

Der Geltungsbereich der Strecker-Feldtkellerschen Matrixgleichungen von Vierpolsystemen.

(Mitteilung aus dem Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung, Berlin.)

Von H. G. Baerwald, Berlin.

DK 621.394.11.01

Strecker und Feldtkeller haben seinerzeit Formeln zur Berechnung von Vierpolen angegeben, die sich aus einfacheren Vierpolen zusammensetzen lassen¹⁾. Sie charakterisierten den Vierpol durch geeignete Parameter in Form von einander äquivalenter Koeffizientenschemata (Systemen, Matrizen) und stellten für die drei Fundamentalkombinationen zweier Vierpole, aus denen sich die allgemeinen zusammensetzen lassen, die Kaskaden-, Parallel- und Serienschaltung (vgl. Abb. 1 bis 3), folgende Sätze auf:

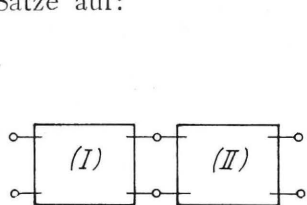


Abb. 1. Kaskadenschaltung zweier Vierpole.

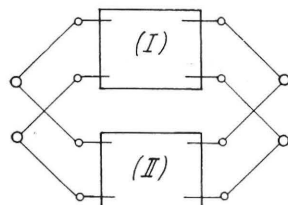


Abb. 2. Parallelschaltung zweier Vierpole.

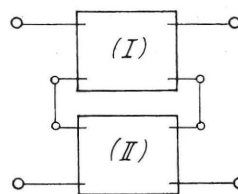


Abb. 3. Serienschaltung zweier Vierpole.

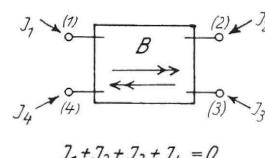


Abb. 4. Vierpol.

Bezeichnet man die Einzel-Vierpole mit (I), (II), ihre Kettensysteme²⁾ mit $\|\mathfrak{A}^{(I)}; (II)\|$, Leitwertsysteme mit $\|\mathfrak{Y}^{(I)}; (II)\|$ und Widerstandssysteme mit $\|\mathfrak{Z}^{(I)}; (II)\|$, so wird für den zusammengesetzten Vierpol

$$\|\mathfrak{A}\| = \|\mathfrak{A}^{(I)}\| \cdot \|\mathfrak{A}^{(II)}\| \text{ bei Kaskadenschaltung,} \quad (1)$$

$$\|\mathfrak{Y}\| = \|\mathfrak{Y}^{(I)}\| + \|\mathfrak{Y}^{(II)}\| \text{ bei Parallelschaltung,} \quad (2)$$

$$\|\mathfrak{Z}\| = \|\mathfrak{Z}^{(I)}\| + \|\mathfrak{Z}^{(II)}\| \text{ bei Serienschaltung} \quad (3)$$

von (I) und (II). Diese Gleichungen sind seither öfters zur Berechnung komplizierterer Übertragungssysteme mit Erfolg verwendet worden³⁾. Während (1) keinerlei spezielle, nicht in Abb. 1 zum Ausdruck kommende Voraussetzungen zugrunde liegen, sind jedoch (2) und (3) unter der Annahme abgeleitet, daß sich jeder Vierpol auch in der zusammengesetzten Schaltung nach Abb. 2 und 3 als „Zweiklemmenpaar“⁴⁾ verhält, d. h. daß

$$I_1 + I_4 = 0 \text{ und damit } I_2 + I_3 = 0 \quad (4)$$

gilt (s. Abb. 4). Strecker und Feldtkeller haben besonders darauf hingewiesen (SF S. 106 unten), daß hierauf bei der Reihen- und Parallelschaltung von Vierpolen zu achten ist: bei Anwendung von (2), (3) sollen für die Einzel-Vierpole solche Ersatzschemata gewählt werden, die keine überflüssigen, d. h. für den Betrieb als Zweiklemmenpaar uninteressanten Elemente enthalten, da bei solchen stets zwei nicht zu einem Paar gehörige Klemmen kurzgeschlossen werden (z. B. T- oder II-Schaltung), und diese beiden müssen bei allen Teilvierpolen entsprechend sein.

Vor kurzem wurde von Selach⁵⁾ darauf hingewiesen, daß die Voraussetzung (4) im allgemeinen nicht erfüllt, also die Gleichungen (2), (3) nicht anwendbar seien. Selach diskutiert zahlreiche

¹⁾ ENT 6, 93, 1929. Diese Arbeit soll im folgenden kurz als „SF“ zitiert werden.

²⁾ Bezeichnungen s. bei SF, S. 101.

³⁾ Feldtkeller u. Strecker, Arch. f. Elektrot. 24, 425, 1930; Feldtkeller, Zeitschr. f. Hochfr.-Techn. 35, 45, 1930; Feldtkeller u. Kautter, ENT 8, 93, 1931.

⁴⁾ Diese sehr treffende Bezeichnung wurde von Hausrath vorgeschlagen; vgl. SF, S. 96.

⁵⁾ ENT 8, 297, 1931.

Schaltungsarten, bei denen diese Gleichungen gelten, und solche, bei denen sie nicht gelten. Als prägnantestes Beispiel für den zweiten Fall, welches ganz offenbar den eben erwähnten von SF berührten Vorsichtsmaßregeln zuwiderläuft, sei die Parallelschaltung von Vierpol (ohne Kurzschluß zwischen zwei Klemmen) und Dreipol genannt; bei dieser wird, wenn z. B. die Anordnung Abb. 5 zugrunde gelegt wird, durch den Kurzschluß (3b) — (4b) auch (3a) mit (4a) verbunden, ein dazwischen liegender Widerstand würde also im Widerspruch zu (2) gar nicht in die Parameter des zusammengesetzten Vierpols eingehen. — Allgemeingültige Kriterien für das Bestehen der Beziehungen (2), (3) bei Kombinationen beliebiger Vierpole sind indessen von Selach nicht angegeben worden.

In Anbetracht der grundlegenden Bedeutung, welche die Gleichungen (2) und (3) für die Berechnung komplizierterer Vierpole haben, ist es wohl nicht überflüssig, die allgemeinen Voraussetzungen klarzustellen, unter denen sie gelten. Es ist von vornherein klar, daß diese nicht allein auf solchen Eigenschaften der Vierpole beruhen können, die beim Betrieb als Zweiklemmenpaar in der Richtung „B“ (s. Abb. 4) zum Ausdruck kommen, wie das Beispiel Abb. 5 und auch alle anderen von Selach behandelten Schaltungen deutlich zeigen. Es wird sich somit empfehlen, von einem möglichst allgemeinen Ersatzschema des Vierpols auszugehen. Zunächst zur Terminologie. Um

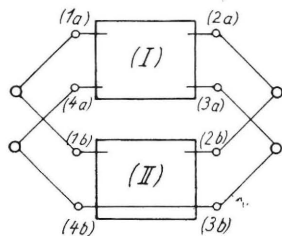


Abb. 5. Parallelschaltung von Vierpol (I) und Dreipol (II).

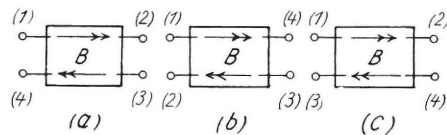


Abb. 6. Vierpol in drei verschiedenen Zweiklemmenpaarschaltungen.

vor Verwechslungen sicher zu sein, soll für solche Gebilde, die man gewöhnlich als „Vierpole“ anzusprechen pflegt, wie schon oben die Bezeichnung „Zweiklemmenpaar“ gewählt werden, das sind also Netzwerke mit 4 Klemmen, die als paarweise zusammengehörig angesehen werden — d. h. paarweise entgegengesetzt gleiche Einströmungen haben —, und bei denen nur diejenigen Eigenschaften interessieren, welche zu der hierdurch

bestimmten Betriebsrichtung gehören; solche Zweiklemmenpaare können bekanntlich, falls für sie der Umkehrungssatz⁶⁾ gilt, was im folgenden stets vorausgesetzt werde, durch 3 Parameter vollständig geschrieben werden. Im Gegensatz hierzu soll als „Vierpol“ ein Netzwerk mit 4 Klemmen, in die beliebige äußere Einströmungen I_1 bis I_4 mit $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$ stattfinden können, bezeichnet werden.

Ein Vierpol kann auf 3 verschiedene Weisen als Zweiklemmenpaar betrieben werden, wie Abb. 6 zeigt. Da jedes Zweiklemmenpaar 3 unabhängige Parameter enthält, müßte ein Vierpol durch 9 Parameter charakterisiert sein; doch ist anzunehmen, daß zwischen diesen noch Beziehungen bestehen^{6a)}. Wir brauchen eine Ersatzschaltung für den allgemeinen Vierpol⁷⁾, welche keine überflüssigen Elemente enthält. Hierzu gehen wir von dem Satz⁸⁾ aus, daß jedes lineare Schaltungsnetz mit s äußeren Anschlüssen durch ein vollständiges s -Eck ersetzt werden kann, d. h. durch $\binom{s}{2}$ Impedanzen, welche jede Ecke mit jeder anderen ver-

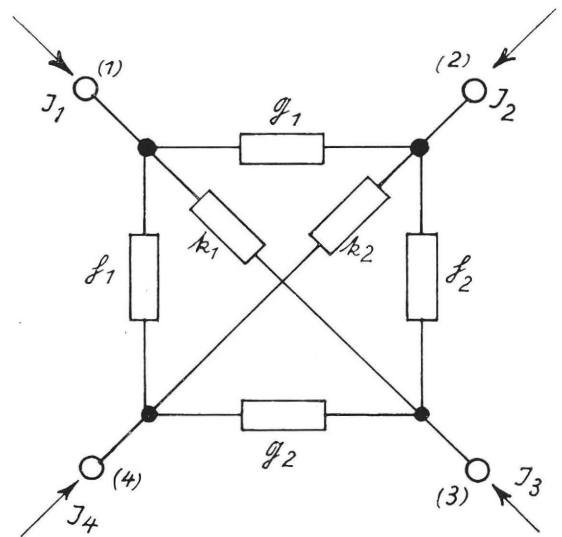


Abb. 7. Vollständiges Viereck.

⁶⁾ S. z. B. Maxwell, Lehrbuch der Elektrizität, Springer 1883, I Art. 282; G. Kirchhoff, Ann. d. Phys. 72, 497 1847; SF S. 102; König, ENT 8, 304, 1931.

^{6a)} Anm. bei der Korrektur: An dieser Stelle sei auf eine inzwischen erschienene Arbeit von H. König hingewiesen: „Der Vierpol und seine speziellen Schaltungen“, Helv. Phys. Acta 4, 303, 1931, welche die den allgemeinen Vierpol betreffenden Fragen auf gruppentheoretischer Grundlage sehr allgemein behandelt, und so mit meiner Arbeit mannigfache Berührungspunkte hat.

⁷⁾ Die Gültigkeit des Umkehrungssatzes wird vorausgesetzt (s. o.).

⁸⁾ J. Rosen, Journ. Inst. Electr. Engin. 62, 916, 1924.

binden, und zwar enthält dieses Ersatzschema im allgemeinen Falle keine überflüssigen Elemente⁹⁾. Der Rosensche Satz beruht auf einem Umwandlungssatz von Küpfmüller¹⁰⁾ und wurde von Wallot¹¹⁾ zum erstenmal auf den Vierpol angewendet. Abb. 7 zeigt ein solches vollständiges Viereck [Ecken (1) bis (4)] mit den komplexen Leitwerten $g_1, g_2, h_1, h_2, f_1, f_2$. Es empfiehlt sich, von den Leitwerten und nicht von den Impedanzen auszugehen, weil die einfachste Ausartung des vollständigen Vierecks, nämlich der Kurzschluß von 2 Klemmen (Unendlichwerden eines Teilleitwerts), zu der bekannten II- bzw. Dreieckschaltung mit 3 Parametern führt, welche unmittelbar mit der Leitwertmatrix $\|\mathfrak{Y}\|$ (SF S. 101) eines Zweiklemmenpaares zusammenhängt. Dagegen kommt man nicht in gleich einfacher Weise auf die zu dieser duale, mit der Widerstandsmatrix $\|\mathfrak{Z}\|$ zusammenhängende T- bzw. Sternschaltung. Dazu ist zu bemerken, daß das vollständige Viereck zu sich selbst dual ist; denn jeder Knoten ist dreifach, ebenso gehört jeder Leitwert zu 3 unabhängigen Umläufen. Übrigens hat das Viereck als einziges vollständiges n -Eck diese Eigenschaft, da ein solches $(n-1)$ Knoten und $\binom{n-1}{2}$ Umläufe hat und die Gleichung

$$\binom{n-1}{2} = n-1 \quad (5)$$

(außer der trivialen $n=1$) nur die Lösung $n=4$ besitzt.

An einen Vierpol können von außen 3 unabhängige Spannungen gelegt oder 3 unabhängige Einströmungen angeschlossen werden. Zwischen 3 von den 4 Einströmungen I_1 bis I_4 (Abb. 7) und 3 willkürlich ausgewählten Spannungen bestehen 3 unabhängige lineare Gleichungen, aus denen wegen der Beziehung $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$ eine vierte für die noch fehlende Einströmung folgt. Wählt man als unabhängige Spannungen V_{12}, V_{14} und V_{23} [V_{ik} = komplexe Potentialdifferenz zwischen Ecke i und Ecke k], so wird, wie man leicht nachrechnet [vgl. Wallot l. c. S. 123]:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= (g_1 + f_1) V_{12} && + h_1 V_{14} && + f_1 V_{23} \\ I_2 &= -(g_1 + f_2) V_{12} && + f_2 V_{14} && + h_2 V_{23} \\ I_3 &= -(g_2 + f_1) V_{12} && + g_2 V_{14} - (g_2 + f_1 + h_2) V_{23} \\ I_4 &= -(g_2 + f_2) V_{12} - (g_2 + h_1 + f_2) V_{14} && + g_2 V_{23} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Betreibt man nun den Vierpol als Zweiklemmenpaar in der in Abb. 6a gekennzeichneten Richtung, so gilt (4); damit kann man aus (6) V_{12} eliminieren und erhält, wenn man in üblicher Weise die Bezeichnungen

$$I_1 = -I_4 \equiv I'_1; \quad -I_2 = I_3 \equiv I'_2; \quad V_{14} \equiv V'_1; \quad V_{23} \equiv V'_2$$

einführt, die Leitwertgleichungen des Klemmenpaares

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I'_1 \\ I'_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathfrak{Y}_{11} & \mathfrak{Y}_{12} \\ \mathfrak{Y}_{21} & \mathfrak{Y}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix} \quad [\text{Schreibweise wie bei SF}] \end{aligned} \quad (7a)$$

mit der Matrix

$$\|\mathfrak{Y}\| = \begin{pmatrix} h_1 + \frac{(g_1 + f_1)(g_2 + f_2)}{g_1 + g_2 + f_1 + f_2} & -\frac{g_1 g_2 - f_1 f_2}{g_1 + g_2 + f_1 + f_2} \\ +\frac{g_1 g_2 - f_1 f_2}{g_1 + g_2 + f_1 + f_2} & -h_2 - \frac{(g_1 + f_2)(g_2 + f_1)}{g_1 + g_2 + f_1 + f_2} \end{pmatrix} \quad (7b)$$

und daraus unmittelbar die Leitwerte des Ersatz-II-Gliedes (SF Abb. 6, Tafel 4). Entsprechend erhält man die Leitwertparameter für die Betriebsrichtungen von Abb. 6b und 6c durch Vertauschung der h -Glieder mit den g bzw. f . Umgekehrt kann man die Leitwerte g_1 bis f_2 durch Scheinwiderstandsmessungen bestimmen. Z. B. ist g_1 der Längsleitwert \mathfrak{Y}_{21} des Zweiklemmenpaares, das aus

⁹⁾ Es handelt sich hierbei nur um ein Ersatzschema und nicht um eine Äquivalenzschaltung, wie sie z. B. von Cauer (Sitzber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 33, 1927) für symmetrische Zweiklemmenpaare angegeben wurde, d. h. es steht nicht zur Frage, ob die eingehenden Widerstandsparameter für alle Frequenzen auf einmal realisierbar sind, was im allgemeinen sicherlich nicht der Fall ist.

¹⁰⁾ Wiss. Veröff. Si-Konz. 3, 1, 130, 1923.

¹¹⁾ Wiss. Veröff. Si-Konz. 5, 3, 121, 1927.

dem Vierpol durch Kurzschluß der Klemmen (3) und (4) [$g_2 = \infty$] entsteht, also

$$g_1 = \frac{I'_2}{V'_1} \text{ für } V_{34} = V_{23} = 0 \tag{8}$$

und analog für die anderen Viereckleitwerte. Diese sind also für jeden gegebenen Vierpol leicht zu ermitteln.

Nachdem nun eindeutige Beziehungen zwischen den Viereckleitwerten und den Zweiklemmenpaar-Parametern vorliegen, kann an die Ausführung unserer eigentlichen Aufgabe gegangen werden, den Geltungsbereich der Strecker-Feldtkellerschen Vierpolbeziehungen (2) und (3) zu bestimmen. Abb. 8 und 9 zeigen die Parallel- und Reihenschaltung zweier beliebiger Vierecke, deren Kombination als Zweiklemmenpaar betrieben wird. Die Leitwerte haben zwei Indices, deren erster die Viereckszugehörigkeit, der zweite die Einordnung in das Viereck gemäß Abb. 7 angibt. Alle Ströme und

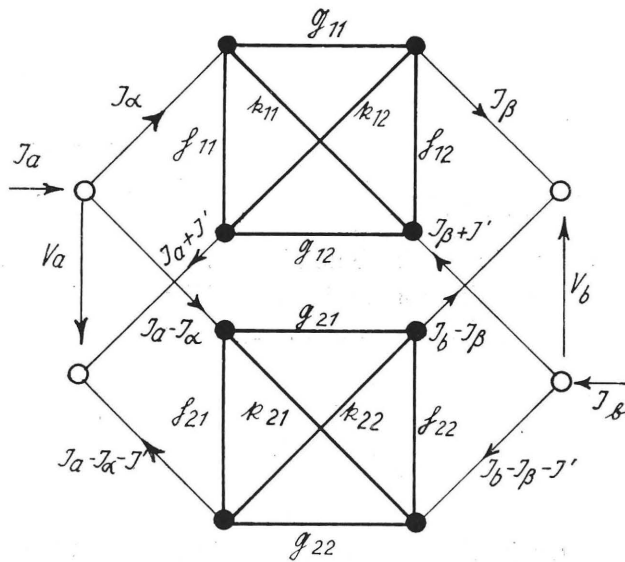


Abb. 8. Parallelschaltung vollständiger Vierecke.

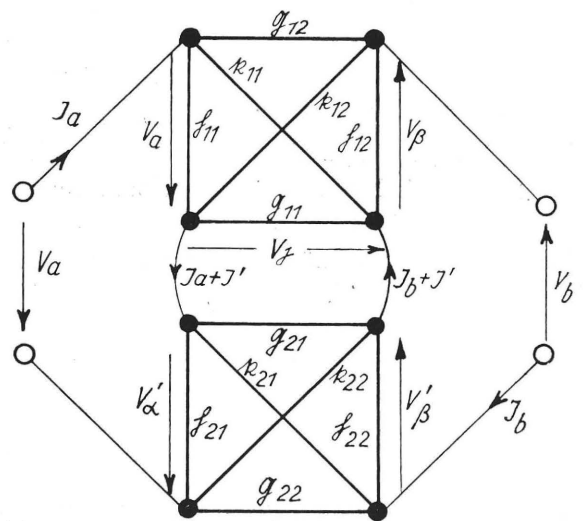


Abb. 9. Reihenschaltung vollständiger Vierecke.

Spannungen der Vierecke sind bestimmt, wenn von den äußeren Spannungen V_a, V_b und Strömen I_a, I_b zwei Größen festgelegt sind. Die Verbindungsströme der Vierecke werden sich nun im allgemeinen Falle von den äußeren Einströmungen unterscheiden: $I' \neq 0$ (vgl. Abb. 8, 9). Die Beziehungen (2) und (3) gelten aber nur dann, wenn

$$I' = 0 \tag{9}$$

ist bei beliebiger Wahl von zweien der Größen V_a, V_b, I_a, I_b ; daraus folgt, daß (2) und (3) an das Bestehen je zweier voneinander unabhängiger Beziehungen zwischen den 12 Leitwertparametern g_{11} bis f_{22} geknüpft sind, bzw. daß solche Vierpole, für deren Parallelschaltung bei bestimmter Betriebsrichtung die Gleichung (2), oder solche, für deren Reihenschaltung (3) gilt, 5 unabhängige Parameter enthalten. Hat man von den beiden gesuchten Beziehungen eine gefunden, so erhält man eine andere durch gewisse Vertauschungen der Leitwertparameter untereinander, welche ein Ausdruck für die Gleichberechtigung, also Vertauschbarkeit der beiden Vierpole innerhalb der Kombination sind; wie man unmittelbar aus den Symmetrieverhältnissen der Anordnungen Abb. 8 und 9 entnimmt, lauten diese Vertauschungsrelationen in verständlicher Symbolik bei der Parallelschaltung:

$$[g_{11}, g_{12}, h_{11}, h_{12}, f_{11}, f_{12}] \longleftrightarrow [g_{21}, g_{22}, h_{21}, h_{22}, f_{21}, f_{22}]; \tag{10}$$

bei der Reihenschaltung:

$$[g_{11}, g_{12}, h_{11}, h_{12}, f_{11}, f_{12}] \longleftrightarrow [g_{22}, g_{21}, h_{22}, h_{21}, f_{21}, f_{22}]. \tag{11}$$

Wir sind nun in der Lage, die gesuchten Beziehungen abzuleiten; dabei wird es sich als zweckmäßig erweisen, im Falle der Parallelschaltung anders vorzugehen als bei Reihenschaltung. Bezeichnet

man die Vierecksleitwerte des Kombinationsvierpols mit g_1' bis f_2' , so gilt bei Parallelschaltung nach Abb. 8:

$$g_1' = g_{11} + g_{21}; g_2' = g_{12} + g_{22}; \dots; f_2' = f_{12} + f_{22}. \quad (12)$$

Drückt man nun nach (7) die Leitwertparameter des Kombinations-Zweiklemmenpaares durch diese Vierecksleitwerte aus und setzt sie nach (2) gleich der Summe der entsprechenden Leitwertparameter der als Zweiklemmenpaare betriebenen Einzelvierpole, so ergeben sich unmittelbar 3 Beziehungen zwischen den g_{1i} , f_{1i} und g_{2i} , f_{2i} ¹²⁾, von denen nach den oben angestellten Überlegungen nur je 2 voneinander unabhängig sein können. Sie lauten, wenn man die 3 Funktionen

$$F_1 = \frac{(g_1 + f_1)(g_2 + f_2)}{g_1 + g_2 + f_1 + f_2}; F_2 = \frac{(g_1 + f_2)(g_2 + f_1)}{g_1 + g_2 + f_1 + f_2}; F_3 = \frac{g_1 g_2 - f_1 f_2}{g_1 + g_2 + f_1 + f_2} \quad (13a)$$

einführt:

$$F_i(g_{11}, g_{12}, f_{11}, f_{12}) + F_i(g_{21}, g_{22}, f_{21}, f_{22}) = F_i[(g_{11} + g_{12}), (g_{21} + g_{22}), (f_{11} + f_{12}), (f_{21} + f_{22})]; i = 1, 2, 3. \quad (13b)$$

Diese Beziehungen lassen sich leicht vereinfachen. So ergibt die erste bei elementarer Umformung [indem man etwa für $g_{11} + f_{11}$, $g_{21} + f_{21}$, $g_{12} + f_{12}$, $g_{22} + f_{22}$ Abkürzungen einführt]:

$$\frac{g_{11} + f_{11}}{g_{21} + f_{21}} = \frac{g_{12} + f_{12}}{g_{22} + f_{22}} \quad (14a)$$

in analoger Weise folgt aus F_2 :

$$\frac{g_{11} + f_{12}}{g_{21} + f_{22}} = \frac{g_{12} + f_{11}}{g_{22} + f_{21}} \quad (14b)$$

Mit (14a, b) muß nun auch die dritte Beziehung (13) erfüllt sein, was man durch Ausrechnen leicht verifiziert.

Die Gleichungen (14a, b) stellen hiernach notwendige und hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der Strecker-Feldtkellerschen Additionsbeziehung (2) dar. Man überzeugt sich, daß die von Selach l. c. behandelten Schaltungsbeispiele sich durch sie leicht überprüfen lassen. Insbesondere ist (14) bei der Parallelschaltung von Vierpol und Dreipol (Abb. 5) im allgemeinen nicht erfüllt¹³⁾, da g_{12} endlich, $g_{22} = \infty$ ist. Dagegen gilt (2) stets für die Parallelschaltung zweier Dreipole nach Abb. 10; denn hier ist $g_{12} = g_{22} = \infty$, also (14) immer erfüllt. — Man kann die Beziehungen (14) auch leicht in Form einer Regel angeben: Man denke sich die beiden Vierpole als Zweiklemmenpaare senkrecht zur Betriebsrichtung der Kombination betrieben und durch Kurzschluß einmal der Leitwerte h_{12} und h_{22} , das andere Mal h_{11} und h_{21} in einfache II-Glieder verwandelt; dann müssen die Verhältnisse entsprechender Quereitwerte dieser II-Glieder übereinstimmen.

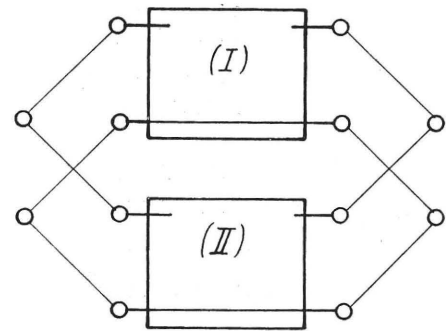


Abb. 10. Parallelschaltung zweier Dreipole.

Wir kommen nun zur Serienschaltung zweier Vierpole (Gl. (3), Abb. 9). Hier gestaltet sich die Rechnung nicht so einfach, weil einerseits kein so direkter Zusammenhang zwischen den Vierecksleitwerten des zusammengesetzten Vierpols und denen der Einzelvierpole besteht wie bei Parallelschaltung (12); außerdem beziehen sich hier die Additionsgleichungen auf die \mathbb{W} -Matrices, mit denen, wie wir oben sahen, die Vierecke in keiner so einfachen Beziehung stehen wie mit den \mathbb{Y} -Matrices. Wir gehen daher hier so vor, daß wir unmittelbar die Bedingungsgleichung (9) aufstellen, die zu den beiden verlangten Beziehungen zwischen den 12 Vierecksleitwerten führen muß. Außer V_a und V_b wollen wir hierzu die von diesen abhängigen, längs h_{11} und h_{12} — bzw. h_{21} und

¹²⁾ Daß die f -Leitwerte hier belanglos sind, erkennt man unmittelbar aus Abb. 8: sie können direkt nach außen zwischen die Eingangsklemmen gezogen werden!

¹³⁾ Nur in speziellen Fällen wie $g_{11} = f_{11} = f_{12} = 0$ gilt (2) auch hier.

h_{22} — sowie die längs g_{12} und g_{21} wirksamen Spannungen V_α, V_β — bzw. $V_{\alpha'} = V_a - V_\alpha$ und $V_{\beta'} = V_b - V_\beta$ — und V_γ einführen; durch diese sind dann nach den Gl. (6) alle Einströmungen bestimmt. Durch Anwendung von (6) erhält man also für $I_a, I_a + I', I_b, I_b + I'$ zweimal 4 lineare Ausdrücke in $V_a, V_b, V_\alpha, V_\beta$ (bzw. $V_{\alpha'}, V_{\beta'}$), V_γ , von denen zweimal 3 voneinander unabhängig sind. Diese stellen auch andererseits 3 voneinander unabhängige inhomogene lineare Gleichungen für V_α, V_β (bzw. $V_{\alpha'}, V_{\beta'}$), V_γ dar, deren rechte Seiten linear von V_a und V_b abhängen, die also die inneren Spannungen durch die äußeren ausdrücken. Führt man nun weiter die Gleichung (9) $I' = 0$, das Kriterium für das Bestehen der Beziehung (3), ein und drückt sie durch die Spannungen aus, so folgen für je 3 von den 5 Größen $V_\alpha, V_{\alpha'}, V_\beta, V_{\beta'}, V_\gamma$ 4 lineare inhomogene Gleichungen. Wir schreiben 2 solche Systeme hin:

$$\begin{aligned} & (g_{11} + f_{12}) V_b + (g_{11} + g_{12} + f_{11} + f_{12}) V_\gamma - (g_{11} + f_{12}) V_{\beta'} + (g_{11} + f_{11}) V_\alpha = 0 \\ & - (g_{22} + f_{22}) V_a + (g_{21} + g_{22} + f_{21} + f_{22}) V_\gamma - (g_{22} + f_{21}) V_{\beta'} + (g_{22} + f_{22}) V_\alpha = 0 \\ & - (f_{22} V_a + h_{12} V_b) + (g_{21} + g_{12} + f_{11} + f_{22}) V_\gamma - (h_{12} + h_{22}) V_{\beta'} + (f_{11} + f_{22}) V_\alpha = 0 \\ & (h_{21} V_a + f_{12} V_b) + (g_{21} + g_{12} + f_{21} + f_{12}) V_\gamma - (f_{21} + f_{12}) V_{\beta'} - (h_{11} + h_{21}) V_\alpha = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & (g_{11} + f_{11}) V_a + (g_{11} + g_{12} + f_{11} + f_{12}) V_\gamma + (g_{11} + f_{12}) V_\beta - (g_{11} + f_{11}) V_{\alpha'} = 0 \\ & - (g_{22} + f_{21}) V_b + (g_{21} + g_{22} + f_{21} + f_{22}) V_\gamma + (g_{22} + f_{21}) V_\beta - (g_{22} + f_{22}) V_{\alpha'} = 0 \\ & (f_{11} V_a + h_{22} V_b) + (g_{21} + g_{12} + f_{11} + f_{22}) V_\gamma - (h_{12} + h_{22}) V_\beta - (f_{11} + f_{22}) V_{\alpha'} = 0 \\ & - (h_{11} V_a + f_{21} V_b) + (g_{21} + g_{12} + f_{21} + f_{12}) V_\gamma + (f_{21} + f_{12}) V_\beta + (h_{11} + h_{21}) V_{\alpha'} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

In (15) sind $V_\alpha, V_{\beta'}$ und V_γ in (16) $V_{\alpha'}, V_\beta$ und V_γ die durch V_a, V_b ausgedrückten Unbekannten. Diese Gleichungssysteme sind, da jedesmal 4 Gleichungen für 3 Unbekannte stehen, überbestimmt; damit sie miteinander verträglich sind, muß zwischen ihnen eine lineare Abhängigkeit bestehen, es müssen also die Determinanten der Koeffizientensysteme von (15) und (16) verschwinden. Auf diese Weise führt die Gleichung (9) unmittelbar zu den gesuchten Beziehungen zwischen den Leitwertsystemen der in Reihe geschalteten Vierpole. Die beiden Determinantengleichungen

$$D_1 = \begin{vmatrix} (g_{11} + f_{12}) V_b & \boxed{\begin{matrix} g_{11} + g_{12} + f_{11} + f_{12} & g_{12} + f_{12} & g_{11} + f_{11} \\ g_{21} + g_{22} + f_{21} + f_{22} & g_{22} + f_{21} & g_{22} + f_{22} \\ g_{21} + g_{12} + f_{11} + f_{22} & -(h_{12} + h_{22}) & f_{11} + f_{22} \\ g_{21} + g_{12} + f_{21} + f_{12} & f_{21} + f_{12} & -(h_{11} + h_{21}) \end{matrix}} \\ - (g_{22} + f_{22}) V_a & \\ - (f_{22} V_a + h_{12} V_b) & \\ (h_{21} V_a + f_{12} V_b) & \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} (g_{11} + f_{11}) V_a & \boxed{\begin{matrix} g_{11} + g_{12} + f_{11} + f_{12} & g_{11} + f_{12} & g_{11} + f_{11} \\ g_{21} + g_{22} + f_{21} + f_{22} & g_{22} + f_{21} & g_{22} + f_{22} \\ g_{21} + g_{12} + f_{11} + f_{22} & -(h_{12} + h_{22}) & f_{11} + f_{22} \\ g_{21} + g_{12} + f_{21} + f_{12} & g_{21} + g_{12} & -(h_{11} + h_{21}) \end{matrix}} \\ - (g_{22} + f_{21}) V_b & \\ (f_{11} V_a + h_{22} V_b) & \\ - (h_{11} V_a + f_{21} V_b) & \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

müssen für beliebige Werte von V_a und V_b gelten.

$$\text{Wir bilden nun die Gleichung} \quad D_1 - D_2 = 0, \quad (19)$$

indem wir z. B. bei D_2 die Vorzeichen aller Elemente einer Zeile umkehren. Auf diese Weise erkennt man, daß auch sämtliche dreireihigen Determinanten der Matrix, welche aus (17) und (18) durch Fortlassen der ersten Spalte entstehen (Strichelung!), verschwinden müssen. Betrachten wir etwa die dritte dieser Determinanten (Fortlassen der dritten Zeile)! Durch Abzug ihrer dritten Spalte von der ersten folgt:

$$\begin{vmatrix} -g_{11} + g_{21} & g_{11} + f_{12} & g_{11} + f_{11} \\ g_{21} - g_{22} & g_{22} + f_{21} & g_{22} + f_{22} \\ g_{21} + g_{12} + h_{11} + h_{21} & f_{21} + f_{12} & -(h_{11} + h_{21}) \end{vmatrix} = 0. \quad (20)$$

Diese Gleichung läßt sich leicht vereinfachen; von den beim Ausmultiplizieren entstehenden 64 Gliedern hebt sich die Hälfte fort, die übrigen geben die eine der gesuchten Beziehungen in übersichtlicher Form:

$$(\mathfrak{h}_{11} + \mathfrak{h}_{21}) \{ \{ (g_{11} f_{22} - g_{22} f_{11}) + (g_{21} f_{12} - g_{12} f_{21}) \} + \{ (g_{11} g_{12} - g_{21} g_{22}) - (f_{11} f_{12} - f_{21} f_{22}) \} \} \\ + [(g_{11} f_{22} - g_{22} f_{11}) \{ (g_{21} + g_{12}) + (f_{21} + f_{12}) \} + (g_{21} f_{12} - g_{12} f_{21}) \{ (g_{11} + f_{11}) + (g_{22} + f_{22}) \}] = 0. \quad (21a)$$

Die andere könnte man durch Bildung einer zu (20) koordinierten Gleichung gewinnen; einfacher erhält man sie direkt aus (21a) durch Anwendung der Vertauschungsrelation (11):

$$(\mathfrak{h}_{12} + \mathfrak{h}_{22}) \{ \{ (g_{11} f_{12} - g_{22} f_{21}) + (g_{21} f_{11} - g_{12} f_{22}) \} + \{ (g_{11} g_{12} - g_{21} g_{22}) + (f_{11} f_{12} - f_{21} f_{12}) \} \} \\ + [(g_{11} f_{12} - g_{21} f_{21}) \{ (g_{21} + g_{12}) + (f_{11} + f_{22}) \} + (g_{21} f_{11} - g_{21} f_{22}) \{ (g_{11} + f_{12}) + (g_{22} + f_{21}) \}] = 0. \quad (21b)$$

(21a) und (21b) sind voneinander unabhängig, stellen also notwendige und hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der Additionsleichung (3) dar. Sie lassen sich indessen nicht wie (14) in Form einer einfachen Regel aussprechen, weil die eingehenden Kombinationen der g , h und f keine so unmittelbaren Bedeutungen haben wie dort; durch Vergleich mit (7b) erkennt man, daß die Produktdifferenzen mit den Längsleitwerten, die Teilsummen wie in (14) mit den Querleitwerten gewisser partieller II -Glieder zusammenhängen, welche sich aus der Kombination Abb. 9 bilden lassen.

Es soll noch auf folgende Verallgemeinerung hingewiesen werden: Selach hat außer der Parallel- und Reihenschaltung von Vierpolen noch etwas allgemeinere Kombinationen, eine Reihen-Parallel- und eine Parallel-Reihenschaltung, bei denen die Vierpole auf der einen Seite in Serie, auf der anderen parallel geschaltet werden (vgl. Selach l. c. Abb. 7 und 8), in den Kreis seiner Betrachtungen gezogen. In diesen Fällen müssen sich nun, wie man leicht erkennt, die von SF als $\|\mathfrak{D}\|$ bzw. $\|\mathfrak{D}\|^{-1}$ bezeichneten Matrizen der beiden Vierpole addieren, welche zu den Gleichungssystemen gehören, bei denen die Spannung der einen und der Strom der anderen Seite des Zweiklemmenpaares als Funktion der beiden anderen Größen geschrieben werden (SF (40), (41) und Tafel 2); es gilt also in völliger Koordination zu den Beziehungen (2) und (3):

$$\|\mathfrak{D}\| = \|\mathfrak{D}^{(I)}\| + \|\mathfrak{D}^{(II)}\| \text{ bei Parallel-Reihenschaltung,} \quad (22)$$

$$\|\mathfrak{D}\|^{-1} = \|\mathfrak{D}^{(I)}\|^{-1} + \|\mathfrak{D}^{(II)}\|^{-1} \text{ bei Reihen-Parallelschaltung.} \quad (23)$$

Diese Gleichungen sind wie (2) und (3) vom Bestehen der Relation (4) bzw. (9) abhängig. Auf dem gleichen Wege wie oben können hieraus die je 2 Bedingungsgleichungen in den 12 Vierecksleitwerten abgeleitet werden, von denen die Gültigkeit von (22) bzw. (23) abhängt. Dabei sieht man analog wie bei der Parallelschaltung von vornherein, daß im Falle der Parallel-Reihenschaltung die Leitwerte h_{11} und h_{21} , bei Reihen-Parallelschaltung h_{12} und h_{22} nicht in die Bedingungsgleichungen eingehen werden. Auf die Ausrechnung dieser Gleichungen selbst wird an dieser Stelle verzichtet, da die Parallel-Reihen- und Reihen-Parallelschaltung von Vierpolen bisher kaum benutzt wurde.

Man kann noch eine weitere Verallgemeinerung vornehmen. Wir haben uns im Vorangehenden stets auf solche Vierpole beschränkt, für die der Umkehrungssatz erfüllt ist. Daher gelten unsere Gleichungen zunächst nicht für Vierpole mit eingepprägten oder gesteuerten Spannungen, für die der Umkehrungssatz im allgemeinen nicht gilt, wie z. B. für Elektronenröhren mit Gitter (s. z. B. SF S. 111/112). Es ist aber leicht zu zeigen, daß man sie auch auf solche Vierpole anwenden kann. Nach dem Helmholtzschen Prinzip von der elektromotorischen Oberfläche¹⁴) bzw., wie SF es für Netzwerke formuliert haben (S. 93 bis 95), den Sätzen von den Ersatzspannungs- und Stromquellen kann man nämlich die eingepprägten Kräfte durch Spannungs- bzw. Stromquellen an den Ecken des Vierpols ersetzen. Benutzt man etwa bei Parallelschaltung von Vierpolen Ersatzstromquellen, bei Reihenschaltung Ersatzspannungsquellen, so erkennt man, daß, wenn die Bedingung (4) bzw. (9) ohne dieselben erfüllt war, sie durch deren Wirksamkeit im allgemeinen¹⁵) nicht gestört wird. Die Gleichungen (14) und (21) bleiben dann auch richtig für Vierpole, bei denen der Umkehrungssatz nicht gilt.

Es bleibt noch übrig, auf folgende einfache Tatsache hinzuweisen: Man kann bei Parallel-

¹⁴) Helmholtz, Wiss. Abhandlg. Barth, 1882, I, Kap. 17, S. 481.

¹⁵) Die gesteuerten Spannungen allein erfüllen nämlich gewöhnlich die Bedingung (4) für die Einzelvierpole (vgl. die von SF angeführten Beispiele). Aber auch sonst ist es ganz leicht, sie zu berücksichtigen, wie eine nähere Überlegung zeigt. Vgl. hierzu auch die unter ^{6a}) S. 32 erwähnte Arbeit von H. König.

Reihen-, Parallel-Reihen- und Reihen-Parallelschaltung von n beliebigen Vierpolen stets dann die entsprechenden Additionsgleichungen (2), (3), (22), (23) anwenden, wenn man mit $(n - 1)$ von ihnen in ihrer Betriebsrichtung je einen idealen Transformator 1:1 in Reihe schaltet, da ihre Parameter durch einen solchen nicht geändert werden, aber die Bedingungen (4) dann für jeden Einzelvierpol erfüllt sind.

Die Gleichungen (14) und (21) stellen, da ja die eingehenden Vierecksleitwerte unmittelbar meßbare bzw. berechenbare Größen sind (vgl. oben), Kriterien dar, welche für die Praxis ohne weiteres brauchbar sind, und es ist zu hoffen, daß durch sie die für die praktische Berechnung von Vierpolen so grundlegend wichtigen Strecker-Feldtkellerschen Beziehungen ihr Anwendungsfeld noch erweitern werden.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, auch an dieser Stelle der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft zu danken, welche mir durch Gewährung eines Stipendiums meine Arbeit am Heinrich-Hertz-Institut ermöglichte.

(Eingegangen am 9. September 1931.)