

HEINRICH·HERTZ·INSTITUT FÜR SCHWINGUNGSFORSCHUNG  
BERLIN·CHARLOTTENBURG

# Technischer Bericht Nr. 81

Theoretische Grundlagen  
für das Auswuchten biegeelastischer Rotoren

von

Dipl.-Ing. KLARHOEFER

H 81

Berlin  
1 9 6 5

Theoretische Grundlagen für das Auswuchten  
biegeelastischer Rotoren

Zusammenfassung:

Liegt die Betriebsdrehzahl eines Maschinenläufers nicht weit unterhalb seiner ersten biegekritischen Drehzahl, dann treten beim Lauf des unausgewuchteten Rotors elastische Verformungen der Wellenachse auf, die beim Auswuchten berücksichtigt werden müssen. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, die an verschiedenen Stellen behandelten theoretischen Grundlagen für das Auswuchten eines solchen biegeelastischen Rotors zusammenfassend darzulegen und zu vervollständigen.

Im 1. Teil der Arbeit wird unter vereinfachenden Annahmen das Verhalten eines unwuchtigen Läufers bei verschiedenen Drehzahlen untersucht. Die durch eine Unwuchtbelegung erzwungene Wellenauslenkung läßt sich am übersichtlichsten darstellen, wenn man sie aus den Biege-Eigenfunktionen der Welle aufbaut.

Im 2. Teil wird das Auswuchten durch  $n$  Einzelunwuchten behandelt. Aus  $n$  Meßwerten (Lagerkräften, Wellenauslenkungen o.a.), die bei verschiedenen Drehzahlen gemessen werden, können durch Auflösen eines linearen Gleichungssystems die erforderlichen  $n$  Ausgleichsunwuchten berechnet werden.

Für die theoretische Ermittlung der dynamischen Einflußzahlen, die die Koeffizienten dieses Gleichungssystems darstellen, erweist sich das Berechnungsverfahren der Übertragungsmatrizen als geeignet. Dieses Verfahren wird zum Schluß etwas ausführlicher beschrieben.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

Der Bearbeiter:

gez. Klarhoefer

(Dipl.-Ing. Klarhoefer)

Der Abteilungsleiter

gez. P. Matthieu

(Prof.phil.P. Matthieu)

Der Institutsdirektor

gez. Rothert

(Prof.Dr.-Ing.G.Rothert)

Berlin-Charlottenburg, den 8. Januar 1965



## Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
1. Einleitung	1
2. Verhalten eines biegeelastischen, rotierenden Läufers	2
2.1 Voraussetzungen	2
2.2 Aufstellung der Bewegungsgleichung	2
2.3 Aufbau der Lösung aus Eigenfunktionen	5
3. Das Auswuchten	9
3.1 Forderungen	9
3.2 Meßgrößen	9
3.3 Praktische Auswuchtbedingungen	9
3.4 Aufeinanderfolgender Ausgleich der einzelnen Eigenformen	10
3.5 Gleichzeitiger Ausgleich der Gesamtunwucht	14
3.6 Ermittlung der dynamischen Einflußzahlen	16
3.6.1 Experimentelle Ermittlung durch Tarierläufe	16
3.6.2 Theoretische Ermittlung über die Eigenfunktionen	18
3.6.3 Theoretische Ermittlung mit Hilfe der Übertragungsmatrizen	21
4. Das Verfahren der Übertragungsmatrizen	22

## Zusammenstellung der wichtigsten verwendeten Formelzeichen

$x$	Koordinate längs der unverformten Wellenachse
$y, z$	raumfeste Koordinaten senkrecht zur $x$ -Achse
$v, w$	rotorfeste Koordinaten senkrecht zur $x$ -Achse
$\bar{y}(x, t) = y(x, t) + iz(x, t)$	Auslenkung der Wellenmitte im raumfesten Koordinatensystem
$\bar{v}(x) = v(x) + iw(x)$	Auslenkung der Wellenmitte im rotorfesten Koordinatensystem
$\bar{e}(x, t) = e_y(x, t) + ie_z(x, t)$	Schwerpunktsexzentrizität eines Wellenquerschnittes im raumfesten Koordinatensystem
$\bar{e}(x) = e_v(x) + ie_w(x)$	desgl. im rotorfesten Koordinatensystem
$\mu(x)$	Masse pro Längeneinheit der Welle
$\bar{u}(x) = \mu(x) \bar{e}(x)$	Unwucht pro Längeneinheit
$\bar{p}(x, t) = p_y(x, t) + ip_z(x, t)$	Belastung pro Längeneinheit im raumfesten Koordinatensystem
$\bar{p}(x) = p_v(x) + ip_w(x)$	desgl. im rotorfesten Koordinatensystem
$EI(x)$	Biegesteifigkeit der Welle
$\Omega$	Winkelgeschwindigkeit der Wellenrotation
$\omega_k$	$k$ -te Biegeeigenfrequenz des Rotors
$\eta_k = \Omega / \omega_k$	Frequenzverhältnis
$v_k(x)$	$k$ -te Eigenfunktion des Rotors
$\bar{c}_k = c_{vk} + ic_{wk}$	$k$ -ter Entwicklungskoeffizient von $\bar{v}(x)$
$c_k = c_{vk} + ic_{wk}$	$k$ -ter Entwicklungskoeffizient von $\bar{e}(x)$
$m_i$	Einzelmasse an der Stelle $x_i$
$r_i$	Schwerpunktradius der Einzelmasse
$U_i = m_i r_i$	Einzelunwucht an der Stelle $x_i$

Große deutsche Buchstaben kennzeichnen Matrizen, kleine deutsche Buchstaben Spaltenvektoren, ein hochgestellter Strich (') die Transposition einer Matrix bzw. eines Vektors.

## 1. Einleitung

Ein rotierender Körper heißt unwuchtig, wenn er auf seine Lagerung Kräfte ausübt, die durch Fliehkräfte hervorgerufen werden.

Unter der Unwucht einer Einzelmasse soll das Produkt aus Masse und ihrem Schwerpunktsabstand von der Rotationsachse verstanden werden. Durch das Auswuchten soll die Massenverteilung eines Rotors so korrigiert werden, daß beim Lauf keine zusätzlichen Lagerkräfte entstehen. Das Auswuchten besteht aus drei Teilen: Der Messung geeigneter Zustandsgrößen an der rotierenden Welle, der Errechnung der Ausgleichsmassen aus den Meßwerten und der anschließenden Massenkorrektur. Der Bericht befaßt sich nur mit dem 2. Teil, nämlich dem Zusammenhang zwischen den Unwuchten und den Meßgrößen.

Beim Auswuchten zeigt sich ein wesentlicher Unterschied zwischen starren und elastisch verformbaren Rotoren. Ein starrer Körper ist dann unwuchtig, wenn seine Drehachse nicht mit einer seiner Hauptträgheitsachsen zusammenfällt. Durch Anbringen von Ausgleichsunwuchten in zwei beliebig wählbaren Ebenen des Rotors kann die Drehachse jedoch immer zu einer Hauptträgheitsachse gemacht werden, und die unwuchterregten Lagerkräfte können für alle Drehzahlen zum Verschwinden gebracht werden. Dagegen treten grundsätzlich neue Schwierigkeiten auf, wenn ein Rotor biegeelastisch wird. Denn er verformt sich unter der Wirkung der Fliehkräfte, und infolge der Massenverlagerung treten drehzahlabhängig neue Unwuchten auf. Ein elastischer Läufer ist also bereits dann unwuchtig, wenn die Verbindungslinie seiner Querschnitts-Schwerpunkte nicht mit der Drehachse zusammenfällt.

Ein exaktes Auswuchten solcher Rotoren für alle Drehzahlen ist nur dadurch möglich, daß die Unwucht jeder Querschnittsebene für sich ausgeglichen wird. Da die Unwucht im allgemeinen kontinuierlich verteilt ist, muß man sich bei Verwendung punktförmiger Ausgleichsmassen sowohl hinsichtlich des Drehzahlbereiches als auch hinsichtlich der Auswuchtgüte beschränken.

## 2. Verhalten einer biegeelastischen, rotierenden Welle

### 2.1 Voraussetzungen

Um das Verhalten eines biegeelastischen, ungewichtigen Läufers bei verschiedenen Drehzahlen zu untersuchen, machen wir die folgenden, vereinfachenden Annahmen:

Der Läufer sei ein schlanker, gerader Stab von rotationssymmetrischem Querschnitt; Steifigkeits- und Massenbelegung seien beliebig. Er laufe mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in starren oder isotrop-elastischen Lagern um. Dämpfungskräfte und Kreiselwirkung von Scheiben werden nicht berücksichtigt. Die Querschnitts-Schwerpunkte des ruhenden ungewichtigen Läufers liegen allgemein nicht auf der Drehachse ( $x$ -Achse), sondern besitzen eine von  $x$  abhängige Exzentrizität  $\bar{e}(x)$ . Da diese eine vektorielle Größe ist, wird sie durch einen überstrichenen Buchstaben bezeichnet. Mit  $\rho(x)$  als Masse pro Längeneinheit ist dann die Unwuchtbelegung  $\bar{u}(x) = \rho(x)\bar{e}(x)$ .

### 2.2 Aufstellung der Bewegungsgleichung

Wir lassen die Eigenschwingungen außer Betracht und untersuchen nur die durch die Unwuchtbelegung erzwungene Auslenkung der rotierenden Welle. Dazu führen wir ein raumfestes  $x, y, z$ -Koordinatensystem und ein mit der Welle rotierendes  $x, v, w$ -System ein, deren gemeinsame  $x$ -Achse in der Drehachse der Welle liegt; ihr gemeinsamer Ursprung liegt am linken Wellenende. Abb. 1

zeigt den Wellenquerschnitt an der Stelle  $x$ . Der Abstand des Querschnitts-Schwerpunktes  $S$  von der Wellenmitte  $M$  ist die Exzentrizität  $\bar{e}$  des Querschnitts. Die Verbindungslinie  $\bar{e}(x)$  aller Querschnitts-Schwerpunkte der unverformten Welle ist im allgemeinen eine räumlich gekrümmte Kurve.

Ihre Projektionen auf die  $v, x$ - bzw. die  $w, x$ -Ebene sind  $e_v(x)$  bzw.  $e_w(x)$ ; die Projektionen auf die raumfeste  $y, x$ - bzw.  $z, x$ -Ebene sind  $e_y(x, t)$  bzw.  $e_z(x, t)$ . Die erzwungene Auslenkung der

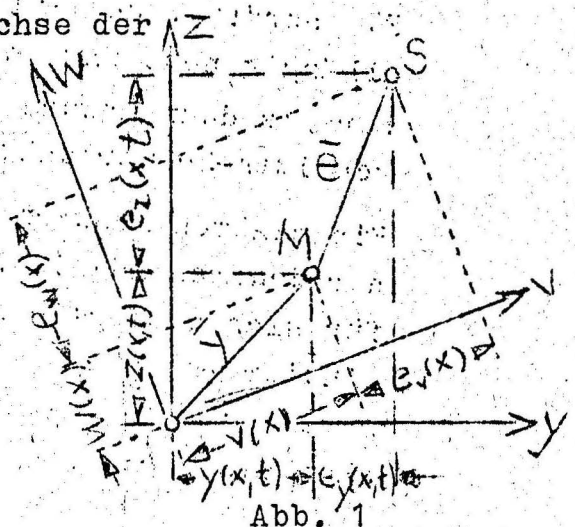


Abb. 1

Wellenmitte  $M$  hat im wellenfesten System die Komponenten  $v(x)$  und  $w(x)$ , vektoriell zusammengefaßt zu  $\bar{v}(x)$ , im raumfesten System die Komponenten  $y(x,t)$  und  $z(x,t)$ , vektoriell zusammengefaßt zu  $\bar{y}(x,t)$ .

Unter den obengenannten Voraussetzungen können wir für kleine Deformationen die elementare Stabtheorie anwenden und die erzwungene Auslenkung durch die Differentialgleichung oder durch die Integralgleichung für die Biegung des geraden Stabes beschreiben.

a) Differentialgleichung

Für jede der Komponenten der Wellenauslenkung gilt im raumfesten System die Differentialgleichung

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] &= p_y(x,t) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ(x) \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} \right] &= p_z(x,t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Hierbei bedeuten  $EI(x)$  die Biegesteifigkeit der Welle und  $p_y$  bzw.  $p_z$  die  $y$ - bzw.  $z$ -Komponente der Last pro Längeneinheit der Stabachse. Es empfiehlt sich, für die Rechnung den physikalischen Vektor  $\bar{y}(x,t)$  als komplexe Zahl  $\bar{y}(x,t) = y(x,t) + iz(x,t)$  aufzufassen. Aus den Gleichungen (1) wird dann

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ(x) \frac{\partial^2 \bar{y}(x,t)}{\partial x^2} \right] = \bar{p}(x,t) \quad (2)$$

Die Streckenlast  $\bar{p}(x,t) = p_y(x,t) + ip_z(x,t)$  ist im vorliegenden Fall durch die d'Alembertsche Trägheitskraft im Wellenelement gegeben:

$$\bar{p}(x,t) = -\mu(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\bar{y}(x,t) + \bar{e}(x,t)] \quad (3)$$

Da gleichförmige Rotation vorausgesetzt wird, ist

$$\bar{e}(x,t) = \bar{e}(x) \exp[i(\Omega t + \alpha)] \quad (4),$$

wobei  $\bar{e}(x)$  die ursprüngliche Exzentrizitätsbelegung der Welle im rotorfesten Koordinatensystem darstellt.

Da es sich um ein lineares, ungedämpftes System handelt, kann man für  $\bar{y}(x, t)$  einen Gleichung (4) entsprechenden Lösungsansatz machen:

$$\bar{y}(x, t) = \bar{v}(x) \exp[i(\Omega t + \alpha)] \quad (5)$$

Hierbei bedeutet  $\bar{v}(x) = v(x) + iw(x)$  die Wellenauslenkung in rotorfesten Koordinaten. Damit ergibt sich aus (3):

$$\bar{p}(x, t) = \Omega^2 \mu(x) [\bar{v}(x) + \bar{e}(x)] \exp[i(\Omega t + \alpha)] \quad (6)$$

Mit dem Ansatz (5) und Gl. (6) erhält man aus (2) die Differentialgleichung für die "Ortsfunktion"  $\bar{v}(x)$  im rotorfesten Koordinatensystem:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ(x) \frac{\partial^2 \bar{v}(x)}{\partial x^2} \right] - \Omega^2 \mu(x) \bar{v}(x) = \Omega^2 \mu(x) \bar{e}(x) \quad (7)$$

Entsprechend der Lagerung bestehen für einige der "Zustandsgrößen"

Auslenkung $\bar{y}(x, t)$ ,	Biegemoment $\bar{M}(x, t) = EI(x) \frac{d^2}{dx^2} \bar{y}(x, t)$
Neigung $\frac{d}{dx} [\bar{y}(x, t)]$ ,	Querkraft $\bar{Q}(x, t) = \frac{d}{dx} (EI(x) \frac{d}{dx} \bar{y}(x, t))$

Randbedingungen, die unter Benutzung des Ansatzes (5) auf  $\bar{v}(x)$  umgeschrieben werden müssen. Es sollen nur homogene Randbedingungen in Betracht gezogen werden.

Aus (5) geht hervor, daß die Welle im ausgebogenen Zustand mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  rotiert. Für die Auslenkungskomponenten  $v(x)$  und  $w(x)$  im mitrotierenden System gelten die inhomogenen Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ(x) \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \right] - \Omega^2 \mu(x) v(x) &= \Omega^2 \mu(x) e_v(x) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ(x) \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \right] - \Omega^2 \mu(x) w(x) &= \Omega^2 \mu(x) e_w(x) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

mit den zugehörigen Randbedingungen.



b) Integralgleichung

In entsprechender Weise kann man von der Integralgleichung für die Stabbiegung ausgehen:

$$\bar{y}(x, t) = \int_0^l G(x, \xi) \bar{p}(\xi, t) d\xi \quad (9)$$

Hierbei ist  $G(x, \xi)$  die Greensche Funktion des Problems; sie enthält bereits die Randbedingungen des speziellen Falls. Physikalisch bedeutet  $G(x, \xi)$  die Durchbiegung der Stabachse an der Stelle  $x$  infolge einer an der Stelle  $\xi$  angreifenden Einheitskraft. Mit (3), (4) und (5) geht Gl. (9) über in die Integralgleichung für die "Ortsfunktion"  $\bar{v}(x)$ :

$$\bar{v}(x) = \Omega^2 \int_0^l G(x, \xi) \mu(\xi) [\bar{v}(\xi) + \bar{e}(\xi)] d\xi$$

Dies ist eine inhomogene Integralgleichung

$$\bar{v}(x) - \Omega^2 \int_0^l \mu(\xi) G(x, \xi) \bar{v}(\xi) d\xi = \bar{F}(x) \quad (10)$$

mit der "Störfunktion"

$$\bar{F}(x) = \Omega^2 \int_0^l \mu(\xi) G(x, \xi) \bar{e}(\xi) d\xi$$

### 2.3 Aufbau der Lösung aus Eigenfunktionen

Die Lösung  $\bar{v}(x)$  kann über die Differentialgleichung (7) mit den zugehörigen Randbedingungen oder über die Integralgleichung (10) ermittelt werden.

Am übersichtlichsten läßt sich das Verhalten des Rotors bei verschiedenen Drehzahlen zeigen, wenn man die Lösung, ausgehend von der Integralgleichung, aus den Eigenfunktionen des Stabes (in seiner Lagerung) aufbaut.

Bei einem linear-elastischen System ist  $G(x, \xi)$  immer symmetrisch in  $x$  und  $\xi$ .

Durch Einführen von

$$\sqrt{\mu(x)} \bar{v}(x) = \bar{V}(x) ; \sqrt{\mu(x)} \bar{e}(x) = \bar{E}(x)$$

$$\sqrt{\mu(x)} \mu(\xi) G(x, \xi) = K(x, \xi) \quad (11)$$

kann der Kern  $\mu(\xi) G(x, \xi)$  der Integralgleichung (10) symmetrisch

in  $x$  und  $\xi$  gemacht werden. Ein solcher Kern besitzt orthogonale Eigenfunktionen. Die umgeformte Gleichung (10) lautet:

$$\bar{V}(x) - \Omega^2 \int_0^l K(x, \xi) \bar{V}(\xi) d\xi = \bar{F}(x) \quad (12)$$

mit 
$$\bar{F}(x) = \Omega^2 \int_0^l K(x, \xi) \bar{E}(\xi) d\xi \quad (13)$$

Jede der beiden Funktionen  $\bar{V}(x)$  und  $\bar{F}(x)$  ist quellenmäßig darstellbar, d.h. sie genügt einer Integralgleichung vom Typ

$$\phi(x) = \int_0^l K(x, \xi) H(\xi) d\xi$$

und kann daher nach den Eigenfunktionen  $\varphi_k(x)$  des Kerns  $K(x, \xi)$  entwickelt werden:

$$\bar{V}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{C}_k \varphi_k(x) \quad (14)$$

$$\bar{F}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{B}_k \varphi_k(x) \quad (15)$$

Die Entwicklungskoeffizienten  $\bar{C}_k$  bzw.  $\bar{B}_k$  sind durch die Gleichungen

$$\bar{C}_k = \frac{\int_0^l \bar{V}(x) \varphi_k(x) dx}{\int_0^l \varphi_k^2(x) dx} \quad \text{bzw.} \quad \bar{B}_k = \frac{\int_0^l \bar{F}(x) \varphi_k(x) dx}{\int_0^l \varphi_k^2(x) dx} \quad (16)$$

bestimmt. Mit (14) und (15) wird Gleichung (12) umgeformt in

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{C}_k \varphi_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \bar{C}_k \Omega^2 \int_0^l K(x, \xi) \varphi_k(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{B}_k \varphi_k(x) \quad (17)$$

Für jede Eigenfunktion  $\varphi_k(x)$  gilt die Beziehung

$$\varphi_k(x) = \omega_k^2 \int_0^l K(x, \xi) \varphi_k(\xi) d\xi \quad (18)$$

mit  $\omega_k$  als Eigenkreisfrequenz. Mit (18) erhält man aus (17) durch Koeffizientenvergleich:

$$\bar{C}_k = \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_k}\right)^2} \bar{B}_k = \frac{1}{1 - \eta_k^2} \bar{B}_k \quad (19)$$

wobei  $\eta_k = \frac{\Omega}{\omega_k}$  gesetzt wird.

Die Auslenkungsfunktion setzt sich also folgendermaßen aus den Eigenfunktionen zusammen:

$$\bar{V}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \eta_k^2} \bar{B}_k \varphi_k(x) \quad (20)$$

$\bar{E}(x)$  (Gl. 13) ist von der Exzentrizitätsfunktion  $E(x) = \sqrt{u(x)} \bar{e}(x)$  abhängig. Da man von der Funktion  $\bar{E}(x)$  selbst nicht voraussetzen kann, daß sie die Randbedingungen für  $\bar{V}(x)$  erfüllt, ist sie im allgemeinen nicht nach den Eigenfunktionen  $\varphi_k(x)$  entwickelbar. Man kann  $\bar{E}(x)$  aber in einen quellenmäßig darstellbaren und einen quellenmäßig nicht darstellbaren Anteil zerlegen:

$$\bar{E}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{E}_k \varphi_k(x) + \bar{\psi}(x) \quad (21)$$

mit

$$\bar{E}_k = \frac{\int_0^l \bar{E}(x) \varphi_k(x) dx}{\int_0^l \varphi_k^2(x) dx}$$

Physikalisch kann man sich unter dem quellenmäßig nicht darstellbaren Anteil der Unwuchtbelegung einer Welle z.B. Einzelunwuchten an starren Lagerstellen vorstellen.

Mit (21) ergibt sich aus Gl. (13):

$$\bar{F}(x) = \Omega^2 \int_0^l K(x, \xi) \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \bar{E}_k \varphi_k(\xi) + \bar{\psi}(\xi) \right] d\xi$$

Nun besteht für den quellenmäßig nicht darstellbaren Anteil  $\bar{\psi}(x)$  die Beziehung

$$\int_0^l K(x, \xi) \bar{\psi}(\xi) d\xi = 0$$

Damit wird

$$\bar{F}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega^2 \bar{E}_k \int_0^l K(x, \xi) \varphi_k(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{\omega_k^2} \bar{E}_k \varphi_k(x)$$

Vergleich mit Gl. (15) liefert:

$$\bar{B}_k = \eta_k^2 \bar{E}_k$$

Man erkennt, daß nur der quellenmäßig darstellbare Anteil der Exzentrizitätsbelegung  $\bar{E}(x)$  in die Auslenkung  $\bar{V}(x)$  eingeht:

$$\bar{V}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k^2}{1 - \eta_k^2} \bar{E}_k \varphi_k(x) \quad (22)$$

Von der umgeformten Auslenkung  $\bar{V}(x) = \sqrt{u(x)} v(x)$  kann man nun einfach zu  $v(x)$  zurückgehen. Die Eigenfunktionen des Stabes sind

$v_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{u(x)}$ , Gl. (22) geht über in:

$$\bar{v}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k^2}{1-\eta_k^2} \bar{\epsilon}_k v_k(x) \quad (23)$$

mit 
$$\bar{\epsilon}_k = \frac{\int_0^l u(x) \bar{e}(x) v_k(x) dx}{\int_0^l u(x) v_k^2(x) dx}$$

Die dynamische Biegelinie der Welle setzt sich also aus den Eigenfunktionen  $\bar{\epsilon}_k v_k(x)$  zusammen, die in der Exzentrizitätskurve  $\bar{e}(x)$  enthalten sind, multipliziert mit "Vergrößerungskoeffizienten"  $\eta_k^2 / 1 - \eta_k^2$ . Diese sind stark von der Drehzahl  $n$  der Welle abhängig. Liegt  $n$  in der Nähe einer biegekritischen Drehzahl  $n_{ek}$ , wird der zugehörige Koeffizient  $\eta_k^2 / 1 - \eta_k^2$  gegenüber den anderen sehr groß, und die Wellenauslenkung stimmt praktisch mit der zugehörigen Eigenform  $v_k(x)$  überein.

Für  $\Omega \ll \omega_k$  ist  $\bar{c}_k \ll \bar{\epsilon}_k$ , d.h. bei der Darstellung der dynamischen Biegelinie bei einer beliebigen Drehzahl  $n$  nach Gl. (23) kann der Anteil der höheren Eigenfunktionen vernachlässigt werden. Bei einer zweifach gelagerten Welle brauchen im allgemeinen nur die ersten Biegeeigenformen bis zur Ordnung  $G$  berücksichtigt zu werden, wenn  $n$  zwischen der  $(G-1)$ ten und  $G$ -ten biegekritischen Drehzahl liegt. Bei mehrfach gelagerten Läufern folgen die biegekritischen Drehzahlen jedoch dichter aufeinander, die Entwicklungskoeffizienten  $\bar{c}_k$  gehen mit steigender Ordnung  $k$  nicht so stark gegen Null, und es müssen daher meist mehr Eigenfunktionen als bei einem zweifach gelagerten Läufer berücksichtigt werden.

Während in die Wellenauslenkung nur der quellenmäßig darstellbare Anteil der Exzentrizitätsfunktion eingeht, ist für die Lagerkräfte die gesamte auf die rotierende Welle einwirkende Zentrifugalkraft maßgebend, und in diese geht auch der Anteil  $\bar{\psi}(x)$  (Gl. 21) ein; denn die Zentrifugalkraft ist

$$Z = \Omega^2 \int_0^l u(x) [ \bar{v}(x) + \bar{e}(x) ] dx$$

Dem hochtourigen Auswuchten mit elastischer Wellenauslenkung geht jedoch immer ein Auswuchten bei niedriger Drehzahl voraus, bei der sich der Läufer wie ein starrer Körper verhält. Hierbei wird auch der quellenmäßig nicht darstellbare Anteil erfasst,

### 3. Das Auswuchten

#### 3.1 Forderungen

Das Ziel der Auswuchtung ist in erster Linie, im gesamten Betriebsdrehzahlbereich des Rotors die durch Unwuchten hervorgerufenen Lagerkräfte zum Verschwinden zu bringen. Beim elastischen Läufer sollen dabei außerdem die durch Unwuchten in der Welle entstehenden Biegemomente möglichst klein werden, da sie zusätzliche Beanspruchungen darstellen.

#### 3.2 Meßgrößen

Wie aus Kap. 2 ersichtlich, sind die "Zustandsgrößen" (Auslenkung, Neigung, Biegemoment und Querkraft) der rotierenden Welle und damit auch die Lagerkräfte in jeder Komponentenrichtung linear von der Größe der entsprechenden Unwuchtbestandteile abhängig, und es könnte daher jede als Meßgröße zur Ermittlung der Unwucht herangezogen werden. Als Meßgrößen kommen praktisch in erster Linie Lagerauslenkungen und Lagerkräfte, weiterhin Auslenkung und Biegemoment (Biegerandspannung) an einzelnen Punkten der Welle in Frage.

Da die Messungen an der rotierenden Welle vorgenommen werden, muß die Meßmethode es ermöglichen, die Komponenten der Meßgrößen bezüglich eines rotorfesten Koordinatensystems zu ermitteln.

#### 3.3 Praktische Auswuchtbedingungen

Die Unwucht ist im allgemeinen längs der Läuferachse kontinuierlich verteilt. Beim praktischen Auswuchten können jedoch keine verteilten Massen entfernt oder angebracht werden, sondern nur Einzelmassen. Die Lage der Ausgleichsebenen (Ebenen senkrecht zur Rotorachse, in denen Ausgleichsmassen sitzen) kann in den meisten Fällen auch nicht für das Auswuchten optimal gewählt werden, sondern ist durch die konstruktive Gestalt der Läufer vorgegeben.

Zwar können bei einer feststehenden Drehzahl die Lagerkräfte eines biegeelastischen Läufers durch ein System von Einzelunwuchten in beliebig gewählten Ausgleichsebenen kompensiert werden. Ändert sich aber die Drehzahl, dann ändert sich wegen der Dreh-

zahlabhängigkeit der Entwicklungskoeffizienten  $\bar{c}_k$  (Gl. 23) die Form der dynamischen Biegelinie, und dadurch entstehen neue Unwuchten. Ein exakter Ausgleich bei allen Drehzahlen würde Ausgleichsmassen in unendlich vielen Querschnittsebenen erfordern und ist daher praktisch nicht möglich. Die Aufgabe muß näherungsweise auf ein Problem mit endlich vielen Freiheitsgraden reduziert werden, und es ergibt sich praktisch die folgende Auswuchtbedingung:

Mißt man bei den Drehzahlen  $n$  ( $s=1, \dots, N$ ) am unausgewuchteten Läufer die Zustandsgrößen  $\bar{L}_\lambda^{(s)}$  ( $\lambda=1, \dots, l$ ), so sollen durch Anbringen von Zusatzunwuchten  $U_i$  (oder durch Entfernen entsprechender Einzelunwuchten  $-U_i$ ) in vorher gewählten Querschnittsebenen diese Meßgrößen zum Verschwinden gebracht werden.

### 3.4 Aufeinanderfolgender Ausgleich der einzelnen Eigenformen

Das Prinzip des Auswuchtens elastischer Läufer läßt sich am deutlichsten anhand der Reihendarstellung (23) zeigen.

Wegen der in Kap. 2.1 aufgeführten Voraussetzungen brauchen wir die Betrachtungen nur an der  $v$ -Komponente durchzuführen. Da der Anteil der höheren Eigenfunktionen ( $\omega_k \gg \Omega$ ) an der dynamischen Durchbiegung  $v(x)$  klein ist, wird die Biegelinie bei der Betriebsdrehzahl des Läufers genügend genau durch die ersten  $\sigma$  Eigenfunktionen beschrieben:

$$v(x) \approx \frac{\eta_1^2}{1-\eta_1^2} \varepsilon_1 v_1(x) + \dots + \frac{\eta_\sigma^2}{1-\eta_\sigma^2} \varepsilon_\sigma v_\sigma(x)$$

Dann genügt es, nur die ersten  $\sigma$  in  $e_v(x)$  enthaltenen Eigenfunktionen  $v_k(x)$  auszugleichen; es ist also

$$e_v(x) = \varepsilon_1 v_1(x) + \dots + \varepsilon_\sigma v_\sigma(x) \quad (24)$$

Damit wird die Ermittlung von  $e_v(x)$  auf die Ermittlung der  $\sigma$  Entwicklungskoeffizienten  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\sigma$  reduziert, vorausgesetzt, daß die Eigenfunktionen  $v_1, \dots, v_\sigma$  bekannt sind.

Einen getrennten Ausgleich der einzelnen in  $e(x)$  enthaltenen Eigenfunktionen hat zuerst Meldahl (1) vorgeschlagen. Praktische Versuche in dieser Richtung wurden in Rußland von Gusarow, Dimentberg u.a. (2), in England von Bishop und Mitarbeitern (6), (7)

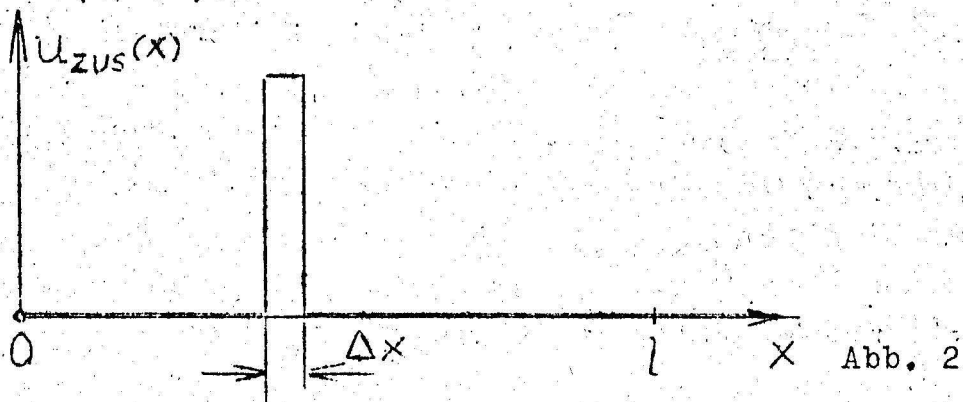
unternommen.

Der Grundgedanke dieses Verfahrens ist, die einzelnen Summanden der Unwuchtbelegung

$$u(x) = \varepsilon_1 / u(x) v_1(x) + \dots + \varepsilon_G / u(x) v_G(x) \quad (25)$$

durch Gegenunwuchten auszugleichen, die in der Form der einzelnen Unwucht-Eigenfunktionen  $u(x) v_k(x)$  längs der Läuferachse verteilt sind. Da in der Praxis keine verteilten Ausgleichsmassen, sondern nur Einzelmassen angebracht oder entfernt werden können, muß jeder Anteil  $\varepsilon_k / u(x) v_k(x)$  durch einen Satz von Einzelunwuchten getilgt werden, der diese Unwucht-Eigenfunktion mit genügender Genauigkeit approximiert.

Die einer Einzelunwucht  $U_i$  an der Stelle  $x_i$  entsprechende Unwuchtbelegung  $u_{\text{zus}}(x)$  wird durch eine sog. Nadelfunktion dargestellt (Abb. 2).



Die Höhe der Nadel ist dadurch festgelegt, daß der Inhalt  $u_{\text{zus}} \Delta x$  des Rechtecks immer gleich der Unwucht der Einzelmasse sein soll, auch beim Übergang  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} u_{\text{zus}}(x) \Delta x = m_i r_i = U_i \quad (26)$$

Die Entwicklung der Exzentrizitätsfunktion  $e_{\text{zus}}(x) = u_{\text{zus}}(x) / u(x)$  nach Eigenfunktionen gemäß Gl. (23) ergibt unter Berücksichtigung von Gl. (26) für die Entwicklungskoeffizienten

$$\varepsilon_{\text{zus}, k, i} = \frac{\int_0^l u(x) e_{\text{zus}}(x) v_k(x) dx}{\int_0^l u(x) v_k^2(x) dx} = \frac{m_i r_i v_k(x_i)}{\int_0^l u(x) v_k^2(x) dx} = \frac{1}{N_k} U_i v_k(x_i)$$

wobei zur Abkürzung

$$N_k = \int_0^l u(x) v_k^2(x) dx$$

gesetzt wird.

Wenn der Anteil  $\epsilon_k v_k(x)$  der ursprünglichen Unwucht durch einen Satz

$$\checkmark \checkmark_k = \begin{pmatrix} U_{k1} \\ U_{k2} \\ \vdots \\ U_{kn} \end{pmatrix}$$

von n zusätzlichen Einzelunwuchten an den Stellen  $x_1, \dots, x_n$  beseitigt werden soll, dann muß  $\checkmark_k$  so bestimmt werden, daß sein k-ter Entwicklungskoeffizient

$$\epsilon_{\text{zus},k} = \sum_{i=1}^n \epsilon_{\text{zus},k,i} = \frac{1}{N_k} [U_{k1} v_k(x_1) + \dots + U_{kn} v_k(x_n)] = \epsilon_k \quad (27)$$

ist. Außerdem dürfen diese Zusatzunwuchten die Auswuchtung der anderen Eigenformen nicht beeinträchtigen; es gilt also noch die Bedingung

$$\frac{1}{N_m} [U_{k1} v_m(x_1) + \dots + U_{kn} v_m(x_n)] = 0 \quad \text{für } m \neq k \quad (28)$$

Wenn die Eigenformen bis zur Ordnung  $G$  berücksichtigt werden, besteht mit den Gl. (27,28) für jede Ordnung  $k$  ein System von  $G$  Gleichungen für die n Einzelunwuchten. Damit diese eindeutig bestimmt sind, muß  $G = n$  sein, und die Ausgleichsebenen (d.h. die Stellen  $x_i$ ) müssen so gewählt werden, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} v_1(x_1) & \dots & v_1(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ v_k(x_1) & \dots & v_k(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ v_n(x_1) & \dots & v_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (29)$$

ist.

Die Gesamtunwucht wird dann entsprechend Gl. (25) angenähert



durch einen Unwuchtensatz

$$\tilde{W} = \sum_{k=1}^n \tilde{W}_k$$

ausgeglichen.

Aus diesen Beziehungen kann man entnehmen, daß man mit Einzelunwuchten in  $n$  Querschnittsebenen  $n$  in der Unwuchtbelegung enthaltene Eigenformen ausgleichen kann.

Zunächst sind die  $\varepsilon_k$  natürlich unbekannt, sodaß die Unwuchtsätze  $\tilde{W}_k$  jeweils nur bis auf einen konstanten Faktor aus den Gln. (27) und (28) berechnet werden können. Läßt man die Welle in der Nähe der  $k$ -ten biegekritischen Drehzahl  $n_{ek}$  laufen, dann ist ihre Auslenkung praktisch allein durch den Unwuchtanteil  $\sqrt{u(x)} \varepsilon_k v_k(x)$  bestimmt und kann durch den zusätzlichen Unwuchtensatz  $\tilde{W}_k$  unterdrückt werden. Auf dieser Grundlage wurden bei den in (2) und (6) beschriebenen Versuchen nacheinander bei Drehzahlen nahe  $n_{e1}, \dots, n_{en}$  durch Probieren die Faktoren  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  ermittelt und die Unwuchtanteile  $\sqrt{u \varepsilon_1} v_1, \dots, \sqrt{u \varepsilon_n} v_n$  ausgeglichen. Die höchste Auswuchtdrehzahl muß über oder zumindest nahe bei der höchsten Betriebsdrehzahl des Läufers liegen.

Mit Einzelunwuchten in  $n$  Ausgleichsebenen kann man einen elastischen Läufer also nur im Drehzahlbereich der ersten  $n$  biegekritischen Drehzahl auswuchten. Dabei hängt die mögliche Auswuchtgüte von der Genauigkeit ab, mit der die dynamische Auslenkung des Läufers in diesem Drehzahlbereich durch die ersten  $n$  Eigenfunktionen beschrieben wird.

Der starre Läufer läßt sich hier einfügen, wenn man ihn als freien Körper in der Ebene auffaßt. Ein solcher hat den zweifachen Eigenwert Null und als zugehörige Eigenformen die Parallelverschiebung (Eigenfunktion  $v(x)=1$ ) und die Drehung um den Schwerpunkt (Eigenfunktion  $v(x)=(x-x_0)/x_0$ ;  $x_0$  = Schwerpunktsabszisse). Bezieht man diese beiden Funktionen in die Eigenfunktionen mit ein, dann erkennt man, daß auch der biegeelastische Läufer zunächst bei niedriger Drehzahl wie ein starrer Rotor ausgewuchtet werden muß.

### 3.5 Gleichzeitiger Ausgleich der Gesamtunwucht

Anstatt jede in der Exzentrizitätsbelegung enthaltene Eigenform für sich auszuwuchten, ist es anzustreben, aus den Ergebnissen mehrerer Meßläufe auf einmal einen Satz von Einzelunwuchten zu berechnen, der die gesamte ursprüngliche Unwucht  $u(x)$  mit der geforderten Genauigkeit ausgleicht.

Eine Einzelunwucht  $U_i$  an der Stelle  $x_i$  der Welle ruft bei der beliebigen Drehzahl  $n_v$  Zustandsgrößen  $L_{\lambda}^{(v)}$  des Läufers hervor, die wegen der bestehenden Linearität zu  $U_i$  proportional sind:

$$L_{\lambda}^{(v)} = p_{\lambda i}^{(v)} U_i$$

Die dynamischen Einflußzahlen  $p_{\lambda i}^{(v)}$  hängen von den elastomechanischen Eigenschaften des Rotors in seiner Lagerung, von der Drehzahl  $n_v$  und der Lage der Unwuchtebene ( $x_i$ ) ab. Beim Vorhandensein mehrerer Einzelunwuchten superponieren sich deren Wirkungen:

$$L_{\lambda}^{(v)} = p_{\lambda 1}^{(v)} U_1 + \dots + p_{\lambda n}^{(v)} U_n$$

Werden nun am unausgewuchteten Läufer bei den Meßlauf-Drehzahlen  $n_{\lambda}^{(v)} (v=1, \dots, N)$  die Zustandsgrößen  $L_{\lambda}^{(v)}$  gemessen, dann müssen aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_{1i}^{(1)} U_i &= -L_1^{(1)} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n p_{1i}^{(v)} U_i &= -L_1^{(v)} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n p_{1i}^{(N)} U_i &= -L_1^{(N)} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n p_{1i}^{(N)} U_i &= -L_1^{(N)} \end{aligned} \tag{30}$$

Einzelunwuchten  $U_i$  berechnet werden, durch deren Anbringen diese Meßwerte  $L_{\lambda}$  gerade zum Verschwinden gebracht werden.

Unter Benutzung der Matrixschreibweise kann man das Gleichungssystem (30) abgekürzt als

$$P \vec{u} = - \vec{l}$$

schreiben, wenn man die Abkürzungen

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}, \quad \vec{l} = \begin{pmatrix} L_1^{(1)} \\ \vdots \\ L_2^{(1)} \\ \vdots \\ L_1^{(N)} \\ \vdots \\ L_N^{(N)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(1)} & \dots & p_{1n}^{(1)} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ p_{\ell 1}^{(1)} & \dots & p_{\ell n}^{(1)} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ p_{11}^{(N)} & \dots & p_{1n}^{(N)} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ p_{\ell 1}^{(N)} & \dots & p_{\ell n}^{(N)} \end{pmatrix}$$

einführt.

Damit das Gleichungssystem (30) eindeutig nach den  $U_i$  aufgelöst werden kann, muß die Anzahl  $l \cdot N$  der Meßwerte gleich der Anzahl  $n$  der unbekanntes Unwuchten gewählt werden. Außerdem müssen die Gln. (30) voneinander linear unabhängig sein, d.h. die Determinante der Koeffizientenmatrix darf nicht verschwinden:

$$\det \vec{p} \neq 0 \quad (31)$$

Dies bedingt, daß die Meßlaufdrehzahlen so gewählt werden müssen, daß die Auslenkungsformen bei ein und derselben Unwuchtbelastung sich wesentlich voneinander unterscheiden. Die Auswuchtdrehzahlen müssen also genügend weit auseinanderliegen; am besten jeweils in der Nähe verschiedener biegekritischer Drehzahlen des Läufers. Nach Festlegung der Drehzahlen ist auch die Lage der Ausgleichsebenen nicht mehr völlig willkürlich, sondern durch die Bedingung (31) beschränkt.

Nach den Betrachtungen von Kap. 3.4 werden die nach Gl. (30) berechneten Einzelunwuchten die unteren  $n$  Eigenformen der Unwuchtbelastung ausgleichen, da diese - im Bereich der unteren biegekritischen Drehzahlen - den stärksten Einfluß auf die Zustandsgrößen der Welle haben.

Um die Fehler infolge von Meß- und Rechengenauigkeiten herabzudrücken, ist es vorteilhaft, mehr Messungen als notwendig vorzunehmen ( $l \cdot N > n$ ). Man erhält dann ein Gleichungssystem

$$\vec{p} \vec{u} = -\vec{l} \quad (32)$$

für die  $U_i$ , das mehr Zeilen als Spalten hat, d.h. überbestimmt ist. Die Anwendung der Ausgleichsrechnung nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate auf (32) führt auf ein Gleichungssystem

$$P' P \ddot{u} = -P' l \quad (33)$$

mit quadratischer Koeffizientenmatrix, wobei  $P'$  die transponierte Matrix  $P$  ist. Die aus Gl. (33) berechneten  $U_i$  sind mit weniger zufälligen Fehlern behaftet als die aus Gl. (30) mit  $1 \cdot N = n$  ermittelten Werte.

### 3.6 Ermittlung der dynamischen Einflußzahlen

Die Berechnung der Ausgleichsunwuchten  $U_i$  durch Auflösung des Gleichungssystems (30) setzt die Kenntnis der Koeffizientenmatrix  $P$  voraus. Man kann drei Wege zur Ermittlung von  $P$  unterscheiden.

#### 3.6.1 Experimentelle Ermittlung der Einflußzahlen

Dieses von El Hadi (4) beschriebene Verfahren ist eine Verallgemeinerung des Auswuchtens starrer Läufer in ihrer Betriebslagerung. Es seien z.B. vier Ausgleichsebenen vorgesehen, und es sollen z.B. je zwei Zustandsgrößen bei zwei verschiedenen Meßlaufdrehzahlen  $n_1$  und  $n_2$  gemessen werden. Die unbekanntenen Ausgleichsunwuchten haben die Komponenten  $U_{iv}$ ,  $U_{iw}$ , die erforderlichen Meßgrößen die Komponenten  $V_\lambda$ ,  $W_\lambda$  im rotorfesten Koordinatensystem. Zwischen den  $v$ -Komponenten der Meßwerte und der Unwuchten, die man zu den Vektoren

$$\dot{w} = \begin{pmatrix} V_1^{(1)} \\ V_2^{(1)} \\ V_1^{(2)} \\ V_2^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \ddot{u}_v = \begin{pmatrix} U_{1v} \\ U_{2v} \\ U_{3v} \\ U_{4v} \end{pmatrix}$$

zusammenfassen kann, besteht nach Gl. (30) die Beziehung

$$P \ddot{u}_v = -\dot{w} \quad (34)$$

Für die  $w$ -Komponenten besteht ebenfalls die Gleichung

$$P \ddot{u}_w = -\dot{w}, \quad (35)$$

da wegen der vorausgesetzten Isotropie des Läufers und der Lager die Einflußzahlen für beide Richtungen gleich sind.

Zunächst läßt man den unausgewuchteten Läufer mit den Drehzahlen  $n_1$  und  $n_2$  rotieren und mißt bei diesen die Zustandsgrößen  $v_1^{(1)}$ ,  $v_2^{(1)}$  und  $v_1^{(2)}$ ,  $v_2^{(2)}$ . Um die Einflußzahlen  $p_{\lambda i}^{(v)}$  zu bestimmen, bringt man zuerst in Ausgleichsebene 1 eine "Tarierunwucht"  $\Delta U_{1v}$  bekannter Größe an. Beim "Tarierlauf" mit der Drehzahl  $n_1$  mißt man nun die Größen  $\tilde{v}_1^{(1)}$  und  $\tilde{v}_2^{(1)}$ . Da gegenüber dem ursprünglichen Zustand nur die Tarierunwucht  $\Delta U_{1v}$  hinzugekommen ist, muß die Differenz der Meßwerte die Wirkung von  $\Delta U_{1v}$  sein:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1^{(1)} - v_1^{(1)} &= \Delta v_1^{(1)} = p_{11}^{(1)} \Delta U_{1v} \\ \tilde{v}_2^{(1)} - v_2^{(1)} &= \Delta v_2^{(1)} = p_{21}^{(1)} \Delta U_{1v} \end{aligned} \quad (36)$$

Daraus ergeben sich  $p_{11}^{(1)}$  und  $p_{21}^{(1)}$ . Als nächstes wird ein Tarierlauf mit derselben Tarierunwucht bei der Drehzahl  $n_2$  zur Bestimmung von  $p_{11}^{(2)}$  und  $p_{21}^{(2)}$  durchgeführt. Danach muß  $\Delta U_{1v}$  entfernt und eine Tarierunwucht  $\Delta U_{2v}$  in Ebene 2 befestigt werden. Zur Ermittlung aller 16 Einflußzahlen müssen also je vier Tarierläufe mit den Drehzahlen  $n_1$  und  $n_2$  vorgenommen werden.

Bei Vorhandensein einer geschwindigkeitsproportionalen äußeren Dämpfung tritt an die Stelle der Gleichungssysteme (34) und (35) das gekoppelte System

$$Q \begin{pmatrix} \ddot{u}_v \\ \ddot{u}_w \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Die in unserem Beispiel achtzeilige quadratische Matrix  $Q$  besitzt bei isotrop steifer Welle nur 32 verschiedene Elemente. In diesem Fall kommt man mit derselben Anzahl von acht Tarierläufen aus, weil bei jedem Lauf  $2 \cdot 2 = 4$  Einflußzahlen ermittelt werden können, z.B. beim Lauf mit  $\Delta U_{1v}$  bei der Drehzahl  $n_1$  folgende Einflußzahlen:

$$\begin{aligned} q_{11}^{(1)} &= \frac{1}{\Delta U_1} v_1^{(1)} ; & q_{21}^{(1)} &= \frac{1}{\Delta U_1} v_2^{(1)} \\ q_{51}^{(1)} &= \frac{1}{\Delta U_1} w_1^{(1)} ; & q_{61}^{(1)} &= \frac{1}{\Delta U_1} w_2^{(1)}. \end{aligned}$$

Bei großen Läufern (z.B. von Dampfturbinen), die im Betriebszustand in ihren Gehäusen ausgewuchtet werden müssen, ist das Befestigen der Tarierunwuchten und das Starten und Anhalten der Meßläufe sehr umständlich. Will man dies umgehen und mit wenigen Meßläufen des unausgewuchteten Rotors auskommen, dann muß man die Einflußzahlen  $p_{\lambda i}^{(v)}$  theoretisch vorherberechnen. Dazu ist natürlich Voraussetzung, daß die elastomechanischen Eigenschaften des Rotors bekannt sind.

### 3.6.2 Theoretische Ermittlung der dynamischen Einflußzahlen über die Eigenfunktionen

Von Hübner (5) wurde zur Berechnung der Einflußzahlen ein Verfahren vorgeschlagen, das den Aufbau der dynamischen Biegelinie der Welle aus den Eigenfunktionen des Läufers zur Grundlage hat.

Die durch die Unwuchtbelegung  $u_v(x) = u(x)e_v(x)$  hervorgerufene Verformung der mit der beliebigen Winkelgeschwindigkeit  $\Omega_v$  rotierenden Welle ist

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(v)} v_k(x) \quad (38)$$

mit

$$c_k^{(v)} = \frac{1}{\frac{\omega_k^2}{\Omega_v^2} - 1} \frac{\int_0^l u(x)e(x)v_k(x) dx}{\int_0^l u(x)v_k^2(x) dx} \quad (39)$$

Gleichung (38) kann man angenähert durch ein lineares Gleichungssystem ersetzen, und dafür benutzt man am übersichtlichsten die Matrixschreibweise. Man stellt die Auslenkungsfunktion  $v(x)$  näherungsweise durch ihre Funktionswerte an einzelnen Stellen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dar, in Matrixschreibweise durch den Spaltenvektor

$$z = \begin{pmatrix} v(x_1) \\ v(x_2) \\ \vdots \\ v(x_n) \end{pmatrix}$$

Das Integral im Zähler von Gl. (39) wird - wie in der praktischen Mathematik üblich - mit Hilfe einer "Quadraturformel" durch eine Summe ersetzt, wobei die  $W_i$  die "Gewichte" der einzelnen Funktionswerte bedeuten:

$$\int_a^l u(x) e(x) v_k(x) dx \approx \sum_{i=1}^n W_i u(x_i) e(x_i) v_k(x_i) \quad (41)$$

Die Unwuchtverteilung längs der Rotorachse kann man durch den Spaltenvektor

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} \quad (42)$$

annähern, wobei hier die "gewichteten" Unwuchten mit  $U_i$  bezeichnet wurden:

$$W_i u(x_i) e(x_i) = U_i$$

In gleicher Weise wie  $v(x)$  stellt man die Eigenfunktionen  $v_k(x)$  durch die Vektoren

$$\varphi_k = \begin{pmatrix} v_k(x_1) \\ v_k(x_2) \\ \vdots \\ v_k(x_n) \end{pmatrix} \quad (43)$$

dar, und die Gesamtheit aller Eigenfunktionen bis zur Ordnung  $\sigma$  durch eine Matrix von  $\sigma$  Spalten:

$$\mathcal{X} = (\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_\sigma) \quad (44)$$

Unter Benutzung der Definitionen (42) und (43) kann man die Summe (41) als Matrizenprodukt schreiben, also

$$\sum_{i=1}^n W_i u(x_i) e(x_i) v_k(x_i) = \varphi_k' \tilde{u} \quad (45)$$

( $\varphi_k'$  ist der transponierte Vektor  $\varphi_k$ )

Führt man noch die Abkürzung

$$F_k^{(v)} = \frac{1}{\int_a^l u(x) v_k^2(x) dx} \quad (46)$$

ein, so wird der Faktor  $c_k^{(v)}$  in Gl. (39) durch

$$c_k^{(v)} = F_k^{(v)} \cdot \varphi_k' \tilde{u} \quad (47)$$

angenähert. Gl. (38) ist praktisch noch genügend genau, wenn man nur eine endliche Anzahl von Eigenfunktionen (bis zur Ordnung  $\delta$ ) berücksichtigt:

$$v^{(\nu)}(x) = \sum_{k=1}^{\delta} c_k^{(\nu)} v_k(x) \quad (48)$$

Fassen wir die Faktoren  $v_k$  bis zur Ordnung  $\delta$  zu einer Diagonalmatrix

$$f^{(\nu)} = \begin{pmatrix} F_{1\nu} & & & \\ & F_{2\nu} & & \\ & & \dots & \\ & & & F_{\delta\nu} \end{pmatrix} \quad (49)$$

zusammen, dann wird Gl. (38) in Matrizenform folgendermaßen dargestellt:

$$S^{(\nu)} = X f^{(\nu)} X' u \quad (50)$$

d.h. wir haben jetzt ein System von  $n$  linearen Gleichungen zwischen den Wellenauslenkungen  $v(x_i)$  und den Einzelunwuchten  $U_i$  vor uns, das Gl. (30) entspricht!

Wenn bei einem  $l$ -fach gelagerten Läufer zu der Eigenform  $v_k(x)$  die Lagerkräfte  $S_{k\lambda}$  ( $\lambda=1, \dots, l$ ) gehören, dann kann man die Lagerkräfte  $S_{k\lambda}^{(\nu)}$ , die sich bei der Rotation mit der beliebigen Winkelgeschwindigkeit  $\Omega_\nu$  einstellen, entsprechend zu  $v(x)$  als Summe der Eigenform-Lagerkräfte  $S_{k\lambda}$  darstellen:

$$S_{k\lambda}^{(\nu)} = \sum_{k=1}^{\delta} c_k^{(\nu)} S_{k\lambda} \quad (51)$$

Ersetzt man auch hier wieder die Reihe durch eine endliche Summe, dann läßt sich nach Einführung von

$$s^{(\nu)} = \begin{pmatrix} S_1^{(\nu)} \\ \vdots \\ S_l^{(\nu)} \end{pmatrix} \quad (\text{Vektor der Lagerkräfte bei der Winkelgeschwindigkeit } \Omega_\nu)$$

$$\text{und } \mathcal{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} & \dots & S_{\delta 1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{1l} & S_{2l} & \dots & S_{\delta l} \end{pmatrix} \quad (\text{Matrix der Eigenform-Lagerkräfte})$$



die Gesamtheit der Lagerkräfte bei  $\Omega_{\text{analog}}$  zu Gl. (50) in der Form

$$f^{(v)} = \delta f^{(v)} X' \ddot{w} \quad (52)$$

schreiben. Die Berechnung der Koeffizientenmatrizen  $\delta f^{(v)} X'$  bzw.  $\delta f^{(v)} X'$  erfordert die vorherige Berechnung der Eigenfunktionen  $v_k(x)$  und ggf. der zugehörigen Lagerkräfte  $S_{k\lambda}$ , und dazu ist ein beträchtlicher Rechenaufwand notwendig.

### 3:6.3 Berechnung der dynamischen Einflußkoeffizienten mit Hilfe der Übertragungsmatrizen

Man kommt mit geringerem Rechenaufwand zum Ziel, wenn man zur Berechnung der Koeffizientenmatrix  $\delta$  in Gl. (30) das Verfahren der Übertragungsmatrizen anwendet, das in den letzten Jahren zur Berechnung der Biegeeigenfrequenzen beliebig abgesetzter Wellen mit Hilfe von Digitalrechnern benutzt wird (Vgl. Techn. Bericht Nr. 25)

Die Ermittlung der Eigenfrequenzen ist ein Eigenwertproblem. Lösungen der Differentialgleichung für die Auslenkung existieren nur für bestimmte Eigenfrequenzen, die von den Randbedingungen abhängen. Beim praktischen Rechnen werden diese Eigenwerte nach einem Restwertverfahren gesucht, das auf ein systematisches Probieren hinausläuft. Im Gegensatz dazu liegt der Auslenkung der rotierenden Welle infolge Unwucht eine inhomogene Differentialgleichung zugrunde. Bei vorgegebener Unwuchtbelastung ergibt sich bei jeder Rotationsfrequenz eine bestimmte erzwungene Auslenkung, die in einem einmaligen Rechengang bestimmt werden kann.

Der Rechengang als solcher wird im nächsten Kapitel ausführlicher beschrieben werden. Bei vorgegebener Unwuchtbelastung liefert das Verfahren die numerischen Werte aller 4 "Zustandsgrößen" an beliebig wählbaren Punkten der ausgebogenen Welle. Die Lagerkräfte sind durch die Querkraftsprünge an den Lagerstellen gegeben.

Die Berechnung der Einflußzahlen ist nun einfach eine rechnerische Nachbildung der "Tarierläufe".

1) Zunächst müssen die Auswuchtdrehzahlen, Anzahl und Lage der Ausgleichsebenen und die Meßgrößen gewählt werden.

2) Für die Drehzahl  $n_v$  werden nun an dem rechnerischen Modell des Läufers, der bis auf die Einzelunwucht  $U_i$  (in Ausgleichsebene  $i$ ) unwuchtfrei ist, die als Meßgrößen ausgewählten Zustandsgrößen berechnet, z.B. die Lagerkräfte  $L_{1i}^{(v)}$  und  $L_{2i}^{(v)}$ .

$$L_{1i}^{(v)} = p_{1i}^{(v)} U_i$$

$$L_{2i}^{(v)} = p_{2i}^{(v)} U_i$$

Hieraus ergeben sich die Einflußzahlen  $p_{1i}^{(v)}$  und  $p_{2i}^{(v)}$ . Ebenso wie bei der experimentellen Ermittlung der  $p_{\lambda i}^{(v)}$  sind bei  $n$  Ausgleichsebenen und  $N$  Auswuchtdrehzahlen  $n \cdot N$  Rechengänge erforderlich, um alle  $n^2$  Einflußzahlen zu berechnen.

3) Nun werden die Meßläufe bei den Drehzahlen  $n_v$  ( $v=1, \dots, N$ ) durchgeführt und am unausgewuchteten Läufer die Zustandsgrößen  $L_{\lambda}^{(v)}$  ( $\lambda=1, \dots, l$ ) gemessen.

4) Durch Auflösung des Systems der Bedingungsgleichungen (30) (für das Beispiel mit  $n=4$ ,  $l=2$ ,  $N=2$ )

$$p_{11}^{(1)} U_1 + p_{12}^{(1)} U_2 + p_{13}^{(1)} U_3 + p_{14}^{(1)} U_4 = - L_1^{(1)}$$

$$p_{21}^{(1)} U_1 + p_{22}^{(1)} U_2 + p_{23}^{(1)} U_3 + p_{24}^{(1)} U_4 = - L_2^{(1)}$$

$$p_{11}^{(2)} U_1 + p_{12}^{(2)} U_2 + p_{13}^{(2)} U_3 + p_{14}^{(2)} U_4 = - L_1^{(2)}$$

$$p_{21}^{(2)} U_1 + p_{22}^{(2)} U_2 + p_{23}^{(2)} U_3 + p_{24}^{(2)} U_4 = - L_2^{(2)}$$

können die erforderlichen Zusatzunwuchten  $U_i$  berechnet werden. Gegenüber dem von Hübner (5) angegebenen Verfahren hat die im folgenden Kapitel 4 beschriebene Berechnungsmethode den Vorteil, daß aus den Daten des Läufers die Einflußzahlen berechnet werden können, ohne daß die Eigenfunktionen vorher ermittelt werden müssen.

#### 4. Das Verfahren der Übertragungsmatrizen

Dieses ist ein numerisches Verfahren zur Berechnung der Werte der Zustandsgrößen an einzelnen Punkten der ausgebogenen Welle. Auf Grund der Voraussetzungen von Kap. 2.1 können wir jede

Komponentenrichtung für sich behandeln; die Zustandsgrößen der Biegung in der  $x-v$ -Ebene seien mit:

$v$  = Auslenkung,

$\varphi$  = Neigung

$M$  = Biegemoment,

$Q$  = Querkraft

bezeichnet.

Zwischen den Zustandsgrößen am Ende (Index  $i+1$ ) und am Anfang (Index  $i$ ) eines Abschnittes einer rotierenden, unwuchtigen Welle bestehen auf Grund der linearen inhomogenen Differentialgleichung (7) allgemein lineare Beziehungen der folgenden Art:

$$v_{i+1} = a_{11} v_i + a_{12} \varphi_i + a_{13} M_i + a_{14} Q_i + a_{15}$$

$$\varphi_{i+1} = a_{21} v_i + a_{22} \varphi_i + a_{23} M_i + a_{24} Q_i + a_{25}$$

$$M_{i+1} = a_{31} v_i + a_{32} \varphi_i + a_{33} M_i + a_{34} Q_i + a_{35}$$

$$Q_{i+1} = a_{41} v_i + a_{42} \varphi_i + a_{43} M_i + a_{44} Q_i + a_{45}$$

Unter Benutzung der Matrizenschreibweise kann man dieses System zu einer Gleichung zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} v \\ \varphi \\ M \\ Q \\ 1 \end{pmatrix}_{i+1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ \varphi \\ M \\ Q \\ 1 \end{pmatrix}_i \quad (53)$$

oder abgekürzt:

$$z_{i+1} = \mathcal{O}_{i+1} z_i. \quad (54)$$

$z_i = \begin{pmatrix} v \\ \varphi \\ M \\ Q \\ 1 \end{pmatrix}_i$  heißt der "Zustandsvektor" des  $i$ -ten Wellen-

punktes,  $\mathcal{O}_{i+1}$  die "Übertragungsmatrix" des  $(i+1)$ ten Wellenabschnittes.  $z$  und  $\mathcal{O}$  müssen gegenüber dem homogenen Fall (freie Schwingungen) um eine 5. Zeile erweitert werden, weil in den Gln. (52) die Glieder  $a_{15}, \dots, a_{45}$  auftreten. Die triviale Gleichung  $1=1$

in (53) ist nötig, damit die Beziehungen (52) in Form eines Matrizenproduktes geschrieben werden können.

Die Übertragungsmatrix eines Wellenabschnittes kann man dadurch erhalten, daß man die Differentialgleichung (7) für das betreffende Wellenstück integriert und die freien Konstanten in der Lösung durch die Zustandsgrößen am Anfang des Wellenstückes ausdrückt. Die wichtigsten Übertragungsmatrizen sind die folgenden:

1) Für ein massebehaftetes Wellenstück mit konstantem Querschnitt und über die Länge  $l$  konstanter Schwerpunktsexzentrizität  $e$ :

$$Q = \begin{pmatrix} C & lS & ac & als & (C-1)e \\ \kappa^4 s/l & C & aS/l & ac & \kappa^4 se/l \\ \kappa^4 c/a & \kappa^4 ls/a & C & lS & \kappa^4 ce/a \\ \kappa^4 S/al & \kappa^4 c/a & \kappa^4 s/l & C & \kappa^4 Se/al \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (55)$$

Hierbei bedeuten:

$$\kappa^4 = \Omega^2 l^4 \frac{m}{EJ}; \quad a = \frac{l^2}{EJ}$$

und  $C, S, c, s$  sind Abkürzungen für die sog. Rayleigh-Funktionen:

$$C = 1/2(\cosh \kappa + \cos \kappa); \quad c = 1/2(\cosh \kappa - \cos \kappa)$$

$$S = 1/2(\sinh \kappa + \sin \kappa); \quad s = 1/2(\sinh \kappa - \sin \kappa)$$

2) Für ein masseloses Wellenstück der Länge  $l$  mit konstantem Querschnitt:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & l & l^2/2EJ & l^3/6EJ & 0 \\ 0 & 1 & l/EJ & l^2/2EJ & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (56)$$

Sie geht aus der Matrix (55) durch den Grenzübergang  $\kappa \Rightarrow 0$  hervor.

3) Für einen Punkt (Feldlänge  $l = 0$ ), an dem sich eine Einzelmasse  $m$  und eine elastische Lagerung (Querfederkonstante  $c_Q$ , Drehfederkonstante  $c_M$ ) befinden:

$$\mathcal{O}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_M & 1 & 0 \\ -c_Q & +m\Omega^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (57)$$

Hierbei bedeutet  $e$  die Schwerpunktsexzentrizität der Einzelmasse. Will man die Wirkung einer Zusatzmasse  $m_z$  am Radius  $r$  berechnen, dann kann man voraussetzen, daß der Radius  $r$  groß gegenüber der Wellenauslenkung  $v$  ist. Wie man aus der obenstehenden Übertragungsmatrix (57) entnimmt, bestehen zwischen den Zustandsgrößen links und rechts der Zusatzwucht die Beziehungen

$$v_{i+1} = v_i ; \quad \varphi_{i+1} = \varphi_i ; \quad M_{i+1} = M_i$$

$$Q_{i+1} = Q_i + m_z \Omega^2 (v_i + r)$$

Wegen  $r \gg v_i$  ist mit guter Annäherung:

$$Q_{i+1} = Q_i + m_z r \Omega^2 = Q_i + U_z \Omega^2 ,$$

und die zugehörige Übertragungsmatrix vereinfacht sich zu

$$\mathcal{O}_{i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & U_z \Omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (58)$$

Da die Übertragungsmatrizen immer den in Gl. (53) angegebenen Aufbau haben, gewinnt man die Produktmatrix  $\mathcal{O}_{i+2} = \mathcal{O}_{i+1} \mathcal{O}_i$  aus der Matrix  $\mathcal{O}_i$  des links der Einzelmasse gelegenen Wellenabschnittes, indem man zum Element  $a_{45}$  von  $\mathcal{O}_i$  die Größe  $U_z \Omega^2$  addiert.

$$a_{45,i+2} = a_{45,i} + U_{z,i+1} \Omega^2$$

Der Rechengang zur numerischen Berechnung der Zustandsgrößen an allen Stellen  $i$  der Welle ist im Prinzip recht einfach.

Zunächst muß die Welle in Abschnitte jeweils konstanten Querschnitts aufgeteilt werden, wobei Punkte, an denen Einzelmassen oder Lager sitzen, Abschnitte mit der Länge Null dar-

stellen.

Man kann die relativ umständlich zu berechnende "Rayleigh-Matrix" (55) für massebehaftete Wellenstücke vermeiden, wenn man die Wellenmasse vereinfachend in einzelne Punktmassen an den Abschnittsenden konzentriert. Die dazwischenliegenden, nur noch elastischen Wellenstücke besitzen dann die einfache Übertragungsmatrix (56). Bei der Erstellung dieses Ersatzsystems müssen längere Wellenstücke so unterteilt werden, daß für jeden Abschnitt

$$\kappa = l \sqrt[4]{\frac{\Omega^2 \rho g}{EI}} \ll 1$$

ist; damit die Abweichung vom wirklichen System klein bleibt. Nach der Berechnung der Übertragungsmatrizen des Ersatzsystems geht die Durchrechnung vom linken Wellenende aus. Durch die Randbedingungen sind dort immer zwei Zustandsgrößen vorgeschrieben, im Falle homogener Randbedingungen zu Null. Der Zustandsvektor  $z_0$  am Wellenanfang enthält also noch zwei unbekannte Zustandsgrößen, z.B. bei gelenkiger Lagerung (s. Abb. 3) Neigung  $\varphi_0$  und Querkraft  $Q_0$ :

$$z_0 = (0 \quad \varphi_0 \quad 0 \quad Q_0 \quad 1)$$

Zur praktischen Rechnung schreibt man  $z_0$  am besten in der Form

$$z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \varphi_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} Q_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix} \cdot 1, \quad (59)$$

bei der man die unbekanntes Zustandsgrößen als Faktoren herauszieht.

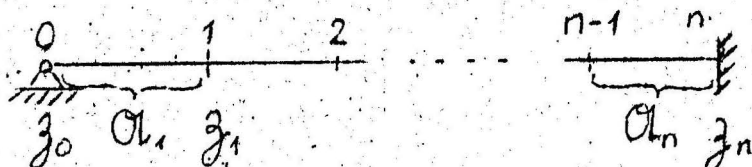


Abb. 3

Durch Multiplikation von  $z_0$  mit der Übertragungsmatrix  $A_1$  des 1. Wellenabschnittes erhält man den Zustandsvektor an der

Stelle 1:

$$z_1 = \mathcal{A}_1 z_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} z_0 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \\ 0 \end{pmatrix} \varphi_0 + \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \\ 0 \end{pmatrix} Q_0 + \begin{pmatrix} a_{15} \\ a_{25} \\ a_{35} \\ a_{45} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1$$

Durch fortgesetzte Multiplikation von  $z_0$  mit den Übertragungsmatrizen aller Wellenabschnitte bildet man den Zustandsvektor am Wellenende

$$z_n = b_{2n} \varphi_0 + b_{4n} Q_0 + b_{5n}$$

Hierin bedeuten  $b_{2n}$ ,  $b_{4n}$  und  $b_{5n}$  die durch Multiplikation mit  $\mathcal{A}_{ges}$  aus den drei Vektoren in Gl. (59) hervorgegangenen Spaltenvektoren, z.B.

$$b'_{2n} = ( b_{21,n} \quad b_{22,n} \quad b_{23,n} \quad b_{24,n} \quad 0 ).$$

Die Randbedingungen am Wellenende schreiben wieder zwei Zustandsgrößen vor, z.B. an einem eingespannten Wellenende (s. Abb. 3)

$$v_n = b_{21,n} \varphi_0 + b_{41,n} Q_0 + b_{51,n} = 0$$

$$\varphi_n = b_{22,n} \varphi_0 + b_{42,n} Q_0 + b_{52,n} = 0.$$

Dies ergibt gerade zwei Bestimmungsgleichungen für die beiden unbekannt Zustandsgrößen am Wellenanfang. Sind  $\varphi_0$  und  $Q_0$  aus diesen ermittelt worden, dann sind sämtliche Zustandsvektoren

$$z_i = b_{2i} \varphi_0 + b_{4i} Q_0 + b_{5i}$$

der Welle bekannt.

Für ein querelastisches, gelenkiges Lager am Wellenanfang würden die Randbedingungen

$$\begin{aligned} M_0 &= 0 \\ Q_0 &= -c_{Q_0} v_0 \end{aligned}$$

lauten; der Zustandsvektor am Wellenanfang hätte also die Form

$$z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -c_{Q_0} \\ 0 \end{pmatrix} v_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} M_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1$$

Entsprechend wäre die Lagerungsbedingung für ein querelastisches, eingespanntes Wellenende:

$$\begin{aligned} \varphi_n &= 0 \\ Q_n &= -c_{Qn} v_n \end{aligned}$$

Der oben beschriebene einfache Rechengang kann allerdings nicht mehr angewendet werden, wenn starre Zwischenlager vorhanden sind. An einer solchen Stelle versagen die bisherigen Übertragungsgleichungen; denn in der für ein elastisches Lager geltenden Gleichung

$$Q_{i+1} = Q_i - c_{Q_i} v_i$$

wäre  $v_i = 0$  und  $c_{Q_i} = \infty$ . Daher muß bei einer starren Lagerstelle der Rechengang unterbrochen werden. Aus der Zwischenbedingung

$$v_i = 0$$

kann man eine der Anfangsunbekannten eliminieren, z.B. bei gelenkig gelagertem Wellenanfang  $\varphi_0$  durch die Gleichung

$$v_i = b_{21i} \varphi_0 + b_{41i} Q_0 + b_{51} = 0.$$

Als neue Unbekannte kommt stattdessen auf Grund der Beziehung

$$Q_{i+1} = Q_i + \Delta Q$$

die Lagerkraft  $\Delta Q$  hinzu.

Ist

$$z_i = b_{21} \varphi_0 + b_{4i} Q_0 + b_{5i}$$

der Zustandsvektor unmittelbar vor dem Zwischenlager, dann ergibt sich daraus für den Zustandsvektor unmittelbar hinter dem Zwischenlager zu



$$z_{i+1} = \left( k_{4i} - \frac{b_{41}}{b_{21}} k_{2i} \right) Q_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot Q + \left( k_{5i} - \frac{b_{51}}{b_{21}} k_{2i} \right) \cdot 1$$

Es bleiben also bis zum Wellenende in der Rechnung immer zwei Unbekannte, die dann durch die beiden Randbedingungen am Ende festgelegt werden.

Auch bei sehr steifen Zwischenlagern empfiehlt es sich, zur Vermeidung numerischer Schwierigkeiten, ähnlich wie bei starren Zwischenlagern vorzugehen. Der Rechnungsgang wird unterbrochen, und als Zwischenbedingung setzt man jetzt

$$v_{i+1} = h_Q Q_{i+1} \text{ mit } h_Q = 1/c_Q$$

Mit Hilfe dieser Gleichung wird eine der Anfangs-Unbekannten eliminiert, und wegen

$$Q_{i+1} = Q_i + \Delta Q$$

kommt die neue Unbekannte  $\Delta Q$  hinzu.

Das Verfahren der Übertragungsmatrizen ermöglicht es auch, in sehr einfacher Weise die Kreiselwirkung von Scheiben in die Rechnung aufzunehmen. An die Stelle der Übertragungsmatrix(57) für eine Punktmasse tritt lediglich die Matrix für eine Einzelscheibe:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta \Omega^2 & 1 & 0 & m \Omega^2 f \\ m \Omega^2 & 0 & 0 & 1 & m \Omega^2 e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (60)$$

Hierbei bedeuten:  $\Theta$  das für die Kreiselwirkung maßgebende Trägheitsmoment,  $m$  die Masse der Scheibe,  $e$  die Schwerpunktsexzentrizität und  $f$  die evtl. vorhandene ursprüngliche Schiefstellung der Scheibe d.h. den Winkel zwischen geometrischer Scheibenachse und Wellenachse.

Auch die Wirkung von Dämpfungskräften auf die dynamische Durchbiegung läßt sich mit Hilfe des Matrizenverfahrens verhältnismäßig einfach erfassen (vgl. (8)). In diesem Falle werden die Zustandsgrößen beider Koordinatenrichtungen miteinander gekoppelt.

