Ein allgemeiner Satz über den Zusammenhang zwischen Eigenfrequenzen und Gruppenlaufzeit in linearen verlustfreien Dispersionssystemen.

(Mitteilung aus dem Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung in Berlin.)

Von **H. G. Baerwald**, Berlin.

Bekanntlich sind die Eigenfrequenzen einer idealen verlustfreien Telegraphenleitung der Länge L, die am Ende offen (bzw. kurzgeschlossen) ist, die ungeraden (bzw. ganzen) Vielfachen der Grundfrequenz:

$$\omega_0 = \frac{\pi\, c}{2L} \left(\text{bzw. } \omega_0 = \frac{\pi\, c}{L}\right), \tag{1}$$

wenn c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit (Lichtgeschwindigkeit) bedeutet; das Entsprechende gilt für eine offene (bzw. gedeckte) Pfeife, für eine schwingende Saite usw. Läßt man die Länge L unbegrenzt wachsen, so liegen also die Eigenfrequenzen auf der reellen Achse der komplexen ω-Ebene dicht wie die rationalen Zahlen. Man kann dann in asymptotischem Sinne von einer relativen „Dichte" der Eigenfrequenzen:

$$\mathfrak{D} = \frac{\pi}{\lim\limits_{L \to \infty} \{L \cdot \Delta\,\omega\,(\omega;\, L)\}} \tag{2}$$

sprechen; hierin bedeutet $\Delta\,\omega\,(\omega;\, L)$ den von L sowie im allgemeinen auch von der betrachteten Stelle ω der reellen Frequenzachse abhängigen Abstand zweier aufeinanderfolgender Eigenfrequenzen. Man erkennt leicht, daß der Grenzwert in (2) im allgemeinen wirklich existiert; $\mathfrak{D}$ hat die Dimension einer reziproken Geschwindigkeit und physikalisch insofern die Bedeutung einer „Dichte", als es den — π-fachen — Beitrag an Eigenfrequenzen darstellt, den die Längeneinheit des Systems je Einheit der Frequenzachse liefert. In dem oben betrachteten Fall der idealen Leitung wird einfach

$$\mathfrak{D} = \text{const} = \frac{1}{c}. \tag{3}$$

Dieser Begriff der asymptotischen Dichte der Eigenfrequenzen besitzt nun aber einen viel höheren Grad von Allgemeinheit, als dem letztgenannten trivialen Fall entspricht, und es entsteht die Frage nach seiner physikalischen Bedeutung in beliebigen linearen Systemen. Unter einem linearen System ist allgemein eine kontinuierliche oder diskontinuierliche Aufeinanderfolge von gleichen Elementgebilden zu verstehen, in denen Vorgänge stattfinden können, welche linearen Differentialgleichungen gehorchen, für die also das Superpositionsprinzip gilt. Beispiele für kontinuierliche Systeme sind: elektrische und akustische Leitung, Krarupkabel, Zylinderspule mit Windungskapazität, optische Medien, Heavisideschicht; für diskontinuierliche: Siebketten, Kreuzgliedkettenleiter; für gemischte Systeme: Pupinleitung, Seil mit Knoten, Tonfilter, Kristallgitter. An anderer Stelle[1]) ist nun gezeigt worden, daß den linearen Systemen gewisse Grundeigenschaften gemeinsam sind: Wegen der Anwendbarkeit des Superpositionsprinzips lassen sich die Vorgänge in ihnen aus harmonischen Wellen zusammensetzen, also, wie es von der allgemeinen Vierpoltheorie her bekannt ist, mittels zweier charakteristischer Größen: Fortpflanzungsmaß $k\,(\omega)$ und Wellenwiderstand $\mathfrak{Z}\,(\omega)$, erschöpfend beschreiben. $k\,(\omega)$ und $\mathfrak{Z}\,(\omega)$ haben ferner, als analytische Funktionen der komplexen Frequenzvariablen ω betrachtet, die grundlegende Eigenschaft, nur gemeinsame Verzweigungspunkte zweiter Ordnung zu besitzen, die in dem im folgenden betrachteten Fall, daß keine Dämpfungsverluste vorhanden sind, sämtlich auf der reellen Achse symmetrisch zu $\omega = 0$ liegen. Sie werden allgemein als „Grenzfrequenzen" bezeichnet, da sie gewisse Intervalle der reellen Achse voneinander trennen, die man „Durchlässigkeits-" und „Sperrgebiete" (kurz: D- und S-Gebiete) zu nennen pflegt: in jenen sind k und $\mathfrak{Z}$ reell, harmonische Wellen von in D-Gebieten liegenden Frequenzen pflanzen

[1]) H. G. Baerwald, Über die Fortpflanzung von Signalen in dispergierenden Systemen. Ann. d. Phys. [5]; I. Teil: **6**, S. 295, 1930; II. Teil: **7**, S. 731, 1930; III. Teil: **8**, S. 565, 1931.

sich ungedämpft fort, in diesen sind k und $\mathfrak{Z}$ imaginär, es findet Energiereflexion statt. In den oben genannten Arbeiten wurde gezeigt, daß sich ein Signal, welches aus dem plötzlichen Einschalten einer sinusförmigen Erregung der in einem D-Gebiet gelegenen Frequenz α besteht, in einem solchen System auf große Entfernungen mit der Gruppengeschwindigkeit

$$v_g(\alpha) = \frac{1}{\left(\frac{d k}{d \omega}\right)_{\omega=\alpha}} \tag{4}$$

ausbreitet[2]), also eine „Laufzeit" von etwa

$$t_\alpha = x \cdot k'(\alpha) \tag{5}$$

hat, wenn x die in dem System zurückgelegte Strecke — bei diskontinuierlichen Systemen die passierte Gliederzahl — bedeutet. Dabei flacht sich die steile Front des Signals ab: um t_α herum findet ein „Aufschaukelprozeß" statt mit der zeitlichen Ausdehnung

$$\vartheta(\alpha) = c \sqrt{\frac{|k''(\alpha)|}{2!} x}; \quad c \approx 5 \tag{6a}$$

oder, wenn $k''(\omega)$ in der Nähe von $\omega = \alpha$ eine Nullstelle hat, von

$$\vartheta_1(\alpha) = c_1 \sqrt[3]{\frac{|k'''(\alpha)|}{3!} x}; \quad c_1 \approx 4{,}1 \tag{6b}$$

bzw. allgemein, wenn dort k'' eine Nullstelle $p$ter Ordnung hat:

$$\vartheta_p(\alpha) = c_p \left[\frac{|k^{(p+2)}(\alpha)|}{(p+2)!} x\right]^{\frac{1}{p+2}}; \quad c_p \rightarrow \pi. \tag{6c}$$

Die Frequenzabhängigkeit der Gruppenlaufzeit $\frac{d k}{d \omega}$ eines linearen Systems involviert dessen „Dispersion"; das denkbar einfachste System, das der idealen Leitung, ist dispersionsfrei: in ihm haben alle Frequenzen die gleiche Gruppengeschwindigkeit

$$\frac{1}{\frac{d k}{d \omega}} = c.$$

Wir zeigen nun, daß zwischen dem oben eingeführten Begriff der Dichte der Eigenfrequenzen und den für die Signalausbreitung charakteristischen Größen: Gruppenlaufzeit und Aufschaukelzeit ein enger Zusammenhang besteht, aus dem heraus die Dispersionsverzerrungen, die bei der Fortpflanzung bei Signalen in linearen Systemen auftreten, unmittelbare Anschaulichkeit gewinnen. Hierzu bilden wir nach (2) die Größe $\mathfrak{D}$ allgemein. Wir gehen von einem harmonischen Schwingungszustand der Frequenz ω in einem System aus. Bezeichnen U und I die beiden in einem solchen stets auftretenden allgemeinen Variablen, z. B. Strom und Spannung, elektrischer und magnetischer Vektor, Druck und Mediumstrom usw., sowie x die Ortskoordinate bzw. die Gliednummer im System, so setzt sich dieser Schwingungszustand bekanntlich aus einer fort- und rückschreitenden Welle zusammen:

$$\left.\begin{aligned} U &= \left\{U_1^{(\omega)} e^{-i k(\omega) x} + U_2^{(\omega)} e^{+i k(\omega) x}\right\} e^{i \omega t}, \\ \mathfrak{Z}(\omega) \cdot J &= \left\{U_1^{(\omega)} e^{-i k(\omega) x} - U_2^{(\omega)} e^{+i k(\omega) x}\right\} e^{i \omega t}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

worin $k(\omega)$ und $\mathfrak{Z}(\omega)$ Fortpflanzungsmaß und Wellenwiderstand sind. Am Ende des Systems (Länge L) besteht als Randbedingung zwischen den Größen U und I sowie deren zeitlichen Ableitungen irgendeine lineare homogene Beziehung, die sich symbolisch als lineare Abschlußimpedanz $i\,\mathfrak{Z}_a(\omega)$ dokumentiert; dann liegt am Anfang des Systems ($x = 0$) das Verhältnis $\frac{U(0)}{J(0)}$, sein komplexer Eingangswiderstand $i\,\mathfrak{Z}_e$ fest, und zwar folgt für diesen aus (7) in elementarer Rechnung:

$$\frac{\mathfrak{Z}_e}{\mathfrak{Z}} = \frac{\mathfrak{Z} \sin k L + \mathfrak{Z}_a \cos k L}{\mathfrak{Z} \cos k L - \mathfrak{Z}_a \sin k L}. \tag{8}$$

Die Eigenfrequenzen des Systems sind nun definiert als Null- oder Unendlichkeitsstellen des offenen ($\mathfrak{Z}_a = \infty$) bzw. kurgeschlossenen ($\mathfrak{Z}_a = 0$) Systems. Man erhält also, gleichgültig, welche spezielle Definition man wählt, als Eigenfrequenzen:

1. die Stellen:

$$\mathfrak{Z} = 0, \quad \mathfrak{Z} = \infty, \tag{9}$$

das sind (vgl. Baerwald l. c.) die Verzweigungsstellen von $\mathfrak{Z}$, d. h. die Grenzfrequenzen des Systems (im Grenzfall auch Doppelwurzeln und -pole von $\mathfrak{Z}$);

2. die Stellen:

$$k L = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \pm \frac{3\pi}{2}, \quad \pm \frac{5\pi}{2} \quad \ldots\,.$$

oder: $$k L = 0, \quad \pm \pi, \quad \pm 2\pi \quad \ldots\,. \tag{10}$$

Während die Stellen (9) eine von L unabhängige endliche Anzahl diskreter Frequenzen darstellen, wächst die Zahl der Stellen (10) mit L an; diese letzteren sind also diejenigen, welche die Dichte $\mathfrak{D}$ definieren. Es gilt nämlich für großes L:

[2]) Vgl. auch Küpfmüller, Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Konzern 5, S. 51, 1926.

$$\varDelta\,\omega \to \left(\frac{\mathrm{d}\,k}{\mathrm{d}\,\omega}\right)^{-1} \cdot \varDelta\,k; \quad \varDelta\,k = \frac{\pi}{L} \text{ [nach (10)]},$$

also nach (2):

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathrm{d}\,k}{\mathrm{d}\,\omega}: \tag{11}$$

Die asymptotische Dichte der Eigenfrequenzen eines linearen Systems ist gleich seiner Gruppenlaufzeit je Längeneinheit bzw. je Glied.

Aus diesem bemerkenswerten Ergebnis folgt zunächst, daß die Eigenfrequenzen sämtlich in den D-Gebieten liegen, da nur dort k reell, also (10) erfüllt ist, eine seit langem bekannte Tatsache[3]). Die Eigenfrequenzen werden also, anders als bei einem System, das wie die ideale Leitung oder die widerstandsreziproken Kreuzgliedkettenleiter keine S-Gebiete hat, wo also die Eigenfrequenzen über die ganze reelle Achse hin verteilt sind, gleichsam aus den S-Gebieten in die D-Gebiete „hinübergepreßt"; das legt die Vermutung nahe, daß sie sich an den Grenzfrequenzen, die nach (9) selbst dazu gehören, stauen, d. h. Häufungsstellen haben werden. Nach (11) müßten also die Grenzfrequenzen unendlich große Gruppenlaufzeit haben, was in der Tat der Fall ist (siehe Baerwald l. c.).

Die anschauliche Bedeutung von (11) ist aber weiterreichend: Wir denken uns eine größere Anzahl miteinander gekoppelter Schwingungskreise und dieses Gebilde durch einen angeschalteten Generator mit innerem Widerstand plötzlich sinusförmig erregt. Dann wird sich ein stationärer Schwingungszustand um so später einstellen, je größer die Anzahl der Kreise ist, deren Eigenfrequenzen in der Nähe der Generatorfrequenz liegen. Diese Überlegung übertragen wir auf ein lineares System. Legen wir plötzlich an seinen Anfang die Frequenz α, so wird sich dieses Signal um so langsamer ausbreiten müssen, je dichter die Eigenfrequenzen in der Nähe von $\omega = \alpha$ liegen, da gleichsam dann mehr energiespeichernde Resonatoren auf Amplituden zu bringen sind, aber die Energie hierzu immer durch die davorliegenden Elemente des Systems transportiert werden muß; die Gl. (11), die diesen Zusammenhang bestätigt, ist also eine physikalisch sehr anschauliche Erklärung des Begriffs der Laufzeit.

Nun enthält aber ein plötzlich einsetzendes Sinussignal, das ja bekanntlich durch ein „Hakenintegral"

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty \smile +\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \alpha}\,\mathrm{d}\,\omega = \begin{Bmatrix} 0; & t < 0 \\ e^{i\alpha t}; & t > 0 \end{Bmatrix} \tag{12}$$

dargestellt wird, alle Frequenzen von $-\infty$ bis $+\infty$, davon in erheblichem Maße nur die um $\omega = \alpha$ herum. Da nun die Dichte der Eigenschwingungen selbst von der Frequenz abhängt, werden die Frequenzen nahe oberhalb α und die nahe unterhalb α etwas verschiedene Laufzeiten haben; durch diese Aufspaltung des Signals in seinen Spektralkomponenten muß die ursprüngliche steile Front abgeflacht werden, und zwar um so stärker, je größer diese Streuung bei α, also

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{D}}{\mathrm{d}\,\omega}\right)_{\omega=\alpha} = k''(\alpha) \tag{13}$$

ist. Aus Dimensionsgründen kann diese „Aufschaukelzeit" nur proportional

$$\sqrt{|\mathfrak{D}'(\alpha)| \cdot x} \tag{14}$$

(x = zurückgelegte Strecke bzw. Gliederzahl) sein, womit wir auf (6a) zurückkommen. Wenn $\mathfrak{D}'$ gerade in der Nähe von α verschwindet, so macht man sich leicht klar, daß dann für die Größe der Aufschaukelzeit in erster Linie $\mathfrak{D}''(\alpha)$ maßgeblich sein muß bzw. bei einer Nullstelle höherer Ordnung die erste nicht verschwindende Ableitung. Aus Dimensionsgründen wird man dann wieder auf (6b), (6c) geführt.

Auch dafür, daß den Begriffen der Lauf- und Aufschaukelzeit nur eine asymptotische Bedeutung zukommt (vgl. Baerwald l. c.), gibt der Begriff der Eigenschwingungsdichte eine anschauliche Erklärung: Ist das System zu kurz, so liegen nach (10) seine Eigenschwingungen so weit voneinander entfernt, daß ihre „Dichte" zu grob definiert wäre, als daß man aus ihr genauere Aussagen herleiten dürfte. Bei Untersuchung der Einschwingvorgänge in kurzen Systemen muß man also die Eigenfrequenzen diskret betrachten, womit man zur Heavisideschen Einschwingformel („expansion-theorem"[4])) geführt wird. Die „makroskopischen" Begriffe der Lauf- und Aufschaukelzeit werden dann aus analogen Gründen unzureichend, wie

[3]) Vgl. z. B. K. W. Wagner, Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Konzern **2**, S. 189, 1922.

[4]) Vgl. z. B. J. R. Carson, Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung. Übersetzt von Ollendorf und Pohlhausen. Berlin, J. Springer, 1929.

der Energieverteilungssatz in der Quantentheorie oder der Begriff der Entropie bei Systemen mit zu wenigen Elementen versagt.

Zusammenfassung.

Die Eigenfrequenzen eines linearen dämpfungsfreien Systems wachsen mit seiner „Länge" L. Für $L \to \infty$ liegen sie nicht mehr diskret, sondern kontinuierlich verteilt, und man kann dann eine „Dichte" derselben definieren. Mit Hilfe dieser Größe, die sich gleich der Gruppenlaufzeit je Längeneinheit bzw. je Glied des Systems erweist, kann man die charakteristischen Dispersionserscheinungen, die bei der Ausbreitung nichtstationärer Vorgänge in linearen Systemen auftreten, in zwanglos anschaulicher Weise und ohne mathematische Rechnung voraussagen und deuten.

Diese Arbeit wurde mir durch Gewährung eines Stipendiums von der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft ermöglicht, der ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen möchte.

(Eingegangen am 21. November 1930.)