors $B \in \mathcal{O}_n$ zulässig sind, werde mit $\mathcal{N}_n(B)$ bezeichnet.
$\mathcal{N}_n(B) = \{ l \in \mathcal{N}_n \mid l \text{ ist in bezug auf B zulässig} \}$

(2.12) Die Kosten des Verbindungsnetzes

Sei $n \in \mathbb{N}$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in (\mathbb{R}^2)^n$ und $l = (l_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}_n} \in \mathbb{N}_o^{n \times n}$. Seien weiter $p_2 : \mathbb{N}_o \to \mathbb{R}_+$ mit $p_2(o) = 0$ und $p_3 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ zwei Preisfunktionen. Diese beiden Preisfunktionen sollen, analog wie $p_1$ in Teil (2.6), die Bewertung der Kosten des Verbindungsnetzes in Abhängigkeit von der Anzahl der Leitungen und der Leitungslänge erlauben. Dann werde gesetzt:

$$V_n(z,l) := \sum_{i,j \in \mathbb{N}_n} p_2(l_{i,j}) \cdot p_3(d(z_i, z_j))$$

und damit dann definiert:

$$V_n : (\mathbb{R}^2)^n \times \mathbb{N}_o^{n \times n} \to \mathbb{R}_+$$
$$(z,l) \mapsto V_n(z,l).$$

Diese Abbildung heiße die Kostenfunktion des Verbindungsnetzes der n Vermittlungsstellen.

Denn ist $n \in \mathbb{N}_{MN}$ die Anzahl der Vermittlungsstellen, $v = (v_1, v_2, \ldots v_n) \in \mathcal{L}_n \in (\mathbb{R}^2)^n$ ihr Lagevektor und $l \in \mathcal{N}_n$ eine Verbindungsleitungsmatrix, dann ist $V_n(v,l)$ ein Maß für den Anteil der Kosten des Verbindungsnetzes, der durch die Anzahl und die Lagen der Vermittlungsstellen sowie durch die Anzahl der Verbindungsleitungen zu beeinflussen ist.

Um die Überlegungen nicht allzusehr zu komplizieren, wird zumeist $p_2 = \alpha \cdot id_{\mathbb{N}_0}$ mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}_+$ und $p_3 = id_{\mathbb{R}_+}$ gesetzt.

(2.13) Die Kosten des Nachrichtensystems

Sei $n \in \mathbb{N}$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in (\mathbb{R}^2)^n$, $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) \in \mathfrak{Z}_n$, $l \in \mathcal{N}_n$ und $\varrho \in \mathbb{R}_+$. Dann werde gesetzt:

$K_n(z,Z,l) := \varrho \cdot n + L_n(z,Z) + V_n(z,l)$

und damit dann definiert:

$$K_n : (\mathbb{R}^2)^n \times \mathfrak{Z}_n \times \mathcal{N}_n \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$(z,Z,l) \longmapsto K_n(z,Z,l).$$

Diese Abbildung heiße die Kostenfunktion des Nachrichtensystems für n Vermittlungsstellen. Denn ist $n \in \mathbb{N}_{MN}$ die Anzahl der Vermittlungsstellen, $v \in \mathcal{L}_n \in (\mathbb{R}^2)^n$ ihr Lagevektor, $B \in \mathfrak{A}_n \in \mathfrak{Z}_n$ ihr Anschlußbereichsvektor und $l \in \mathcal{N}_n$ eine Verbindungsleitungsmatrix, dann ist $K_n(v,B,l)$ ein Maß für den Anteil der Kosten des Nachrichtensystems, der durch die Anzahl, die Lagen und die Anschlußbereiche der Vermittlungsstellen sowie durch das Verbindungsnetz zu beeinflussen ist.

## 3. DIE OPTIMIERUNGSAUFGABEN UND DIE ZUGEHÖRIGEN ALGORITHMEN

### (3.1) Bemerkung

Das Ziel bei der Kostenoptimierung von Nachrichtensystemen mit zentraler Vermittlung ist die Lösung des folgenden Problems: Ausgehend vom Teilnehmer- und Verkehrsprofil des Netzbereiches, sind die Anzahl, die Lagen und die Anschlußbereiche der Vermittlungsstellen sowie das Verbindungsnetz so zu bestimmen, daß der vorgegebene Verkehr mit einem bestimmten Verlust abgewickelt werden kann und ein Nachrichtensystem entsteht, das mit minimalen Kosten realisiert werden kann.

Mit Hilfe der in Abschnitt 2 bereitgestellten Sprache heißt dies, daß das Ziel bei der Kostenoptimierung von Nachrichtensystemen mit zentraler Vermittlung die Lösung der folgenden Aufgabe 1 ist.

### (3.2) Aufgabe 1

Gegeben: $t \in \mathbb{N}_0^{M\times N}$, $V \in (\mathbb{R}_+^{M\times N})^{M\times N}$.

Gesucht: $n^* \in \mathbb{N}_{MN}$, $v^* \in \mathcal{L}_{n^*}$, $B^* \in \mathfrak{A}_{n^*}$, $l^* \in \mathcal{P}_{n^*}(B^*)$ mit

$$K_{n^*}(v^*, B^*, l^*) = \min_{n \in \mathbb{N}_{MN}} \; \min_{\substack{v \in \mathcal{L}_n \\ B \in \mathfrak{A}_n}} \; \min_{l \in \mathcal{P}_n(B)} K_n(v,B,l).$$

### (3.3) Bemerkungen

(1) Hier in dieser Aufgabe 1 ist nur $n \in \mathbb{N}_{MN}$ zugelassen, da für $n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{MN}$ stets $\mathfrak{A}_n = \emptyset$ ist (siehe hierzu Teil (2.4)).

(2) Im Prinzip ist diese Aufgabe 1 natürlich durch Totalenumeration zu lösen. Aufgrund des Umfanges praktischer Probleme (großes M und großes N) kommt dieser Lösungsweg aber leider nicht in Frage. Man versucht daher mit einer Teilenumeration über $n \in \mathbb{N}_{MN}$ weiterzukommen, und gelangt so zu dem folgenden Algorithmus 1 zur Lösung der Aufgabe 1 mit Hilfe der Aufgaben 2 und 3.

## (3.4) Algorithmus 1

Lösung der Aufgabe 1 mit Hilfe der Aufgaben 2 und 3.

Step 0: Start

Step 1: Eingabe von $t \in \mathbb{N}_o^{M \times N}$ und $V \in (\mathbb{R}_+^{M \times N})^{M \times N}$

Step 2: $\forall n \in \mathbb{N}_{MN}$: Lösung der Aufgabe 2

Step 3: Lösung der Aufgabe 3

Step 4: $v^* := v^*(n^*)$, $B^* := B^*(n^*)$, $l^* := l^*(n^*)$.

Step 5: Stop

## (3.5) Aufgabe 2

Gegeben: $t \in \mathbb{N}_o^{M \times N}$, $V \in (\mathbb{R}_+^{M \times N})^{M \times N}$, $n \in \mathbb{N}_{MN}$.

Gesucht: $v^*(n) \in \mathcal{L}_n$, $B^*(n) \in \mathfrak{A}_n$, $l^*(n) \in \mathcal{W}_n(B^*(n))$

mit $K_n(v^*(n), B^*(n), l^*(n)) =$

$$\min_{\substack{v \in \mathcal{L}_n \\ B \in \mathfrak{A}_n}} \; \min_{l \in \mathcal{W}_n(B)} \; K_n(v, B, l).$$

## (3.6) Aufgabe 3

Gegeben: $\forall n \in \mathbb{N}_{MN}$: $v^*(n) \in \mathcal{L}_n$, $B^*(n) \in \mathfrak{A}_n$, $l^*(n) \in \mathcal{W}_n(B^*(n))$.

Gesucht: $n^* \in \mathbb{N}_{MN}$ mit $K_n(v^*(n^*), B^*(n^*), l^*(n^*)) =$

$$\min_{n \in \mathbb{N}_{MN}} K_n(v^*(n), B^*(n), l^*(n)).$$

## (3.7) Bemerkung

Leider stellt der Algorithmus 1 noch keine große Hilfe dar, da auch die Aufgabe 2 praktisch nicht zu lösen ist. Es ist daher allgemein üblich, sich mit einer Näherungslösung der Aufgabe 2, und damit natürlich auch der Aufgabe 1, zu begnügen. Man löst also nicht mehr die Aufgabe 1, sondern die einfachere folgende Aufgabe 1a.

(3.8) Aufgabe 1 a

Gegeben: $t \in \mathbb{N}_0^{M \times N}$, $V \in (\mathbb{R}_+^{M \times N})^{M \times N}$
Gesucht: $\tilde{n} \in \mathbb{N}_{MN}$, $\tilde{v} \in \mathcal{L}_{\tilde{n}}$, $\tilde{B} \in \mathfrak{A}_{\tilde{n}}$, $\tilde{1} \in \Omega_{\tilde{n}}(\tilde{B})$ mit $K_{\tilde{n}}(\tilde{v}, \tilde{B}, \tilde{1}) \approx$

$$\min_{\tilde{n} \in \mathbb{N}_{MN}} \; \min_{\substack{v \in \mathcal{L}_n \\ B \in \mathfrak{A}_n}} \; \min_{1 \in \Omega_n(B)} K_n(v, B, 1).$$

(3.9) Bemerkung

Die Lösung dieser Aufgabe 1 a erfolgt natürlich mit einem zum Algorithmus 1 analogen Algorithmus 1 a, der im folgenden angegeben ist.

(3.10) Algorithmus 1 a

Lösung der Aufgabe 1 a mit Hilfe der Aufgaben 2 a und 3 a.

Step 0: Start
Step 1: Eingabe von $t \in \mathbb{N}_0^{M \times N}$ und $V \in (\mathbb{R}_+^{M \times N})^{M \times N}$.
Step 2: $\forall n \in \mathbb{N}_{MN}$: Lösung der Aufgabe 2 a
Step 3: Lösung der Aufgabe 3 a
Step 4: $\tilde{v} := \tilde{v}(\tilde{n})$, $\tilde{B} := \tilde{B}(\tilde{n})$, $\tilde{1} := \tilde{1}(\tilde{n})$
Step 5: Stop

(3.11) Aufgabe 2 a

Gegeben: $t \in \mathbb{N}_0^{M \times N}$, $V \in (\mathbb{R}_+^{M \times N})^{M \times N}$, $n \in \mathbb{N}_{MN}$.
Gesucht: $\tilde{v}(n) \in \mathcal{L}_n$, $\tilde{B}(n) \in \mathfrak{A}_n$, $\tilde{1}(n) \in \Omega_n(\tilde{B}(n))$ mit

$K_n(\tilde{v}(n), \tilde{B}(n), \tilde{1}(n)) \approx$

$$\min_{\substack{v \in \mathcal{L}_n \\ B \in \mathfrak{A}_n}} \; \min_{1 \in \Omega_n(B)} K_n(v, B, 1).$$

(3.12) Aufgabe 3 a

Gegeben: $\forall n \in \mathbb{N}_{MN}$ : $\tilde{v}(n) \in \mathcal{L}_n$, $\tilde{B}(n) \in \mathfrak{A}_n$, $\tilde{l}(n) \in \mathcal{N}_n(\tilde{B}(n))$.

Gesucht: $\tilde{n} \in \mathbb{N}_{MN}$ mit $K_{\tilde{n}}(\tilde{v}(\tilde{n}), \tilde{B}(\tilde{n}), \tilde{l}(\tilde{n})) =$

$$\min_{n \in \mathbb{N}_{MN}} K_n(\tilde{v}(n), \tilde{B}(n), \tilde{l}(n)).$$

(3.13) Bemerkung

Im folgenden sollen jetzt einige Ausführungen zur Lösung der Aufgabe 2 a gemacht werden. Zunächst sei jedoch noch ein Algorithmus 2 zur Lösung dieser Aufgabe 2 a angegeben, zu dem man im Prinzip durch das Studium der entsprechenden Literatur geführt wird.

(3.14) Algorithmus 2

Lösung der Aufgabe 2 a mit Hilfe der Aufgaben 4,5 und 6.

Step 0: Start
Step 1: Eingabe von $t \in \mathbb{N}_0^{M \times N}$, $V \in (\mathbb{R}_+^{M \times N})^{M \times N}$ und $n \in \mathbb{N}_{MN}$.
Step 2: Wahl von $v \in \mathcal{L}_n$
Step 3: $U := \emptyset$
Step 4: $U := U \cup \{v\}$
Step 5: Lösung der Aufgabe 4
Step 6: $B := \tilde{B}^*$
Step 7: Lösung der Aufgabe 5
Step 8: $l := \tilde{l}^*$
Step 9: Lösung der Aufgabe 6
Step 10: $v := \tilde{v}^*$
Step 11: Wenn $v \notin U$, dann gehe nach Step 4
Step 12: $\tilde{v}(n) := v$, $\tilde{B}(n) := B$, $\tilde{l}(n) := l$
Step 13: Stop

(3.15) Aufgabe 4

Gegeben: $t \in \mathbb{N}_0^{M \times N}$, $n \in \mathbb{N}_{MN}$, $v \in \mathcal{L}_n$ .

Gesucht: $\tilde{B}^* \in \mathfrak{A}_n$ mit $L_n(v,\tilde{B}^*) = \min_{B \in \mathfrak{A}_n} L_n(v,B)$.

(3.16) Aufgabe 5

Gegeben: $V \in (\mathbb{R}_+^{M \times N})^{M \times N}$ , $n \in \mathbb{N}_{MN}$, $v \in \mathcal{L}_n$ , $B \in \mathfrak{A}_n$ .

Gesucht: $\tilde{1}^* \in \mathcal{K}_n(B)$ mit $V_n(v,\tilde{1}^*) = \min_{1 \in \mathcal{K}_n(B)} V_n(v,1)$.

(3.17) Aufgabe 6

Gegeben: $t \in \mathbb{N}_0^{M \times N}$, $n \in \mathbb{N}_{MN}$, $B \in \mathfrak{A}_n$, $1 \in \mathcal{K}_n(B)$.

Gesucht: $\tilde{v}^* \in \mathcal{L}_n$ mit $K_n(\tilde{v}^*,B,1) = \min_{v \in \mathcal{L}_n} K_n(v,B,1)$.

(3.18) Bemerkung

Von den im letzten Algorithmus 2 verwendeten Aufgaben 4, 5 und 6 ist lediglich die Aufgabe 4 ohne Schwierigkeiten zu lösen.Die Aufgaben 5 und 6 sind zur Zeit wiederum nur näherungsweise zu lösen, d.h. es sind lediglich die im folgenden angegebenen Aufgaben 5 a und 6 a zu lösen.

Wird dies berücksichtigt, so gelangt man zu dem folgenden Algorithmus 2 a zur Lösung der Aufgabe 2 a. Nach diesem Algorithmus 2 a wird im Prinzip bei Rapp [12] und bei Anderberg-Fried-Rudberg [1] vorgegangen.

(3.19) Algorithmus 2 a

Lösung der Aufgabe 2 a mit Hilfe der Aufgaben 4,5 a und 6 a.

Step 0: Start
Step 1: Eingabe von $t \in \mathbb{N}_o^{M\times N}$, $V \in (\mathbb{R}_+^{M\times N})^{M\times N}$ und $n \in \mathbb{N}_{MN}$
Step 2: Wahl von $v \in \mathcal{L}_n$
Step 3: $U := \emptyset$
Step 4: $U := U \cup \{v\}$
Step 5: Lösung der Aufgabe 4
Step 6: $B := \tilde{B}^*$
Step 7: Lösung der Aufgabe 5 a
Step 8: $l := \tilde{\tilde{l}}$
Step 9: Lösung der Aufgabe 6 a
Step 10: $v := \tilde{\tilde{v}}$
Step 11: Wenn $v \notin U$, dann gehe nach Step 4
Step 12: $\tilde{v}(n) := v$, $\tilde{B}(n) := B$, $\tilde{l}(n) := l$
Step 13: Stop

(3.20) Aufgabe 5 a

Gegeben: $V \in (\mathbb{R}_+^{M\times N})^{M\times N}$, $n \in \mathbb{N}_{MN}$, $v \in \mathcal{L}_n$, $B \in \mathfrak{A}_n$.

Gesucht: $\tilde{\tilde{l}} \in \Lambda_n(B)$ mit $V_n(v,\tilde{\tilde{l}}) \approx \min\limits_{l \in \Lambda_n(B)} V_n(v,l)$.

(3.21) Aufgabe 6 a

Gegeben: $t \in \mathbb{N}_o^{M\times N}$, $n \in \mathbb{N}_{MN}$, $B \in \mathfrak{A}_n$, $l \in \Lambda_n(B)$.

Gesucht: $\tilde{\tilde{v}} \in \mathcal{L}_n$ mit $K_n(\tilde{\tilde{v}},B,l) \approx \min\limits_{v \in \mathcal{L}_n} K_n(v,B,l)$.

(3.22) Bemerkungen

(1) Zunächst einige Anmerkungen zur Lösung der Aufgabe 5 a: Für die Lösung dieser Aufgabe ist als erstes aus dem Verkehrsprofil $V \in (\mathbb{R}_+^{M\times N})^{M\times N}$ und dem Anschlußbereichsvektor $B \in \mathfrak{A}_n$ die Verkehrsmatrix $W(B) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ zu berechnen.

Dies bereitet sicherlich keine Schwierigkeiten. Bei der Berechnung einer in bezug auf die Verkehrsmatrix W(B) zulässigen Verbindungsleitungsmatrix $\mathfrak{V}_n(B)$ wird dann folgendermaßen vorgegangen:

1. Die Struktur des Verbindungsnetzes wird festgelegt, und zwar entweder als vollständiges Maschennetz (bei Anderberg-Fried-Rudberg [1] und bei Rapp [12] ) oder als Baumnetz (bei Bretschneider-Goldbrunner [3] und bei Krätzig [8] ).
2. Die Verbindungsleitungsmatrix $\mathfrak{V}_n(B)$ wird so dimensioniert, daß der Verkehr gemäß W(B) mit einem bestimmten vorgegebenen Verlust gerade noch abgewickelt werden kann.

Es ist klar, daß auf diesem Wege lediglich die Aufgabe 5 a, nicht aber die Aufgabe 5 gelöst werden kann.

Es sei hier noch angemerkt, daß bei großen Verbindungsnetzen ein Ansatz als Baumnetz sicherlich günstiger ist, da hierbei in natürlicher Weise mehrere Hierarchieebenen entstehen (siehe bei Krätzig [8]).

(2) Nun zu den Algorithmen 2 und 2 a . An diesen beiden Algorithmen ist sicherlich noch vieles unklar. Vor allem die angegebene Organisation der Schleifen hat natürlich nur symbolischen Wert. Die Verhältnisse werden jedoch sehr viel übersichtlicher, wenn die Berechnung der Verbindungsleitungsmatrix jeweils aus der Schleife herausgenommen wird.

In diesem Fall erhält man die beiden Algorithmen 3 und 3 a, die den Algorithmen 2 und 2 a entsprechen, und in denen die relativ schwierigen Aufgaben 6 bzw. 6 a durch die einfache Aufgabe 7 ersetzt sind. Mit dem Algorithmus 3 a wird im Prinzip bei Bretschneider-Goldbrunner [3] gearbeitet.

(3.23) Algorithmus 3 bzw. 3 a

Lösung der Aufgabe 2 a mit Hilfe der Aufgaben 4, 5 bzw. 5 a und 7.

Step 0: Start
Step 1: Eingabe von $t \in \mathbb{N}_o^{M \times N}$, $V \in (\mathbb{R}_+^{M \times N})^{M \times N}$ und $n \in \mathbb{N}_{MN}$
Step 2: Wahl von $v \in \mathcal{L}_n$
Step 3: $U := \emptyset$
Step 4: $U := U \cup \{v\}$
Step 5: Lösung der Aufgabe 4
Step 6: $B := \tilde{B}^*$
Step 7: Lösung der Aufgabe 7
Step 8: $v := \tilde{v}^*$
Step 9: Wenn $v \notin U$, dann gehe nach Step 4
Step 10: Lösung der Aufgabe 5 bzw. 5 a
Step 11: $\tilde{v}(n) := v$, $\tilde{B}(n) := B$, $\tilde{I}(n) := \tilde{I}^*$ bzw. $\tilde{I}(n) := \tilde{I}^{**}$
Step 12: Stop

(3.24) Aufgabe 7

Gegeben: $t \in \mathbb{N}_o^{M \times N}$, $n \in \mathbb{N}_{MN}$, $B \in \mathfrak{A}_n$.

Gesucht: $\tilde{v}^* \in \mathcal{L}_n$ mit $L_n(\tilde{v}^*, B) = \min\limits_{v \in \mathcal{L}_n} L_n(v, B)$.

(3.25) Bemerkung

Im Algorithmus 3 und 3 a ist die Lösung der Aufgabe 2 a in die Lösung zweier unabhängiger Teilaufgaben zerlegt. Im ersten Teil erfolgt die Berechnung eines Lagevektors $\tilde{v}(n) \in \mathcal{L}_n$ und eines Anschlußbereichsvektors $\tilde{B}(n) \in \mathfrak{A}_n$. Diese Teilaufgabe wird im folgenden 4. Abschnitt genauer untersucht. Im zweiten Teil erfolgt dann in der Aufgabe 5 bzw. 5 a die Berechnung einer Verbindungsleitungsmatrix $\tilde{I}(n) \in \mathcal{V}_n(\tilde{B}(n))$. Zu diesen Aufgaben 5 und 5 a wurde schon in der Bemerkung (3.22) einiges gesagt.

Für die weiteren Untersuchungen erweist es sich als zweckmäßig, wenn die zum ersten Teil des Algorithmus 3 bzw. 3 a gehörende Teilaufgabe explizit als Aufgabe 8 bzw. 8 a formuliert wird. Des weiteren seien die beiden Algorithmen, die sich zur Lösung der Aufgabe 2 a mit Hilfe dieser Aufgaben 8 bzw. 8 a angeben lassen, als Algorithmus 4 und als Algorithmus 4 a aufgeführt.

(3.26) Algorithmus 4

Lösung der Aufgabe 2 a mit Hilfe der Aufgaben 5 und 8

Step 0: Start
Step 1: Eingabe von $t \in \mathbb{N}_0^{M \times N}$, $V \in (\mathbb{R}_+^{M \times N})^{M \times N}$ und $n \in \mathbb{N}_{MN}$.
Step 2: Lösung der Aufgabe 8
Step 3: $v := \tilde{v}^*$, $B := \tilde{B}^*$
Step 4: Lösung der Aufgabe 5
Step 5: $\tilde{v}(n) := v$, $\tilde{B}(n) := B$, $\tilde{I}(n) := \tilde{I}^*$.
Step 6: Stop

(3.27) Aufgabe 8

Gegeben: $t \in \mathbb{N}_0^{M \times N}$, $n \in \mathbb{N}_{MN}$.

Gesucht: $\tilde{v}^* \in \mathcal{L}_n$, $\tilde{B}^* \in \mathfrak{A}_n$ mit $L_n(\tilde{v}^*, \tilde{B}^*) = \min\limits_{\substack{v \in \mathcal{L}_n \\ B \in \mathfrak{A}_n}} L_n(v,B)$.

(3.28) Algorithmus 4 a

Lösung der Aufgabe 2 a mit Hilfe der Aufgaben 5 a und 8 a

Step 0: Start
Step 1: Eingabe von $t \in \mathbb{N}_0^{M \times N}$, $V \in (\mathbb{R}_+^{M \times N})^{M \times N}$ und $n \in \mathbb{N}_{MN}$
Step 2: Lösung der Aufgabe 8 a
Step 3: $v := \tilde{v}$, $B := \tilde{B}$
Step 4: Lösung der Aufgabe 5 a
Step 5: $\tilde{v}(n) := v$, $\tilde{B}(n) := B$, $\tilde{I}(n) := \tilde{\tilde{I}}$
Step 6: Stop

(3.29) Aufgabe 8 a

Gegeben: $t \in \mathbb{N}_0^{M\times N}$, $n \in \mathbb{N}_{MN}$ .

Gesucht: $\tilde{v} \in \mathcal{L}_n$ , $\tilde{B} \in \mathfrak{A}_n$ mit $L_n(\tilde{v},\tilde{B}) \approx \min\limits_{\substack{v\in\mathcal{L}_n \\ B\in\mathfrak{A}_n}} L_n(v,B)$ .

(3.30) Bemerkung

(1) Es sei noch angemerkt, daß der Algorithmus 4 a zwar als eine Kurzschreibweise des Algorithmus 3 a angesehen werden kann, daß zwischen den beiden Algorithmen 4 und 3 aber ein fundamentaler Unterschied besteht.

Der Algorithmus 3 kann nur als eine ausführliche Schreibweise eines Algorithmus zur Lösung der Aufgabe 2 a mit Hilfe der Aufgaben 5 a und 8 angesehen werden.

(2) Bei den Aufgaben 8 und 8 a handelt es sich um das sogenannte "multiple Standortproblem".

Der Algorithmus zur Lösung der Aufgabe 8 a, so wie er aus dem Algorithmus 3 bzw. 3 a abgelesen werden kann, sei schließlich noch als Algorithmus 5 angegeben.

(3.31) Algorithmus 5

Lösung der Aufgabe 8 a mit Hilfe der Aufgabe 4 und 7.

Step 0: Start
Step 1: Eingabe von $t \in \mathbb{N}_0^{M\times N}$ und $n \in \mathbb{N}_{MN}$
Step 2: Wahl von $v \in \mathcal{L}_n$
Step 3: $U := \emptyset$
Step 4: $U := U \cup \{v\}$
Step 5: Lösung der Aufgabe 4

Step 6: $B := \tilde{B}^*$
Step 7: Lösung der Aufgabe 7
Step 8: $v := \tilde{v}^*$
Step 9: Wenn $v \notin U$, dann gehe nach Step 4
Step 10: $\tilde{v} := v$, $\tilde{B} := B$
Step 11: Stop

(3.32) Bemerkung

Die Lösung der Aufgabe 8 a, die mit Hilfe dieses Algorithmus 5 erhalten wird, hängt ganz wesentlich von dem gewählten Start-Lagevektor $v \in \mathcal{L}_n$ ab. Analoges gilt natürlich auch für die Lösungen, die mit Hilfe der Algorithmen 2, 2 a, 3 und 3 a erhalten werden. Und es ist ein bisher noch ungelöstes Problem, wie denn der Start-Lagevektor $v \in \mathcal{L}_n$ gewählt werden soll, so daß das Tupel $(\tilde{v},\tilde{B}) \in \mathcal{L}_n \times \mathfrak{A}_n$ möglichst optimal wird, d.h., so daß $L_n(\tilde{v},\tilde{B})$ möglichst nahe an $\min\limits_{\substack{v \in \mathcal{L}_n \\ B \in \mathfrak{A}_n}} L_n(v,B)$ herankommt.

Mangels besserer Möglichkeiten überläßt man das Problem der Wahl geeigneter Start-Lagevektoren daher entweder

a) dem "erfahrenen Planungsingenieur" (bei Anderberg-Fried-Rudberg [1] und bei Rapp [12])

oder

b) dem "Zufall" (bei Bretschneider-Goldbrunner [3]).

Im Fall b) wird der obige Algorithmus 5 mit mehreren zufällig gewählten Start-Lagevektoren $v \in \mathcal{L}_n$ begonnen und dann dasjenige Tupel $(\tilde{v},\tilde{B}) \in \mathcal{L}_n \times \mathfrak{A}_n$ zum Ergebnis erklärt, das die kleinste "Gesamtlänge" $L_n(\tilde{v},\tilde{B})$ der Anschlußleitungen ergibt.

## 4. DER ALGORITHMUS ZUR "LOKALEN OPTIMIERUNG"DES ANSCHLUßNETZES

### (4.1) Bemerkung

Hier in diesem Abschnitt soll derjenige Algorithmus zur "lokalen Optimierung" des Anschlußnetzes genauer analysiert werden, auf den in nahezu allen einschlägigen Veröffentlichungen bezug genommen wird (siehe beispielsweise in [1, 3, 9, 10, 11, 12, 13, 14]). Es handelt sich hierbei im Prinzip um den Algorithmus 5 (3.31).

Das erste Ziel der folgenden Ausführungen besteht nun darin, die Berechnung des Anschlußbereichsvektors aus der Schleife im Algorithmus 5 zu eliminieren. Im Prinzip könnte man natürlich auch die Berechnung des Lagevektors aus der Schleife im Algorithmus 5 eliminieren, ebenso wie man den Algorithmus 5 durch Vorgabe eines Start-Anschlußbereichsvektors anstelle eines Start-Lagevektors beginnen könnte. Wie die Durchrechnung einfacher Beispiele zeigte, ist der obige Weg aber günstiger, da die Lagevektoren als Elemente aus $\mathcal{L}_n \subset (\mathbb{R}^2)^n$ einfacher zu handhaben sind als die Anschlußbereichsvektoren als Elemente aus $\mathfrak{A}_n \subset (\mathfrak{P}(\mathbb{N}^2_{M\times N}))^n$.

### (4.2) Definitionen

Für jedes $A \subset \mathbb{N}^2_{M\times N}$ mit $A \neq \emptyset$ werde definiert:

$$f_{A,1}: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_{A,1}(x) := \sum_{(i,j)\in A} t_{i,j} \cdot |x-i|$$

$$\tilde{f}_{A,1}: \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longrightarrow \tilde{f}_{A,1}(x,y) := f_{A,1}(x)$$

$$f_{A,2}: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto f_{A,2}(y) := \sum_{(i,j)\in A} t_{i,j} \cdot |y-j|$$

$$\tilde{f}_{A,2}: \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \tilde{f}_{A,2}(x,y) := f_{A,2}(y)$$

$$f_A: \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto f_A(x,y) := \tilde{f}_{A,1}(x,y) + \tilde{f}_{A,2}(x,y)$$

(4.3) Lemma

Für alle $A \subset \mathbb{N}^2_{M \times N}$ mit $A \neq \emptyset$ und alle $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$f_A(z) = f_{A,1}(x) + f_{A,2}(y) = \sum_{(i,j) \in A} t_{i,j} \cdot d_1(z,(i,j))$$

Beweis

Sei $A \subset \mathbb{N}^2_{M \times N}$ mit $A \neq \emptyset$ und $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Dann gilt:

$$f_A(z) = f_A(x,y) = \tilde{f}_{A,1}(x,y) + \tilde{f}_{A,2}(x,y) = f_{A,1}(x) + f_{A,2}(y) =$$

$$= \sum_{(i,j) \in A} t_{i,j} \cdot |x-i| + \sum_{(i,j) \in A} t_{i,j} \cdot |y-j| =$$

$$= \sum_{(i,j) \in A} t_{i,j} \cdot (|x-i| + |y-j|) = \sum_{(i,j) \in A} t_{i,j} \cdot d_1((x,y),(i,j)) =$$

$$= \sum_{(i,j) \in A} t_{i,j} \cdot d_1(z,(i,j))$$

Damit ist das Lemma (4.3) bewiesen.

(4.4) Lemma

Für alle $A \subset \mathbb{N}^2_{M \times N}$ mit $A \neq \emptyset$ sind die Funktionen $f_{A,1}$, $f_{A,2}$, $\tilde{f}_{A,1}$, $\tilde{f}_{A,2}$ und $f_A$ nichtnegativ, stetig und konvex.

Beweis

Sei $A \subset \mathbb{N}^2_{M \times N}$ mit $A \neq \emptyset$ beliebig.

Sei jedes $i \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x-i|$ nichtnegativ, stetig und konvex. Also ist auch die Funktion $f_{A,1}$, als nichtnegative Linearkombination von nichtnegativen, stetigen und konvexen Funktionen, wiederum nichtnegativ, stetig und konvex. Das gleiche Argument gilt für die Funktionen $f_{A,2}$, $\tilde{f}_{A,1}$ und $\tilde{f}_{A,2}$. Hiermit ist aber wegen $f_A = \tilde{f}_{A,1} + \tilde{f}_{A,2}$ auch die Funktion $f_A$ nichtnegativ, stetig und konvex.

Damit ist das Lemma (4.4) bewiesen.

(4.5) Lemma

Für alle $A \subset \mathbb{N}^2_{M \times N}$ mit $A \neq \emptyset$ und $S_A := \sum_{(i,j)\in A} t_{i,j} > 0$ sind die Funktionen $f_{A,1}$, $f_{A,2}$ und $f_A$ radial unbeschränkt.

Beweis

Sei $A \subset \mathbb{N}^2_{M \times N}$ mit $A \neq \emptyset$ und $S_A = \sum_{(i,j)\in A} t_{i,j} > 0$ beliebig.

Es genügt zu zeigen, daß die Funktion $f_{A,1}$ radial unbeschränkt ist. Aus Gründen der Analogie ist dann nämlich auch die Funktion $f_{A,2}$ radial unbeschränkt und somit wegen $f_A(x,y) = f_{A,1}(x) + f_{A,2}(y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ natürlich auch die Funktion $f_A$.

Es genügt also zu zeigen, daß die Funktion $f_{A,1}$ radial unbeschränkt ist, d.h., daß zu jedem $K \in \mathbb{R}_+$ ein $r \in \mathbb{R}_+$ existiert, so daß für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq r$ gilt: $f_{A,1}(x) \geq K$.

Sei also $K \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Wegen $S_A > 0$ gibt es ein $(i,j) \in A$ mit $t_{i,j} > 0$.

Setze $r := \frac{K}{t_{i,j}} + i$.

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq r$:

$$f_{A,1}(x) = \sum_{(k,l)\in A} t_{k,l} \cdot |x-k| \geq t_{i,j} \cdot |x-i| \geq t_{i,j} \cdot (|x| - |i|) \geq$$

$$\geq t_{i,j} \cdot (r-i) = K .$$

Damit ist das Lemma (4.5) bewiesen.

(4.6) Lemma

Für alle $A \subset \mathbb{N}^2_{M \times N}$ mit $A \neq \emptyset$ gilt:

(1) Die Funktion $f_{A,1}$ ist in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_M$ differenzierbar und für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_M$ gilt:

$$f'_{A,1}(x) = \sum_{(i,j)\in A} t_{i,j} \cdot \operatorname{sgn}(x-i).$$

(2) Die Funktion $f_{A,2}$ ist in $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}_N$ differenzierbar und für alle $y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}_N$ gilt:

$$f'_{A,2}(y) = \sum_{(i,j)\in A} t_{i,j}\cdot \operatorname{sgn}(y-j).$$

(3) Die Funktion $\tilde{f}_{A,1}$ ist in $\mathbb{R}^2\setminus(\mathbb{N}_M\times\mathbb{R})$ differenzierbar und für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus(\mathbb{N}_M\times\mathbb{R})$ gilt:

$$\frac{\partial\tilde{f}_{A,1}}{\partial x}(x,y) = f'_{A,1}(x), \quad \frac{\partial\tilde{f}_{A,1}}{\partial y}(x,y) = 0.$$

(4) Die Funktion $\tilde{f}_{A,2}$ ist in $\mathbb{R}^2\setminus(\mathbb{R}\times\mathbb{N}_N)$ differenzierbar und für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus(\mathbb{R}\times\mathbb{N}_N)$ gilt:

$$\frac{\partial\tilde{f}_{A,2}}{\partial x}(x,y) = 0, \qquad \frac{\partial\tilde{f}_{A,2}}{\partial y}(x,y) = f'_{A,2}(y).$$

(5) Die Funktion $f_A$ ist in $\mathbb{R}^2\setminus((\mathbb{N}_M\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times\mathbb{N}_N))$ differenzierbar und es gilt für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus(\mathbb{N}_M\times\mathbb{R})$

$$\frac{\partial f_A}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial\tilde{f}_{A,1}}{\partial x}(x,y) = f'_{A,1}(x)$$

sowie für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus(\mathbb{R}\times\mathbb{N}_N)$

$$\frac{\partial f_A}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial\tilde{f}_{A,2}}{\partial y}(x,y) = f'_{A,2}(y).$$

<u>Beweis</u>

Sei $A\subset\mathbb{N}^2_{M\times N}$ beliebig mit $A \neq \emptyset$.

(1) Für jedes $i\in\mathbb{N}$ ist die Funktion $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto|x-i|$ in $\mathbb{R}\setminus\{i\}$ differenzierbar und für alle $x\in\mathbb{R}\setminus\{i\}$ gilt:
$\frac{d\,|x-i|}{dx} = \operatorname{sgn}(x-i)$.

Hiermit ist die Funktion $f_{A,1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_{A,1}(x) = \sum_{(i,j)\in A} t_{i,j} \cdot |x-i|$ aber in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_M$ differenzierbar und für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_M$ gilt:

$$f'_{A,1}(x) = \frac{d}{dx} \sum_{(i,j)\in A} t_{i,j} \cdot |x-i| =$$

$$\sum_{(i,j)\in A} t_{i,j} \cdot \frac{d}{dx} |x-i| = \sum_{(i,j)\in A} t_{i,j} \cdot \operatorname{sgn}(x-i).$$

(2) Analog zu Teil (1).

(3) Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{N}_M \times \mathbb{R})$. Dann ist $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_M$ und $y \in \mathbb{R}$. Also gilt zufolge Teil (1):

$$\frac{\partial \tilde{f}_{A,1}}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_{A,1}}{\partial x}(x) = \frac{d f_{A,1}}{dx}(x) = f'_{A,1}(x)$$

und

$$\frac{\partial \tilde{f}_{A,1}}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_{A,1}}{\partial y}(x) = 0.$$

(4) Analog zu Teil (3).

(5) Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{N}_M \times \mathbb{R})$. Dann ist $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_M$ und $y \in \mathbb{R}$. Also gilt zufolge Teil (3) und Teil (4):

$$\frac{\partial f_A}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \tilde{f}_{A,1}}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial \tilde{f}_{A,2}}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \tilde{f}_{A,1}}{\partial x}(x,y) =$$

$$= f'_{A,1}(x).$$

Ist dagegen $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \mathbb{N}_N)$, dann ist $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_N$ und zufolge Teil (3) und Teil (4) gilt:

$$\frac{\partial f_A}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \tilde{f}_{A,1}}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial \tilde{f}_{A,2}}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \tilde{f}_{A,2}}{\partial y}(x,y) =$$

$$= f'_{A,2}(y).$$

Hiermit ist die Funktion $f_A$ aber in $\mathbb{R}^2 \setminus ((\mathbb{N}_M \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{N}_N))$ differenzierbar.

Damit ist das Lemma (4.6) bewiesen.

(4.7) Definitionen

Für jedes $A \subset \mathbb{N}^2_{M\times N}$ mit $A \neq \emptyset$ werde definiert:

$$C_{A,1} := \left\{ \overline{x} \in \mathbb{R} \;\middle|\; f_{A,1}(\overline{x}) = \inf_{x\in\mathbb{R}} f_{A,1}(x) \right\}$$

$$C_{A,2} := \left\{ \overline{y} \in \mathbb{R} \;\middle|\; f_{A,2}(\overline{y}) = \inf_{y\in\mathbb{R}} f_{A,2}(y) \right\}$$

$$C_{A} := \left\{ \overline{z} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f_{A}(\overline{z}) = \inf_{z\in\mathbb{R}^2} f_{A}(z) \right\} .$$

(4.8) Lemma

Für alle $A \subset \mathbb{N}^2_{M\times N}$ mit $A \neq \emptyset$ gilt: $C_A = C_{A,1} \times C_{A,2}$ .

Beweis

Sei $A \subset \mathbb{N}^2_{M\times N}$ beliebig mit $A \neq \emptyset$.

Teil 1: $C_A \subset C_{A,1} \times C_{A,2}$ !

Sei $\overline{z} = (\overline{x},\overline{y}) \in C_A$ beliebig. Dann gilt zufolge Lemma (4.3):

$$f_{A,1}(\overline{x}) + f_{A,2}(\overline{y}) = f_A(\overline{x},\overline{y}) = \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f_A(x,y) =$$

$$= \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} (f_{A,1}(x) + f_{A,2}(y)) =$$

$$= \inf_{x\in\mathbb{R}} f_{A,1}(x) + \inf_{y\in\mathbb{R}} f_{A,2}(y)$$

Hieraus folgt

$$f_{A,1}(\overline{x}) + f_{A,2}(\overline{y}) - \inf_{y\in\mathbb{R}} f_{A,2}(y) = \inf_{x\in\mathbb{R}} f_{A,1}(x)$$

und damit wegen $f_{A,2}(\overline{y}) \geq \inf_{y\in\mathbb{R}} f_{A,2}(y)$

$$f_{A,1}(\overline{x}) \leq \inf_{x\in\mathbb{R}} f_{A,1}(x) .$$

Also ist $f_{A,1}(\overline{x}) = \inf_{x\in\mathbb{R}} f_{A,1}(x)$ und somit auch

$f_{A,2}(\overline{y}) = \inf_{y\in\mathbb{R}} f_{A,2}(y)$. Hiermit ist $\overline{x} \in C_{A,1}$ sowie $\overline{y} \in C_{A,2}$ ,

also: $\overline{z} = (\overline{x},\overline{y}) \in C_{A,1} \times C_{A,2}$ .

Teil 2: $C_{A,1} \times C_{A,2} \subset C_A$ !

Sei $\bar{z} = (\bar{x},\bar{y}) \in C_{A,1} \times C_{A,2}$ beliebig. Dann ist $\bar{x} \in C_{A,1}$ sowie $\bar{y} \in C_{A,2}$ und es gilt zufolge Lemma (4.3):

$$f_A(\bar{z}) = f_{A,1}(\bar{x}) + f_{A,2}(\bar{y}) = \inf_{x \in \mathbb{R}} f_{A,1}(x) + \inf_{y \in \mathbb{R}} f_{A,2}(y) =$$

$$= \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} (f_{A,1}(x) + f_{A,2}(y)) = \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f_A(x,y) = \inf_{z \in \mathbb{R}^2} f_A(z)$$

Also ist $\bar{z} \in C_A$ .

Damit ist das Lemma (4.8) bewiesen.

(4.9) Lemma

Für alle $A \subset \mathbb{N}^2_{M \times N}$ mit $A \neq \emptyset$ sind die Mengen $C_{A,1}$ , $C_{A,2}$ und $C_A$ nicht leer, abgeschlossen und konvex.

Beweis

Sei $A \subset \mathbb{N}^2_{M \times N}$ mit $A \neq \emptyset$ beliebig.

Es genügt zu zeigen, daß die Menge $C_{A,1}$ nicht leer, abgeschlossen und konvex ist. Aus Gründen der Analogie ist dann nämlich auch die Menge $C_{A,2}$ nicht leer, abgeschlossen und konvex und wegen $C_A = C_{A,1} \times C_{A,2}$ gilt das gleiche dann auch für die Menge $C_A$ .

Zufolge Lemma (4.4) ist die Funktion $f_{A,1}$ stetig und konvex. Zusätzlich ist $f_{A,1}$ entweder radial unbeschränkt ( siehe Lemma (4.5) ) oder die Nullfunktion.
Also existiert ein $\bar{x} \in \mathbb{R}$ mit $f_{A,1}(\bar{x}) = \inf_{x \in \mathbb{R}} f_{A,1}(x)$ , d.h., $C_{A,1}$ ist nicht leer. Sei $\bar{x} \in C_{A,1}$ beliebig und setze $m := f_{A,1}(\bar{x})$ . Dann ist $C_{A,1} = f^{-1}_{A,1}(m)$ und wegen $f_{A,1}$ stetig und konvex ist $C_{A,1}$ abgeschlossen und konvex.

Damit ist das Lemma (4.9) bewiesen.

(4.10) Lemma

Für alle $A \subset \mathbb{N}^2_{M\times N}$ mit $A \neq \emptyset$ und $S_A = \sum_{(i,j)\in A} t_{i,j} > 0$ gilt:

(1) $C_{A,1} \subset [1,M]$

(2) $C_{A,2} \subset [1,N]$

(3) $C_A \subset [1,M]\times[1,N]$ .

Beweis

Sei $A \subset \mathbb{N}^2_{M\times N}$ beliebig mit $A \neq \emptyset$ und $S_A = \sum_{(i,j)\in A} t_{i,j} > 0$ .

(1) Sei $x \notin [1,M]$. Zufolge Lemma (4.6.1) ist dann die Funktion $f_{A,1}$ im Punkte x differenzierbar und es gilt

$$f'_{A,1}(x) = \sum_{(i,j)\in A} t_{i,j}\cdot \operatorname{sgn}(x-i) \neq 0 .$$

Also ist $x \notin C_{A,1} = \{x \in \mathbb{R} \mid f_{A,1}(x) = \inf_{u\in\mathbb{R}} f_{A,1}(u)\}$

und damit gilt: $C_{A,1} \subset [1,M]$.

(2) Analog zu Teil (1).

(3) Wegen $C_A = C_{A,1} \times C_{A,2}$ und Teil (1) sowie Teil (2) ist dies klar.

Damit ist das Lemma (4.10) bewiesen.

(4.11) Korollar

Für alle $A \subset \mathbb{N}^2_{M\times N}$ mit $A \neq \emptyset$ sind $C_{A,1} \cap [1,M]$ sowie $C_{A,2} \cap [1,N]$ abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{R}$ und $C_A \cap ([1,M]\times[1,N])$ ist ein abgeschlossenes Rechteck in $\mathbb{R}^2$.

(4.12) Lemma

Für alle $A \subset \mathbb{N}^2_{M\times N}$ mit $A \neq \emptyset$ gilt:

(1) $C_{A,1} \cap \mathbb{N}_M \neq \emptyset$

(2) $C_{A,2} \cap \mathbb{N}_N \neq \emptyset$

(3) $C_A \cap \mathbb{N}^2_{M\times N} \neq \emptyset$ .

Beweis

Sei $A \subset \mathbb{N}^2_{M\times N}$ beliebig mit $A \neq \emptyset$.

(1) Sei $x \in C_{A,1} \cap [1,M]$. Ist x zusätzlich aus $\mathbb{N}_M$ , dann ist $C_{A,1} \cap \mathbb{N}_M \neq \emptyset$ . Sei also $x \notin \mathbb{N}_M$ angenommen.
Zufolge Lemma (4.6.1) ist $f_{A,1}$ im Punkte x differenzierbar und damit gilt wegen $x \in C_{A,1}$ : $f'_{A,1}(x) = 0$ .
Sei jetzt $k \in \mathbb{N}_{M-1}$ mit $x \in (k,k+1)$. Dann gilt für alle $u \in (k,k+1)$: $f'_{A,1}(u) = 0$. Also ist $(k,k+1) \subset C_{A,1} \cap [1,M]$.
Da $C_{A,1} \cap [1,M]$ zufolge Korollar (4.11) abgeschlossen ist, ist also auch $[k,k+1] \subset C_{A,1} \cap [1,M]$ und somit $k \in C_{A,1} \cap [1,M]$, d.h.: $C_{A,1} \cap \mathbb{N}_M \neq \emptyset$ .

(2) Analog zu Teil (1).

(3) Wegen $C_A = C_{A,1} \times C_{A,2}$ ist dies klar.

Damit ist das Lemma (4.12) bewiesen.

(4.13) Lemma

Für alle $A \subset \mathbb{N}^2_{M\times N}$ mit $A \neq \emptyset$ gilt:

(1) Die Randpunkte des abgeschlossenen Intervalls $C_{A,1} \cap [1,M]$ sind aus $\mathbb{N}_M$ .

(2) Die Randpunkte des abgeschlossenen Intervalls $C_{A,2} \cap [1,N]$ sind aus $\mathbb{N}_N$ .

Beweis

Sei $A \subset \mathbb{N}^2_{M \times N}$ beliebig mit $A \neq \emptyset$ .

(1) Das Intervall $C_{A,1} \cap [1,M]$ ist nichtleer und abgeschlossen!

Widerspruchsbeweis: Angenommen, es gibt einen Randpunkt $x$ von $C_{A,1} \cap [1,M]$ mit $x \notin \mathbb{N}_M$ . Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}_{M-1}$ mit $x \in (k,k+1)$ und wie im Beweis zu Lemma (4.12) gezeigt wurde, gilt: $[k,k+1] \subset C_{A,1} \cap [1,M]$ . Wegen $x \in (k,k+1) \subset [k,k+1] \subset C_{A,1} \cap [1,M]$ ist dann aber $x$ kein Randpunkt von $C_{A,1} \cap [1,M]$ und dies ist ein Widerspruch.

Also war die obige Annahme falsch, d.h., jeder Randpunkt von $C_{A,1} \cap [1,M]$ ist aus $\mathbb{N}_M$ .

(2) Analog zu Teil (1)

Damit ist das Lemma (4.13) bewiesen.

(4.14) Korollar

Für jedes $A \subset \mathbb{N}^2_{M \times N}$ mit $A \neq \emptyset$ gibt es Zahlen $i_1$ , $i_2 \in \mathbb{N}_M$ mit $i_1 \leq i_2$ und Zahlen $j_1$ , $j_2 \in \mathbb{N}_N$ mit $j_1 \leq j_2$ , so daß gilt:

(1) $C_{A,1} \cap [1,M] = [i_1 , i_2]$

(2) $C_{A,2} \cap [1,N] = [j_1 , j_2]$

(3) $C_A \cap ([1,M] \times [1,N]) = [i_1 , i_2] \times [j_1 , j_2]$.

(4.15) Lemma

Für alle $A \subset \mathbb{N}^2_{M \times N}$ mit $A \neq \emptyset$ und $S_A = \sum_{(i,j) \in A} t_{i,j}$ gilt:

(1) Für $i_1, i_2 \in \mathbb{N}_M$ mit $[i_1, i_2] = C_{A,1} \cap [1,M]$ ist

$$i_1 = \min \left\{ k \in \mathbb{N}_M \,\middle|\, \sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i \leq k}} t_{i,j} \geq \frac{1}{2} S_A \right\} \quad \text{und}$$

$$i_2 = \max \left\{ k \in \mathbb{N}_M \,\middle|\, \sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i \geq k}} t_{i,j} \geq \frac{1}{2} S_A \right\}.$$

(2) Für $j_1, j_2 \in \mathbb{N}_N$ mit $[j_1, j_2] = C_{A,2} \cap [1,N]$ ist

$$j_1 = \min \left\{ l \in \mathbb{N}_N \,\middle|\, \sum_{\substack{(i,j)\in A \\ j \leq l}} t_{i,j} \geq \frac{1}{2} S_A \right\} \quad \text{und}$$

$$j_2 = \max \left\{ l \in \mathbb{N}_N \,\middle|\, \sum_{\substack{(i,j)\in A \\ j \geq l}} t_{i,j} \geq \frac{1}{2} S_A \right\}.$$

Beweis

Sei $A \subset \mathbb{N}^2_{M \times N}$ beliebig mit $A \neq \emptyset$.

(1) Seien weiter $i_1, i_2 \in \mathbb{N}_M$ mit $[i_1, i_2] = C_{A,1} \cap [1,M]$.
Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$G := \left\{ k \in \mathbb{N}_M \,\middle|\, \sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i \leq k}} t_{i,j} \geq \frac{1}{2} S_A \right\}$$

Die Menge G ist nicht leer, denn wegen

$$S_A = \sum_{(i,j)\in A} t_{i,j} = \sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i \leq M}} t_{i,j} \geq \frac{1}{2} S_A \quad \text{ist} \quad M \in G.$$

Für die Menge G gilt weiter: Ist $l \in G$, dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}_M$ mit $m \geq l$: $m \in G$. Denn es ist

$$\sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i \leq m}} t_{i,j} \geq \sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i \leq l}} t_{i,j} \geq \frac{1}{2} S_A.$$

Nun sei $x \in (i_1, i_1+1)$. Dann ist $f'_{A,1}(x) \geq 0$ und damit folgt:

$$f'_{A,1}(x) = \sum_{(i,j)\in A} t_{i,j} \cdot \operatorname{sgn}(x-i) =$$

$$\sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i \leq i_1}} t_{i,j} \cdot \underbrace{\operatorname{sgn}(x-i)}_{=\,1} + \sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i > i_1}} t_{i,j} \cdot \underbrace{\operatorname{sgn}(x-i)}_{=\,-1} =$$

$$= \sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i \leq i_1}} t_{i,j} - \sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i > i_1}} t_{i,j} \geq 0$$

Also ist

$$\sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\leqslant i_1}} t_{i,j} \geqslant \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i> i_1}} t_{i,j} = \sum_{(i,j)\in A} t_{i,j} - \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\leqslant i_1}} t_{i,j} =$$

$$= S_A - \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\leqslant i_1}} t_{i,j}$$

und damit gilt:

$$\sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\leqslant i_1}} t_{i,j} \geqslant \frac{1}{2} S_A$$

Also ist $i_1 \in G$.

Nun sei $x \in (i_1-1, i_1)$. Dann ist $f'_{A,1}(x) < 0$ und damit folgt:

$$f'_{A,1}(x) = \sum_{(i,j)\in A} t_{i,j} \cdot \mathrm{sgn}(x-i) =$$

$$= \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\leqslant i_1-1}} t_{i,j} \cdot \underbrace{\mathrm{sgn}(x-i)}_{=1} + \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i> i_1-1}} t_{i,j} \cdot \underbrace{\mathrm{sgn}(x-i)}_{=-1} =$$

$$= \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\leqslant i_1-1}} t_{i,j} - \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i> i_1-1}} t_{i,j} < 0 .$$

Also ist

$$\sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\leqslant i_1-1}} t_{i,j} < \sum_{\substack{(i,j)\ A\\ i> i_1-1}} t_{i,j} = S_A - \sum_{\substack{(i,j)\ A\\ i\leqslant i_1-1}} t_{i,j}$$

und damit gilt:

$$\sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\leqslant i_1-1}} t_{i,j} < \frac{1}{2} S_A$$

Hiermit ist $i_1-1 \notin G$ und somit gilt: $i_1 = \min G$ .

Nun zum zweiten Teil. Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$H := \left\{ k \in \mathbb{N}_M \;\middle|\; \sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i \geq k}} t_{i,j} \geq \frac{1}{2} S_A \right\}$$

Die Menge H ist nicht leer, denn wegen

$$S_A = \sum_{(i,j)\in A} t_{i,j} = \sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i \geq 1}} t_{i,j} \geq \frac{1}{2} S_A \text{ ist } 1 \in H.$$

Für diese Menge H gilt nun weiter: Ist $l \in H$ und $m \in \mathbb{N}_M$ mit $m \leq l$, dann ist $m \in H$. Denn es ist:

$$\sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i \geq m}} t_{i,j} \geq \sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i \geq l}} t_{i,j} \geq \frac{1}{2} S_A$$

Nun sei $x \in (i_2 - 1, i_2)$. Dann ist $f'_{A,1}(x) \leq 0$ und damit folgt:

$$f'_{A,1}(x) = \sum_{(i,j)\in A} t_{i,j} \cdot \operatorname{sgn}(x-i) =$$

$$= \sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i \geq i_2}} t_{i,j} \cdot \underbrace{\operatorname{sgn}(x-i)}_{=-1} + \sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i < i_2}} t_{i,j} \cdot \underbrace{\operatorname{sgn}(x-i)}_{=1} =$$

$$= -\sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i \geq i_2}} t_{i,j} + \sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i < i_2}} t_{i,j} \leq 0$$

Also ist

$$\sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i \geq i_2}} t_{i,j} \geq \sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i < i_2}} t_{i,j} = S_A - \sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i \geq i_2}} t_{i,j}$$

und somit gilt:

$$\sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i \geq i_2}} t_{i,j} \geq \frac{1}{2} S_A$$

Damit ist $i_2 \in H$ .

Nun sei $x \in (i_2, i_2+1)$. Dann ist $f'_{A,1} > 0$ und damit folgt:

$$f'_{A,1}(x) = \sum_{(i,j)\in A} t_{i,j} \operatorname{sgn}(x-i) =$$

$$= \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i \geq i_2+1}} t_{i,j} \cdot \underbrace{\operatorname{sgn}(x-i)}_{=-1} + \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i < i_2+1}} t_{i,j} \cdot \underbrace{\operatorname{sgn}(x-i)}_{=1} =$$

$$= - \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i \geq i_2+1}} t_{i,j} + \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i < i_2+1}} t_{i,j} > 0$$

Also ist

$$\sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i \geq i_2+1}} t_{i,j} < \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i < i_2+1}} t_{i,j} = S_A - \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i \geq i_2+1}} t_{i,j}$$

und somit gilt:

$$\sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i \geq i_2+1}} t_{i,j} < \frac{1}{2} S_A .$$

Hiermit ist $i_2+1 \notin H$ und somit gilt: $i_2 = \max H$.

(2) Analog zu Teil (1).

Damit ist Lemma (4.15) bewiesen.

<u>(4.16) Lemma</u>

Für alle $A \subset \mathbb{N}^2_{M\times N}$ mit $A \neq \emptyset$ gilt:

(1) Seien $i_1, i_2 \in \mathbb{N}_M$ mit $[i_1, i_2] = C_{A,1} \cap [1,M]$.

Dann ist entweder $i_1 = i_2$, oder es ist $i_1 < i_2$ und in diesem Fall gilt:

$$\sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i \leq i_1}} t_{i,j} = \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i \leq i_2-1}} t_{i,j} = \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i \geq i_1+1}} t_{i,j} = \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i \geq i_2}} t_{i,j} = \tfrac{1}{2} S_A .$$

(2) Seien $j_1, j_2 \in \mathbb{N}_N$ mit $[j_1, j_2] = C_{A,2} \cap [1,N]$.

Dann ist entweder $j_1 = j_2$, oder es ist $j_1 < j_2$ und in diesem Fall gilt:

$$\sum_{\substack{(i,j)\in A\\ j\leq j_1}} t_{i,j} = \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ j\leq j_2-1}} t_{i,j} = \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ j\geq j_1+1}} t_{i,j} = \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ j\geq j_2}} t_{i,j} = \frac{1}{2}\, S_A.$$

Beweis

Sei $A \subset \mathbb{N}^2_{M\times N}$ beliebig mit $A \neq \emptyset$.

(1) Seien weiter $i_1, i_2 \in \mathbb{N}_M$ mit $[i_1, i_2] = C_{A,1} \cap [1,M]$.

Im Falle $i_1 = i_2$ ist nichts zu zeigen. Sei also $i_1 < i_2$ angenommen.

Sei $x \in (i_1, i_2) \setminus \mathbb{N}_M$. Dann ist $f'_{A,1}(x) = 0$ und somit folgt:

$$f'_{A,1}(x) = \sum_{(i,j)\in A} t_{i,j} \cdot \operatorname{sgn}(x-i) =$$

$$= \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\leq i_1}} t_{i,j} \underbrace{\cdot \operatorname{sgn}(x-i)}_{=+1} + \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i_1<i<i_2}} t_{i,j} \cdot \operatorname{sgn}(x-i) + \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\geq i_2}} t_{i,j} \cdot$$

$$\underbrace{\cdot \operatorname{sgn}(x-i)}_{=-1} = \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\leq i_1}} t_{i,j} + \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i_1<i<i_2}} t_{i,j} \cdot \operatorname{sgn}(x-i) - \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\geq i_2}} t_{i,j} = 0$$

Also ist $\sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i_1<i<i_2}} t_{i,j} \cdot \operatorname{sgn}(x-i) = 0$ und es folgt weiter

$$\sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\leq i_1}} t_{i,j} = \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\geq i_2}} t_{i,j} = S_A - \underbrace{\sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i< i_2}} t_{i,j}}_{\leq S_A} - \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\leq i_1}} t_{i,j}$$

bzw. $\sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\leq i_1}} t_{i,j} = \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\geq i_2}} t_{i,j} \leq \frac{1}{2}\, S_A$ und damit:

$$\sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\leq i_1}} t_{i,j} = \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\geq i_2}} t_{i,j} = \frac{1}{2}\, S_A\ .$$

Hiermit folgt nun weiter

$$\sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\leq i_2-1}} t_{i,j} = s_A - \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i> i_2-1}} t_{i,j} = s_A - \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\geq i_2}} t_{i,j} = \frac{1}{2}\, s_A$$

sowie

$$\sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\geq i_1+1}} t_{i,j} = s_A - \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i< i_1+1}} t_{i,j} = s_A - \sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\leq i_1}} t_{i,j} = \frac{1}{2}\, s_A.$$

(2) Analog zu Teil (1).

Damit ist das Lemma (4.16) bewiesen.

(4.17) Definitionen

(1) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^2$. Dann heiße die Menge
$R(z_1,z_2) := \{z\in\mathbb{Z}^2 \mid d_1(z_1,z) + d_1(z,z_2) = d_1(z_1,z_2)\}$
das Rechteck zwischen $z_1$ und $z_2$.

(2) Sei $A\subset\mathbb{Z}^2$ und $z\in A$. Gilt für alle $w\in A$ die Inklusion $R(w,z)\subset A$, dann heiße $A$ kartesisch sternförmig bezüglich z.

(3) Sei $A\subset\mathbb{Z}^2$. Existiert ein $z\in A$, so daß A bezüglich z kartesisch sternförmig ist, dann heiße $A$ kartesisch sternförmig.

(4.18) Lemma

Für alle nicht leeren, kartesisch sternförmigen $A\subset\mathbb{N}^2_{M\times N}$ und alle Rechtecke $R := R((i_1,j_1),(i_2,j_2)) \subset \mathbb{N}^2_{M\times N}$ gilt:
Ist $R\cap A = \emptyset$, dann ist auch der Durchschnitt von A mit einem der folgenden Rechtecke $R_1, R_2, R_3, R_4$ leer.

$R_1 := R((1,1),(i_2,j_2))$
$R_2 := R((1,N),(i_2,j_1))$
$R_3 := R((M,1),(i_1,j_2))$
$R_4 := R((M,N),(i_1,j_1))$

Beweis

Sei $A \subset \mathbb{N}^2_{M \times N}$ eine beliebige nichtleere, kartesisch sternförmige Menge, $R = R((i_1,j_1),(i_2,j_2)) \subset \mathbb{N}^2_{M \times N}$ ein beliebiges Rechteck und gelte: $R \cap A = \emptyset$. Zunächst werde die Gültigkeit der folgenden Hilfsbehauptung nachgewiesen.

Behauptung:

Für alle $z_1 \in R_1$, $z_2 \in R_2$, $z_3 \in R_3$ und $z_4 \in R_4$ gilt

$R(z_1,z_4) \cap R \neq \emptyset$ und $R(z_2,z_3) \cap R \neq \emptyset$.

Nachweis:

Diese Behauptung ist aufgrund des Beispiels in Bild 5 unmittelbar einzusehen. Da ein analytischer Beweis schreibtechnisch recht aufwendig ist, möchte ich ihn mir ersparen.

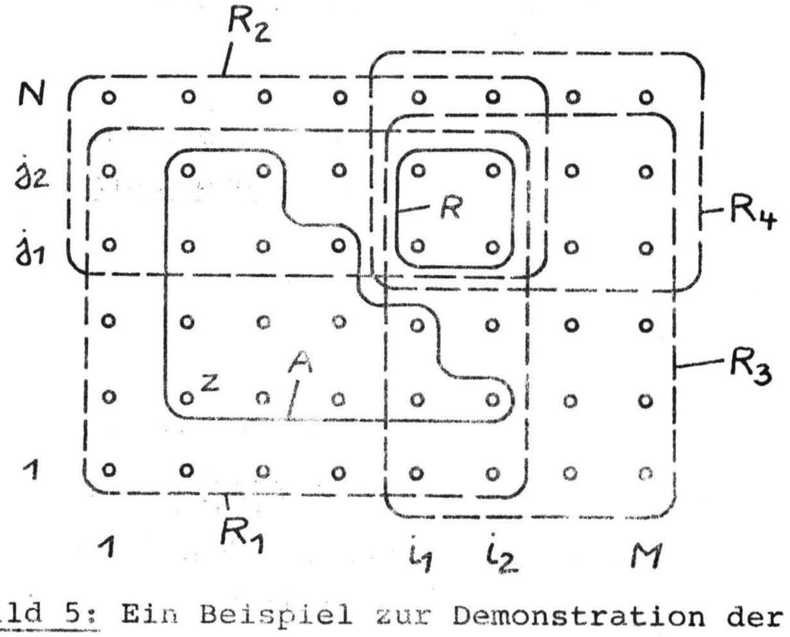



Bild 5: Ein Beispiel zur Demonstration der Aussage des Lemmas und der Hilfsbehauptung.

Nun zum Beweis des Lemmas:
Da A nicht leer und kartesisch sternförmig ist, besitzt A einen Zentralpunkt $z \in A$. Wegen $R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4 = \mathbb{N}^2_{M\times N}$ gilt für ein $k \in \{1,2,3,4\}$: $z \in R_k$. Sei beispielsweise $z \in R_1$.
Dann ist $R_4 \cap A = \emptyset$. Denn angenommen es gibt ein $w \in R_4 \cap A$.
Wegen der kartesischen Sternförmigkeit von A bezüglich z gilt dann: $R(w,z) \subset A$ und somit wegen $A \cap R = \emptyset$:
$R(w,z) \cap R = \emptyset$.
Zufolge der obigen Behauptung gilt aber wegen $z \in R_1$ und
$w \in R_4$: $\qquad R(w,z) \cap R \neq \emptyset$.
Dies ist ein Widerspruch. Also war die obige Annahme falsch, d.h., es ist $R_4 \cap A = \emptyset$.
In den anderen möglichen Fällen, $z \in R_2$, $z \in R_3$ oder $z \in R_4$, verläuft der Beweis ganz analog.
Damit ist das Lemma (4.18) bewiesen.

(4.19) Lemma

Für alle nichtleeren und kartesisch sternförmigen $A \subset \mathbb{N}^2_{M\times N}$
gilt: $\qquad C_A \cap A \neq \emptyset$.

Beweis

Sei $A \subset \mathbb{N}^2_{M\times N}$ eine beliebige nichtleere, kartesisch sternförmige Menge. Sei weiter
$R := C_A \cap \mathbb{N}^2_{M\times N} = R\,((i_1,j_1),(i_2,j_2)) \subset \mathbb{N}^2_{M\times N}$
und $R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_4$ wie im vorhergehenden Lemma (4.18).

Widerspruchsbeweis: Angenommen, es sei $C_A \cap A = R \cap A = \emptyset$.
Zufolge Lemma (4.18) ist dann der Durchschnitt von A mit einem der Rechtecke $R_1$, $R_2$, $R_3$ oder $R_4$ leer. Sei beispielsweise $R_1 \cap A = \emptyset$. Wegen $[i_1, i_2] = C_{A,1} \cap [1,M]$ gilt zufolge Lemma (4.15.1)

$$\sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i \leq i_2}} t_{i,j} \geq \sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i \leq i_1}} t_{i,j} \geq \frac{1}{2}\, S_A$$

und hiermit folgt wegen $R_1 \cap A = \emptyset$: $\displaystyle\sum_{\substack{(i,j)\in A \\ j \geq j_2+1}} t_{i,j} \geq \frac{1}{2}\, S_A$.

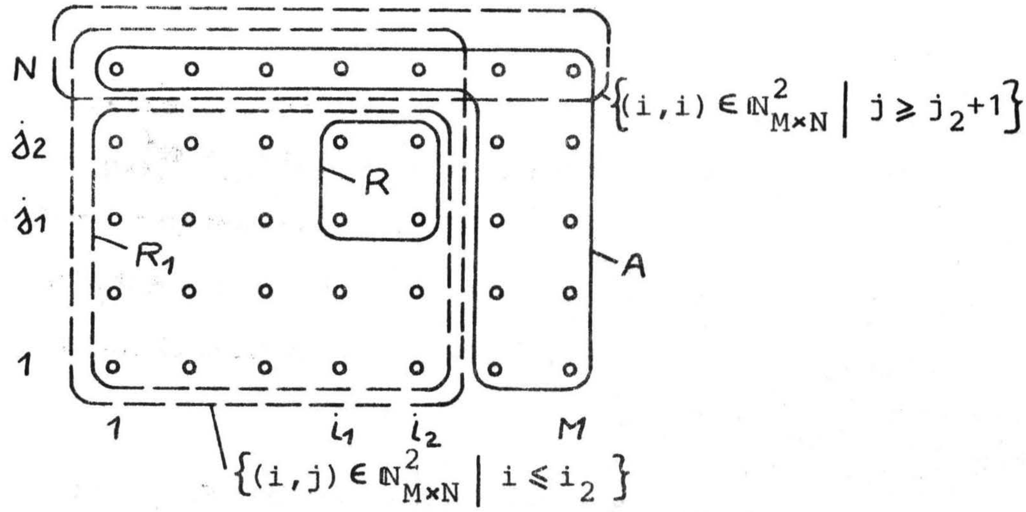



Bild 6: Ein Beispiel zur Demonstration des Beweisganges.

Wegen $[j_1, j_2] = C_{A,2} \cap [1,N]$ gilt aber zufolge Lemma (4.15.2)

$$j_2 = \max \left\{ k \in \mathbb{N}_N \;\middle|\; \sum_{\substack{(i,j)\in A \\ j \geq k}} t_{i,j} \geq \frac{1}{2} S_A \right\}$$

und damit : $j_2 \geq j_2+1$. Dies ist aber ein Widerspruch.

Auf analoge Weise erhält man auch für $R_2 \cap A = \emptyset$,

$R_3 \cap A = \emptyset$ oder $R_4 \cap A = \emptyset$ einen Widerspruch.

Also war die obige Annahme $C_A \cap A = \emptyset$ falsch, d.h. es gilt:

$C_A \cap A \neq \emptyset$.

Damit ist das Lemma (4.19) bewiesen.

(4.20) Definition

Für alle nichtleeren und kartesisch sternförmigen Mengen $A \subset \mathbb{N}^2_{M\times N}$ sei definiert: $g(A) := 1 - \inf(C_A \cap A)$

Hierbei ist 1-inf das Infinum bezüglich der lexikographischen Ordnung in $\mathbb{N}^2$.

(4.21) Lemma

Für alle nichtleeren und kartesisch sternförmigen Mengen $A \subset \mathbb{N}^2_{M\times N}$ und alle $z \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$f_A(g(A)) \leqslant f_A(z)$.

Beweis

Sei $A \subset \mathbb{N}^2_{M\times N}$ eine beliebige nichtleere, kartesisch sternförmige Menge und $z \in \mathbb{R}^2$ beliebig.
Zufolge der Definition (4.20) ist $g(A) \in C_A$ und damit gilt zufolge der Definition (4.7):

$$f_A(g(A)) = \inf_{z' \in \mathbb{R}^2} f_A(z')$$

Hiermit gilt dann wegen

$$\inf_{z' \in \mathbb{R}^2} f_A(z') \leqslant f_A(z)$$

natürlich auch

$f_A(g(A)) \leqslant f_A(z)$.

Damit ist das Lemma (4.21) bewiesen.

(4.22) Definition

Sei $n \in \mathbb{N}_{MN}$. Dann bezeichne $\mathfrak{A}^s_n$ die Gesamtheit aller Anschlußbereichsvektoren $(B_1, B_2, \ldots, B_n) \in \mathfrak{A}_n$, für die alle $B_i$ $(i \in \mathbb{N}_n)$ katesisch sternförmig sind.

$$\mathfrak{A}^s_n := \left\{ (B_1, B_2, \ldots, B_n) \in \mathfrak{A}_n \,\middle|\, \forall i \in \mathbb{N}_n : B_i \text{ ist kartesisch sternförmig} \right\}.$$

(4.23) Lemma

Für alle $n \in \mathbb{N}_{MN}$ und alle $(B_1, B_2, \ldots, B_n) \in \mathfrak{A}^s_n$ gilt:

$(g(B_1), g(B_2), \ldots, g(B_n)) \in \mathcal{L}_n$.

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}_{MN}$ und $(B_1, B_2, \ldots, B_n) \in \mathfrak{A}_n^s$ beliebig.
Zufolge der Definition (4.20) gilt für alle $i \in \mathbb{N}_n$: $g(B_i) \in B_i$
Seien jetzt $i, j \in \mathbb{N}_n$ mit $i \neq j$. Dann ist $B_i \cap B_j = \emptyset$ und somit gilt: $g(B_i) \neq g(B_j)$. Also ist der Vektor $(g(B_1), g(B_2), \ldots, g(B_n)) \in \mathcal{L}_n$.
Damit ist das Lemma (4.23) bewiesen.

(4.24) Definition

Für jedes $n \in \mathbb{N}_{MN}$ sei definiert:

$$g_n : \mathfrak{A}_n^s \longrightarrow \mathcal{L}_n$$
$$(B_1, B_2, \ldots, B_n) \longmapsto g_n(B_1, B_2, \ldots, B_n) := = (g(B_1), g(B_2), \ldots, g(B_n)).$$

(4.25) Satz

Für alle $n \in \mathbb{N}_{MN}$, für alle $B \in \mathfrak{A}_n^s$ und für alle $v \in \mathcal{L}_n$ gilt:
$L_n(g_n(B), B) \leq L_n(v, B)$.

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}_{MN}$, $B = (B_1, B_2, \ldots, B_n) \in \mathfrak{A}_n^s$ und $v = (v_1, v_2, \ldots v_n) \in \mathcal{L}_n$ beliebig. Dann ist

$$L_n(g_n(B), B) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{(i,j) \in B_k} t_{i,j} \cdot d_1(g(B_k), (i,j)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_{B_k}(g(B_k)) \qquad \text{und}$$

$$L_n(v, B) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{(i,j) \in B_k} t_{i,j} \cdot d_1(v_k, (i,j)) = \sum_{k=1}^{n} f_{B_k}(v_k).$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}_n$ ist $B_k \subset \mathbb{N}^2_{M\times N}$ nichtleer und kartesisch sternförmig sowie $v_k \in \mathbb{R}^2$. Zufolge Lemma (4.21) gilt daher für alle $k \in \mathbb{N}_n$:

$$f_{B_k}(g(B_k)) \leq f_{B_k}(v_k).$$

Hiermit folgt jetzt natürlich sofort die Ungleichung

$$L_n(g_n(B),B) \leq L_n(v,B).$$

Damit ist der Satz (4.25) bewiesen.

<u>(4.26) Korollar</u>

Für alle $n \in \mathbb{N}_{MN}$ und alle $B \in \mathfrak{A}^s_n$ ist $g_n(B) \in \mathcal{L}_n$ und damit gilt:

$$L_n(g_n(B),B) = \min_{v \in \mathcal{L}_n} L_n(v,B).$$

<u>(4.27) Bemerkung</u>

Aufgrund der Aussage dieses Korollars (4.26) liefert die Abbildung $g_n : \mathfrak{A}^s_n \longrightarrow \mathcal{L}_n$ eine Lösung der Aufgabe 7 (3.24), sofern nur $B \in \mathfrak{A}^s_n \subset \mathfrak{A}_n$ ist.

<u>(4.28) Definition</u>

Für alle $n \in \mathbb{N}_{MN}$ werde definiert:

$$f_n : (\mathbb{R}^2)^n \longrightarrow \mathfrak{Z}_n$$
$$z \longmapsto f_n(z) := (f_{1,n}(z),\ f_{2,n}(z), \ldots,\ f_{n,n}(z))$$

Die Mengen $f_{1,n}(z),\ f_{2,n}(z),\ \ldots, f_{n,n}(z) \in \mathfrak{P}(\mathbb{N}^2_{M\times N})$ der Zerlegung $f_n(z) \in \mathfrak{Z}_n$ werden hierbei für $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in (\mathbb{R}^2)^n$ wie folgt rekursiv erklärt:

$$f_{1,n}(z) := \left\{ w \in \mathbb{N}^2_{M\times N} \,\middle|\, \forall i \in \{2,\ldots,n\} : d_1(z_1,w) \leq d_1(z_i,w) \right\}$$
$$\vdots$$

$$f_{k,n}(z) := \left\{ w \in \mathbb{N}^2_{M\times N} \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} f_{l,n}(z) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall\, i \in \{k+1,\dots,n\}: \\ d_1(z_k,w) \leqslant d_1(z_i,w) \end{array} \right\}$$

$$\vdots$$

$$f_{n,n}(z) := \mathbb{N}^2_{M\times N} \setminus \bigcup_{l=1}^{n-1} f_{l,n}(z).$$

(4.29) Lemma

Für alle $n \in \mathbb{N}_{MN}$ , für alle $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in (\mathbb{R}^2)^n$, für alle $i,j \in \mathbb{N}_n$ und für alle $w \in f_{i,n}(z)$ gilt:

$d_1(z_i ,w) \leqslant d_1(z_j , w)$.

Ist außerdem $j < i$, dann gilt sogar

$d_1(z_i ,w) < d_1(z_j , w)$.

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}_{MN}$ , $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in (\mathbb{R}^2)^n$, $i,j \in \mathbb{N}_n$ sowie $w \in \mathbb{N}^2_{M\times N}$ beliebig und gelte: $w \in f_{i,n}(z)$.

1.Fall: $i = j$

In diesem Fall ist $d_1(z_i ,w) = d_1(z_j ,w)$ und damit gilt natürlich auch die Ungleichung

$d_1(z_i ,w) \leqslant d_1(z_j ,w)$.

2. Fall $i < j$

Wegen $w \in f_{i,n}(z)$ gilt in diesem Fall zufolge der Definition der Menge $f_{i,n}(z)$ in der Definition (4.28):

$d_1(z_i , w) \leqslant d_1(z_j , w)$.

3. Fall $j < i$

Wegen $w \in f_{i,n}(z)$ ist $w \notin f_{j,n}(z)$ und damit gilt zufolge der Definition der Menge $f_{j,n}(z)$ in der Definition (4.28):

$d_1(z_i ,w) < d_1(z_j , w)$.

Damit ist das Lemma (4.29) bewiesen.

(4.30) Satz

Für alle $n \in \mathbb{N}_{MN}$ , für alle $z \in (\mathbb{R}^2)^n$ und für alle $Z \in \mathfrak{Z}_n$ gilt:
$L_n(z, f_n(z)) \leqslant L_n(z,Z)$.

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}_{MN}$ , $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in (\mathbb{R}^2)^n$ und
$Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) \in \mathfrak{Z}_n$ beliebig. Dann ist

$$L_n(z,f_n(z)) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{(i,j)\in f_{k,n}(z)} t_{i,j} \cdot d_1(z_k ,(i,j))$$

und

$$L_n(z,Z) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{(i,j)\in Z_k} t_{i,j} \cdot d_1(z_k ,(i,j)).$$

Widerspruchsbeweis: Angenommen,es sei $L_n(z,f_n(z)) > L_n(z,Z)$.
Da $(f_{1,n}(z), f_{2,n}(z), \ldots, f_{n,n}(z))$ und $(Z_1, Z_2,\ldots,Z_n)$
Zerlegungen des Netzrasters $\mathbb{N}^2_{M\times N}$ sind, gibt es dann ein
$w \in \mathbb{N}^2_{M\times N}$ , ein $k \in \mathbb{N}_n$ mit $w \in f_{k,n}(z)$ und ein $l \in \mathbb{N}_n$ mit $w \in Z_l$ ,
so daß gilt: $d_1(z_k ,w) > d_1(z_l , w)$.
Wegen $w \in f_{k,n}(z)$ gilt zufolge Lemma (4.29) aber andererseits
auch $d_1(z_k ,w) \leqslant d_1(z_l ,w)$ und damit liegt ein Widerspruch
vor. Also war die obige Annahme falsch, d.h. es gilt:
$L_n(z,f_n(z)) \leqslant L_n(z,Z)$.

Damit ist der Satz (4.30) bewiesen.

(4.31) Korollar

Für alle $n \in \mathbb{N}_{MN}$ , für ale $v \in \mathcal{L}_n$ und für alle $B \in \mathfrak{A}_n$ gilt:
$L_n(v,f_n(v)) \leqslant L_n(v,B)$.

(4.32) Korollar

Für alle $n \in \mathbb{N}_{MN}$ und für alle $v \in \mathcal{L}_n$ gilt:

$$L_n(v, f_n(v)) \leq \min_{B \in \mathfrak{A}_n} L_n(v, B).$$

(4.33) Korollar

Für alle $n \in \mathbb{N}_{MN}$, für alle $v \in \mathcal{L}_n$ und für alle $B \in \mathfrak{A}_n^s$ gilt:

$$L_n(v, f_n(v)) \leq L_n(v, B).$$

(4.34) Bemerkung

Aufgrund der Aussage des letzten Korollars (4.32) liefert die Abbildung $f_n : \mathcal{L}_n \to \mathfrak{Z}_n$ unter Umständen eine Lösung der Aufgabe 4 (3.15). Denn sei $n \in \mathbb{N}_{MN}$ sowie $v \in \mathcal{L}_n$ gegeben und sei $f_n(v) \in \mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{Z}_n$, dann gilt zufolge Korollar (4.32):

$$L_n(v, f_n(v)) = \min_{B \in \mathfrak{A}_n} L_n(v, B).$$

(4.35) Satz

Für alle $n \in \mathbb{N}_{MN}$ und für alle $v \in \mathcal{L}_n$ ist $f_n(v) \in \mathfrak{A}_n$ und es gilt:

$$L_n(v, f_n(v)) = \min_{B \in \mathfrak{A}_n} L_n(v, B).$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}_{MN}$ und $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathcal{L}_n$ beliebig. Dann ist zufolge der Definition (4.28) $f_n(v) = (f_{1,n}(v), f_{2,n}(v), \ldots, f_{n,n}(v)) \in \mathfrak{Z}_n$ und es gilt für alle $i \in \mathbb{N}_n$: $v_i \in f_{i,n}(v)$.
Damit ist aber $f_{i,n}(v) \neq \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}_n$ und somit $f_n(v) \in \mathfrak{A}_n$. Zufolge Korollar (4.32) und zufolge der Bemerkung (4.34) gilt hiermit:

$$L_n(v, f_n(v)) = \min_{B \in \mathfrak{A}_n} L_n(v, B).$$

Damit ist der Satz (4.35) bewiesen.

(4.36) Bemerkung

Es sei angemerkt, daß der letzte Satz (4.35) nur deshalb so einfach zu beweisen war, weil an die Elemente von $\mathfrak{A}_n$ so geringe Anforderungen gestellt werden. Siehe hierzu auch die Bemerkungen in (2.4). Wie im folgenden gezeigt wird, hat die Abbildung $f_n: (\mathbb{R}^2)^n \longrightarrow \mathfrak{Z}_n$ noch eine weitere Eigenschaft, die sich als günstig erweisen wird.

(4.37) Lemma

Für alle $n \in \mathbb{N}_{MN}$, für alle $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathcal{L}_n$ und für alle $k \in \mathbb{N}_n$ gilt: $f_{k,n}(v)$ ist bezüglich $v_k$ kartesisch sternförmig.

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}_{MN}$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathcal{L}_n$ und $k \in \mathbb{N}_n$ beliebig. Es ist zu zeigen, daß für alle $w \in f_{k,n}(v)$ gilt: $R(w, v_k) \subset f_{k,n}(v)$.

Sei also $w \in f_{k,n}(v)$ und $u \in R(w, v_k)$ beliebig. Dann gilt: $d_1(w,u) + d_1(u,v_k) = d_1(w,v_k)$.

Widerspruchsbeweis: Angenommen, es sei $u \notin f_{k,n}(v)$. Dann gibt es ein $l \in \mathbb{N}_n$ mit $l \neq k$ und $u \in f_{l,n}(v)$.

1. Fall $l < k$

Zufolge Lemma (4.29) gilt dann wegen $w \in f_{k,n}(v)$ einerseits $d_1(w,v_k) < d_1(w,v_l)$ und wegen $u \in f_{l,n}(v)$ andererseits $d_1(u,v_l) \leq d_1(u,v_k)$. Mit Hilfe dieser letzten Ungleichung, der Dreiecksungleichung und der obigen Beziehung $d_1(w,u) + d_1(u,v_k) = d_1(w,v_k)$ folgt weiter:

$d_1(w,v_l) \leq d_1(w,u) + d_1(u,v_l) \leq d_1(w,u) + d_1(u,v_k) = d_1(w,v_k)$.

Dies ist aber ein Widerspruch zur obigen Ungleichung $d_1(w,v_k) < d_1(w,v_l)$.

2. Fall $l > k$

Zufolge Lemma (4.29) gilt dann wegen $w \in f_{k,n}(v)$ einerseits $d_1(w,v_k) \leq d_1(w,v_l)$ und wegen $u \in f_{l,n}(v)$ andererseits $d_1(u,v_l) < d_1(u,v_k)$. Mit Hilfe dieser letzten Ungleichung, der Dreiecksungleichung und der obigen Beziehung $d_1(w,u) + d_1(u,v_k) = d_1(w,v_k)$ folgt weiter:

$d_1(w,v_l) \leq d_1(w,u) + d_1(u,v_l) < d_1(w,u) + d_1(u,v_k) = d_1(w,v_k)$.

Dies ist aber ein Widerspruch zur obigen Ungleichung $d_1(w,v_k) \leq d_1(w,v_l)$.

In jedem Fall erhält man also einen Widerspruch. Damit war die obige Annahme falsch, d.h. es gilt: $u \in f_{k,n}(v)$.

Damit ist das Lemma (4.37) bewiesen.

(4.38) Lemma

Für alle $n \in \mathbb{N}_{MN}$ und für alle $v \in \mathcal{L}_n$ gilt: $f_n(v) \in \mathfrak{A}_n^s$ und $g_n(f_n(v)) \in \mathcal{L}_n$.

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}_{MN}$ und $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathcal{L}_n$ beliebig.

Zufolge Lemma (4.37) gilt dann für alle $k \in \mathbb{N}_n$: $f_{k,n}(v)$ ist bezüglich $v_k$ kartesisch sternförmig. Also gilt:

$f_n(v) = (f_{1,n}(v), f_{2,n}(v), \ldots, f_{n,n}(v)) \in \mathfrak{A}_n^s$

und somit ist aufgrund der Definition der Abbildung $g_n$ in der Definition (4.24) $g_n(f_n(v)) \in \mathcal{L}_n$ .

Damit ist das Lemma (4.38) bewiesen.

(4.39) Definition

Aufgrund des Ergebnisses von Lemma (4.38) kann für jedes $n \in \mathbb{N}_{MN}$ definiert werden:

(1) $h_n : \mathcal{L}_n \longrightarrow \mathcal{L}_n$

$$v \longmapsto h_n(v) := g_n(f_n(v)).$$

(2) $\mathscr{L}_n : \mathcal{L}_n \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$v \longmapsto \mathscr{L}_n(v) := L_n(v, f_n(v)).$$

(4.40) Satz

Für alle $n \in \mathbb{N}_{MN}$ und alle $v \in \mathcal{L}_n$ gilt:

$\mathscr{L}_n(h_n(v)) \leq \mathscr{L}_n(v)$.

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}_{MN}$ und $v \in \mathcal{L}_n$ beliebig. Dann ist zufolge Lemma (4.38) $f_n(v) \in \mathfrak{A}_n^S$, $h_n(v) = g_n(f_n(v)) \in \mathcal{L}_n$ und es gilt

$$\mathscr{L}_n(v) = L_n(v, f_n(v))$$

sowie

$$\mathscr{L}_n(h_n(v)) = L_n(h_n(v), f_n(h_n(v))) =$$

$$= L_n(g_n(f_n(v)), f_n(g_n(f_n(v)))).$$

Zufolge Satz (4.25) gilt nun

$$L_n(g_n(f_n(v)), f_n(v)) \leq L_n(v, f_n(v))$$

und zufolge Korollar (4.33)

$$L_n(g_n(f_n(v)), f_n(g_n(f_n(v)))) \leq L_n(g_n(f_n(v)), f_n(v)).$$

Zusammen gilt also $\mathscr{L}_n(h_n(v)) \leq \mathscr{L}_n(v)$.

Damit ist der Satz (4.40) bewiesen.

(4.41) Satz

Für alle $n \in \mathbb{N}_{MN}$ und alle $\tilde{v}^* \in \mathcal{L}_n$ mit $\mathscr{L}_n(\tilde{v}^*) = \min_{v \in \mathcal{L}_n} \mathscr{L}_n(v)$ gilt:

$$\mathscr{L}_n(\tilde{v}^*) = \min_{\substack{v \in \mathcal{L}_n \\ B \in \mathfrak{A}_n}} L_n(v, B) \ .$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}_{MN}$ und $\tilde{v}^* \in \mathcal{L}_n$ beliebig mit $\mathcal{L}_n(\tilde{v}^*) = \min_{v \in \mathcal{L}_n} \mathcal{L}_n(v)$.

Zufolge Satz (4.35) gilt für alle $v \in \mathcal{L}_n$

$\mathcal{L}_n(v) = L_n(v, f_n(v)) = \min_{B \in \mathfrak{A}_n} L_n(v, B)$.

Hiermit folgt nun:

$$\mathcal{L}_n(\tilde{v}^*) = \min_{v \in \mathcal{L}_n} \mathcal{L}_n(v) = \min_{v \in \mathcal{L}_n} L_n(v, f_n(v)) = \min_{v \in \mathcal{L}_n} \min_{B \in \mathfrak{A}_n} L_n(v, B) =$$

$$= \min_{\substack{v \in \mathcal{L}_n \\ B \in \mathfrak{A}_n}} L_n(v, B).$$

Damit ist der Satz (4.41) bewiesen.

(4.42) Bemerkung

Für jedes $n \in \mathbb{N}_{MN}$ und jedes $\tilde{v}^* \in \mathcal{L}_n$ mit $\mathcal{L}_n(\tilde{v}^*) = \min_{v \in \mathcal{L}_n} \mathcal{L}_n(v)$

ist also $\tilde{v}^* \in \mathcal{L}_n$ und $\tilde{B}^* = f_n(\tilde{v}^*) \in \mathfrak{A}_n^s$ eine Lösung der

Aufgabe 8 (3.27).

Anstelle der Aufgabe 8 (3.27) betrachte ich daher die folgende einfachere Aufgabe 9 und anstelle der Aufgabe 8 a (3.29) die folgende einfachere Aufgabe 9 a.

(4.43) Aufgabe 9

Gegeben: $t \in \mathbb{N}_0^{M \times N}$, $n \in \mathbb{N}_{MN}$.

Gesucht: $\tilde{v}^* \in \mathcal{L}_n$ mit $\mathcal{L}_n(\tilde{v}^*) = \min_{v \in \mathcal{L}_n} \mathcal{L}_n(v)$.

(4.44) Aufgabe 9 a

Gegeben: $t \in \mathbb{N}_0^{M \times N}$, $n \in \mathbb{N}_{MN}$.

Gesucht: $\tilde{v} \in \mathcal{L}_n$ mit $\mathcal{L}_n(\tilde{v}) \approx \min_{v \in \mathcal{L}_n} \mathcal{L}_n(v)$.

(4.45) Algorithmus 6

Lösung der Aufgabe 9 a mit Hilfe der Abbildung $h_n : \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{L}_n$ .

Step 0: Start

Step 1: Eingabe von $t \in \mathbb{N}_0^{M \times N}$ und $n \in \mathbb{N}_{MN}$ .

Step 2: Wahl von $v \in \mathcal{L}_n$

Step 3: $U := \emptyset$

Step 4: $U := U \cup \{v\}$

Step 5: $v := h_n(v)$

Step 6: Wenn $v \notin U$, dann gehe nach Step 4.

Step 7: $\tilde{v} := v$

Step 8: Stop

(4.46) Satz

Der Algorithmus 6 ist ausführbar.

Beweis

Teil 1: Step 2

Zufolge $n \in \mathbb{N}_{MN}$ ist $\mathcal{L}_n \neq \emptyset$. Aus diesem Grunde ist die Wahl eines $v \in \mathcal{L}_n$ möglich.

Teil 2: Schleife.

Behauptung : Die Schleife wird nur endlich oft durchlaufen.

Nachweis durch Widerspruchsbeweis: Angenommen, die Schleife wird unendlich oft durchlaufen. Dann ist card $U = \infty$ .
Andererseits ist aber card $\mathcal{L}_n \in \mathbb{N}$ und es gilt: $U \subset \mathcal{L}_n$ .

Dies ist ein Widerspruch.

Damit ist der Satz (4.46) bewiesen.

(4.47) Bemerkung

Über die praktische Ausführbarkeit des Algorithmus 6 sagt der Satz (4.46) relativ wenig aus. So ist beispielsweise die Wahl des Start-Lagevektors weiterhin völlig frei. Und auch die Schleifenorganisation ist noch viel zu aufwendig. Diese Schleifenorganisation könnte aber um vieles einfacher aufgebaut werden, wenn lediglich Fixpunkte der Abbildung $h_n : \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{L}_n$ zu berechnen wären.

Da der Algorithmus 6, von einem Start-Lagevektor ausgehend, in jedem Schleifendurchlauf einen neuen Lagevektor $v \in \mathcal{L}_n$ berechnet und hierbei zufolge Satz (4.40) den Wert $\mathscr{L}_n(v)$ des Gütefunktionals $\mathscr{L}_n : \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{R}_+$ nicht vergrößert, sagt man auch, daß der Algorithmus 6 ein "lokales Optimum" des Anschlußnetzes ermittelt.

(4.48) Definitionen

Sei $n \in \mathbb{N}_{MN}$ .

(1) Ein $\tilde{v}^* \in \mathcal{L}_n$ heiße optimal, wenn gilt:

$$\mathscr{L}_n(v\ ) = \min_{v \in \mathcal{L}_n} \mathscr{L}_n\ (v).$$

Die Gesamtheit aller optimalen $\tilde{v}^* \in \mathcal{L}_n$ werde mit $\tilde{\mathcal{L}}^*_n$ bezeichnet. $\tilde{\mathcal{L}}^*_n := \left\{ \tilde{v}^* \in \mathcal{L}_n \;\middle|\; \mathscr{L}_n(v\ ) = \min_{v \in \mathcal{L}_n} \mathscr{L}_n(v) \right\}$

(2) Ein $v^o \in \mathcal{L}_n$ heiße ein Fixpunkt der Abbildung $h_n : \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{L}_n$, wenn gilt: $v^o = h_n(v^o)$.

Die Gesamtheit aller Fixpunkte der Abbildung $h_n : \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{L}_n$ werde mit $\mathcal{L}^o_n$ bezeichnet.

$$\mathcal{L}^o_n := \left\{ v^o \in \mathcal{L}_n \;\middle|\; v^o = h_n(v^o) \right\}$$

(4.49) Bemerkung

Zunächst ist klar, daß für jedes $n \in \mathbb{N}_{MN}$ die Menge $\tilde{\mathcal{L}}_n^*$ nicht leer ist (die Menge $\mathcal{L}_n$ ist endlich). Es ist aber noch offen, ob auch $\mathcal{L}_n^o$ für jedes $n \in \mathbb{N}_{MN}$ nicht leer ist. Mehrere kleinere durchgerechnete Beispiele zeigten jedoch, daß die Menge $\mathcal{L}_n^o$ stets mindestens ein Element enthielt (zumeist enthielt die Menge $\mathcal{L}_n^o$ sogar relativ viele Elemente).

Die Mengen $\tilde{\mathcal{L}}_n^*, \mathcal{L}_n^o$ selber und auch die Relationen zwischen diesen beiden Mengen sind also noch genauer zu erforschen.

## 5. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Hier im Rahmen dieser Schlußbemerkungen soll kurz darauf eingegangen werden, wie die Untersuchungen zum Problem der Kostenoptimierung von Nachrichtensystemen mit zentraler Vermittlung weiterzuführen sind.

In Verbindung mit den verschiedenen Optimierungsaufgaben des 3. Abschnittes ist es von großem Interesse, wie bei realen Nachrichtensystemen die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Termen der Kostenfunktion aus (2.13) geartet sind. Denn die Frage, ob die verschiedenen Näherungslösungen der vereinfachten Optimierungsaufgaben tatsächlich auch eine brauchbare Näherungslösung der Aufgabe 1 (3.2) ergeben, ist vermutlich nur bei einer genauen Kenntnis dieser Zusammenhänge zu beantworten. Aus diesem Grunde sollen als nächstes die Kostenrelationen in großen Fernsprechortsnetzen mit mehreren Vermittlungsstellen genauer analysiert werden. Diese großen Fernsprechortsnetze sind für die Analyse der Kostenrelationen sicherlich am besten geeignet, denn einerseits liegen über sie die ausführlichsten Informationen vor (siehe beispielsweise in [2, 9, 10, 14] ), und andererseits ist das Hauptziel der gesamten Überlegungen doch die Entwicklung eines Optimierungsverfahrens für Fernsprechsysteme (und Fernsprechortsnetze mit mehreren Vermittlungsstellen sind nun einmal in jedem Fernsprechsystem vorhanden).

Auch bei der Untersuchung des Algorithmus zur "lokalen Optimierung" des Anschlußnetzes im 4. Abschnitt sind einige Fragen offen geblieben. Da sind zum einen die Fragen nach der Wahl eines günstigen Start-Lagevektors, nach der Vereinfachung der Schleifenorganisation und nach dem Zusammenhang zwischen den Mengen $\mathcal{L}_n^*$ und $\mathcal{L}_n^o$. Zum anderen aber auch die Frage nach einer Modifikation des angegebenen Algorithmus, so daß sich die obigen drei Fragen eventuell leichter beantworten lassen. Im Anschluß an die Analyse der Kostenrelationen in Fernsprechortsnetzen soll an der Beantwortung dieser Fragen weitergearbeitet werden.

## 6. DIE WICHTIGSTEN FORMELZEICHEN

$A$ Verkehrsangebot 14

$A^k$, $A_x^k$, $A_x^k(H)$, $A_x^{k,l}(H)$, $A_{x,y}^{k,l}$ Verkehrsangebot 13

$\alpha_k$ reelle Konstante 15

$\mathfrak{A}_n$ Menge der Anschlußbereichsvektoren 7

$\mathfrak{A}_n'$ Menge spezieller Anschlußbereichsvektoren, Teilmenge von $\mathfrak{A}_n$ 8

$\mathfrak{A}_n^s$ Menge spezieller Anschlußbereichsvektoren, Teilmenge von $\mathfrak{A}_n$ 51

$B$ Anschlußbereichsvektor 7

$\beta^{k,l}$ reelle Konstante 16

$\beta_{x,y}^{k,l}$ reelle Konstante 15

card Kardinalzahl, Anzahl der Elemente 61

$C_A$ Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ 37

$C_{A,1}$, $C_{A,2}$ Teilmengen von $\mathbb{R}$ 37

$\gamma_{x,y}^l$ reelle Konstante 15

$d$ Metrik ( entweder $d_1$ oder $d_2$ ) 9

$d_1$ kartesische Metrik 9

$d_2$ euklidische Metrik 9

$\frac{d}{dx}$ Differentialoperator 35

$\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ partieller Differentialoperator 35

$f_x^k$ Entfernungsfunktion 14

$f'$ Entfernungsfunktion 15

$f_A$, $\tilde{f}_{A,1}$, $\tilde{f}_{A,2}$ Abbildungen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ 32

$f_{A,1}$, $f_{A,2}$ Abbildungen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ 32

$f'_{A,1}$, $f'_{A,2}$ Ableitungen von $f_{A,1}$, $f_{A,2}$ 34

$f^{-1}_{A,1}$ Umkehrabbildung von $f_{A,1}$ 38

$f_n$ Abbildung von $(\mathbb{R}^2)^n$ in $\mathfrak{Z}_n$ 53

$f_{k,n}(z)$ Teilmenge von $\mathbb{N}^2_{M\times N}$ 53

$g_n$ Abbildung von $\mathfrak{A}^s_n$ in $\mathcal{L}_n$ 52

$g(A) = 1-\inf(C_A \cap A)$ reelle Zahl 50

$h$ Abmessung der Flächengrundeinheit 6

$h_1$ Länge der Flächengrundeinheit 5

$h_2$ Höhe der Flächengrundeinheit 5

$h_n$ Abbildung von $\mathcal{L}_n$ in $\mathcal{L}_n$ 59

$H$ Teilmenge von $\mathbb{N}^2_{M\times N}$ 12

$i$ natürliche Zahl 5

$i_1$, $i_2$ natürliche Zahlen 41

inf Infinum, größte untere Schranke 37

$id_{\mathbb{R}_+}$ identische Abbildung von $\mathbb{R}_+$ 10

$j$ natürliche Zahl 5

$j_1$, $j_2$ natürliche Zahlen 41

$K_n$ Kostenfunktion von $(\mathbb{R}^2)^n \times \mathfrak{Z}_n \times \mathfrak{P}_n$ in $\mathbb{R}_+$ 20

$l$ Verbindungsleitungsmatrix 18

$l_{i,j}$ Komponente der Verbindungsleitungsmatrix $l$, nicht-negative ganze Zahl 18

$l_o$, $l_{gr}$ reelle Konstanten 9

$l^*$ spezielle Verbindungsleitungsmatrix 21

$l^*(n)$, $l^*(n^*)$ spezielle Verbindungsleitungsmatrizen 23

$\tilde{I}$, $\tilde{I}(n)$ spezielle Verbindungsleitungsmatrizen 23

$\tilde{I}^*$ spezielle Verbindungsleitungsmatrix 24

$\overset{\approx}{I}$ spezielle Verbindungsleitungsmatrix 26

l-inf Infinum bezüglich der lexikographischen Ordnung in $\mathbb{N}^2$ 50

$\mathscr{L}_n$ Kostenfunktion von $\mathcal{L}_n$ in $\mathbb{R}_+$ 59

$\mathcal{L}_n$ Menge der Lagevektoren 7

$\tilde{\mathcal{L}}_n^*$, $\mathcal{L}_n^o$ spezielle Mengen von Lagevektoren, Teilmengen von $\mathcal{L}_n$ 62

min Minimum 21

M Länge des Netzrasters, natürliche Zahl 5

n Anzahl der Vermittlungsstellen 7

$n^*$ spezielle Anzahl der Vermittlungsstellen 21

$\tilde{n}$ spezielle Anzahl der Vermittlungsstellen 23

N Höhe des Netzrasters, natürliche Zahl 5

$\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen 7

$\mathbb{N}_o$ Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen 18

$\mathbb{N}_n$ Menge der natürlichen Zahlen $\leq n$ 7

$\mathbb{N}_q$ Menge der natürlichen Zahlen $\leq q$ 11

$\mathbb{N}_{MN}$ Menge der natürlichen Zahlen $\leq MN$ 8

$\mathbb{N}^2$ Menge der Paare natürlicher Zahlen 50

$\mathbb{N}^2_{M\times N}$ Menge der Paare natürlicher Zahlen $(i,j)$ mit $i \leq M$ und $j \leq N$ 5

$\mathbb{N}_o^{n\times n}$ Menge der $n$ mal $n$ Matrizen aus nichtnegativen ganzen Zahlen 18

$\mathbb{N}_o^{M\times N}$ Menge der $M$ mal $N$ Matrizen aus nichtnegativen ganzen Zahlen 6

$p_1$ Preisfunktion von $\mathbb{R}_+$ in $\mathbb{R}_+$ 9

$p_2$ Preisfunktion von $\mathbb{N}_o$ in $\mathbb{R}_+$ 19

$p_3$ Preisfunktion von $\mathbb{R}_+$ in $\mathbb{R}_+$ 19

$\mathcal{P}$ Potenzmenge, Gesamtheit aller Teilmengen 32

$\mathcal{P}(\mathbb{N}^2_{M\times N})$ Potenzmenge von $\mathbb{N}^2_{M\times N}$ 32

$(\mathcal{P}(\mathbb{N}^2_{M\times N}))^n$ Menge der n-Tupel von Elementen aus der Menge $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2_{M\times N})$ 32

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{R}^2$ Menge der Paare reeller Zahlen 5

$(\mathbb{R}^2)^n$ Menge der n-Tupel von Elementen aus $\mathbb{R}^2$ 7

$\mathbb{R}_+$ Menge der nichtnegativen reellen Zahlen 9

$\mathbb{R}_+^{n\times n}$ Menge der $n$ mal $n$ Matrizen aus nichtnegativen reellen Zahlen 18

$\mathbb{R}_+^{M\times N}$ Menge der $M$ mal $N$ Matrizen aus nichtnegativen reellen Zahlen 11

$(\mathbb{R}_+^{M\times N})^{M\times N}$ Menge der $M$ mal $N$ Matrizen mit Komponenten aus $\mathbb{R}_+^{M\times N}$ 11

$R(z_1,z_2)$ Rechteck, Teilmenge von $\mathbb{Z}^2$ 50

$\varrho$ reelle Konstante 20

sgn Signum-Funktion 34

$s_A$ nichtnegative ganze Zahl 39

$S(x;r)$ Sphäre in $\mathbb{N}^2_{M\times N}$ 14

$t$ Teilnehmerprofil 6

$t_{i,j}$ Komponente des Teilnehmerprofils $t$, nichtnegative ganze Zahl 6

$t_x$, $t_x^k$, $t(H)$, $t^k(H)$ Anzahl von Teilnehmern 12

$\mathcal{T}$ Menge aller Teilnehmer 11

$\mathcal{T}_x, \mathcal{T}^k$ spezielle Mengen von Teilnehmern, Teilmenge von $\mathcal{T}$ 11

$\mathcal{T}_x^k$ spezielle Menge von Teilnehmern, Teilmenge von $\mathcal{T}$ 12

v Lagevektor 7

$v^*$ spezieller Lagevektor 21

$v^*(n)$, $v^*(n^*)$ spezielle Lagevektoren 22

$\tilde{v}$, $\tilde{v}(n)$ spezielle Lagevektoren 23

$\tilde{v}^*$ spezieller Lagevektor 24

$\approx$
v spezieller Lagevektor 26

V Verkehrsprofil 11

$V_{x,y}$ Komponente des Verkehrsprofils V, nichtnegative reelle Zahl 11

$V_{x,y}^{k,l}$ Verkehrsangebot, nichtnegative reelle Zahl 14

$V_n$ Kostenfunktion von $(\mathbb{R}^2)^n \times \mathbb{N}_o^{n \times n}$ in $\mathbb{R}_+$ 19

$\mathcal{B}_n$ Menge der Verbindungsleitungsmatrizen 18

$\mathcal{B}_n(B)$ spezielle Menge von Verbindungsleitungsmatrizen, Teilmenge von $\mathcal{B}_n$ 19

W(B) Verkehrsmatrix 18

$W_{i,j}(B)$ Komponente der Verkehrsmatrix W(B), nichtnegative reelle Zahl 18

$\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Z}^2$ Menge der Paare ganzer Zahlen 47

$\mathcal{Z}_n$ Menge der Zerlegungen von $\mathbb{N}_{M \times N}^2$ 7

= ist gleich 5

$\neq$ ist ungleich 7

:= ist definitionsgemäß gleich 7

| | | |
|---|---|---|
| $\approx$ | ist ungefähr gleich | 15 |
| $\in$ | ist Element von | 6 |
| $\notin$ | ist nicht Element von | 24 |
| $\subset$ | ist Teilmenge von | 10 |
| $\cup$ | Vereinigung | 6 |
| $\cap$ | Durchschnitt | 6 |
| $\setminus$ | Mengendifferenz | 34 |
| $\times$ | kartesisches Mengenprodukt | 5 |
| $\emptyset$ | leere Menge | |
| $\{\ \}$ | Mengenklammer | 7 |
| $\forall$ | für alle, Allquantor | 7 |
| $\Rightarrow$ | impliziert | 7 |
| $\rightarrow$ | Abbildungspfeil | 9 |
| $\mapsto$ | Zuordnungspfeil | 9 |
| $\sum$ | Summenzeichen | 10 |
| $\lvert\cdot\rvert$ | Betrag einer Zahl | 9 |
| $\lvert\cdot\rvert$ | Anzahl der Elemente | 12 |
| $\lvert\cdot\rvert_1$ | Betragssummennorm | 9 |
| $\lvert\cdot\rvert_2$ | euklidische Norm | 9 |
| $[\cdot,\cdot]$ | abgeschlossenes Intervall | 5 |
| $(\cdot,\cdot)$ | Zahlenpaar | 6 |
| $(\cdot,\cdot)$ | offenes Intervall | 40 |
| $L_n$ | Kostenfunktion von $(\mathbb{R}^2)^n \times \mathfrak{Z}_n$ in $\mathbb{R}_+$ | 10 |

## 7. LITERATURVERZEICHNIS

[1] Anderberg, M. - Fried, T. - Rudberg, A.
Optimization of Exchange Locations and Boundaries in Local Telephone Networks
ITC 7, paper 424, Stockholm 1973

[2] Angrick, W.
Über den Ausbau und die Struktur der Fernsprech-Ortsnetze der Deutschen Bundespost
Jahrbuch des elektr. Fernmeldewesens 13 (1962), S. 352 - 385

[3] Bretschneider, G. - Goldbrunner, E.
Ein Beitrag zur Bestimmung der wirtschaftlich optimalen Lage von Ortsvermittlungsstellen mit Hilfe von Datenverarbeitungsanlagen
NTZ 19 (1966), S. 455 - 459

[4] Evers, R.
Analysis of Traffic Flows on Subscriber-Lines Dependent of Time and Subscriber-Class
ITC 8, paper 345, Melbourne 1976

[5] Evers, R. - Anders, E.
Untersuchung der Struktur des Verkehrsaufkommens von Fernsprechteilnehmern
Technischer Bericht Nr. 188, Heinrich-Hertz-Institut für Nachrichtentechnik, Berlin 1975

[6] Evers, R. - Hoffmann, R. - Ehlers, H. - Neumann, C.
Optimierung der Struktur dezentral vermittelnder Nachrichtensysteme auf der Grundlage flächenhafter Verkehrsprofile
Arbeitsbericht zum Forschungsvorhaben AZ Ev 12/1, Heinrich-Hertz-Institut für Nachrichtentechnik, Berlin 1976

[7] Hackbarth, K.-D.
Kostenoptimierung von Fernmeldenetzen, Teil I
Technischer Bericht FI 032 TBr 1, Forschungsinstitut beim FTZ der Deutschen Bundespost, 1975

[8] Krätzig, S.
Ein neues Verfahren zur Kostenoptimierung von Fernmeldenetzen, Teil I und Teil II
Der Fernmelde-Ingenieur 30 (1976), Heft 2 und Heft 3

[9] Kremer, H.
Ortsnetzplanung
Fachverlag Schiele & Schön GmbH, Berlin 1963

[10] Ochs, H.
Grundzüge der Linientechnik
Damm-Verlag KG, Goslar-Braunschweig 1968

[11] Rapp, Y.
Planning of Exchange Locations and Boundaries in Multi-Exchange Networks
Ericsson Technics 18 (1962), p. 91 - 113

[12] Rapp, Y.
Planung von Fernsprechnetzen mit mehreren Ämtern mittels der Datenverarbeitungsmaschine
Ericsson Review 39 (1962), S. 44 - 50 und S. 102 - 104

[13] Rapp, Y. - Ollus, Y.
Eine praktische Anwendung der Planung von Fernsprechnetzen mit mehreren Ämtern mittels der Datenverarbeitungsmaschine
Ericsson Review 39 (1962), S. 105 - 111

[14] Steinhardt, K.-H.
Handbuch für die Fernsprech-Ortsnetzplanung, Band 1 und Band 2
Allgemeine Elektricitäts-Gesellschaft AEG-Telefunken, Backnang 1967