

# ELEKTRISCHE NACHRICHTEN TECHNIK

*F. Moench*

BEGRÜNDET VON K. W. WAGNER

Stiftung aus dem Nachlass  
von Dr. Moench

HERAUSGEGEBEN UNTER MITWIRKUNG VON

H. BARKHAUSEN · H. BUSCH · K. DOHMEN · A. ESAU · H. FASSBENDER  
W. HAHNEMANN · J. HARBICH · H. HECHT · K. HUBMANN  
H. JORDAN · F. LÜSCHEN · J. NAGEL · W. OHNESORGE · C. RAMSAUER  
H. RUKOP · J. ZENNECK

WISSENSCHAFTLICHE LEITUNG

F. MOENCH

BAND 20



1943

SPRINGER - VERLAG IN BERLIN W 9

# Seitenband- und Pendelzeigertheorie der Frequenzmodulation für Sinus- und Rechteckmodulation.

(Mitteilung aus dem Vierjahresplan-Institut für Schwingungsforschung.)

Von O. Zinke, Berlin.

DK 538.567.4

Ziel der folgenden Ausführungen ist es, an Hand von Abbildungen eine einfache Theorie der Frequenzmodulation zu geben. Die Darstellung der frequenzmodulierten Schwingung im Zeigerdiagramm (Pendelzeigertheorie) gestattet die Entwicklung des Frequenzspektrums für kleinen und großen Hub. Die Darstellung beschränkt sich nicht auf eine sinusförmige Modulationskurve, sondern zeigt auch, daß bei der für Telegraphie wichtigen Rechteckmodulation sich besonders übersichtliche Verhältnisse ergeben.

## I. Beziehungen zwischen Frequenz und Phase.

Die frequenz- bzw. phasenmodulierte Schwingung (Abb. 1, rechts) hat innerhalb der Zeitspanne  $T_m$  durch den Abstand der Nulldurchgänge bestimmte Einzelschwingungen mit sehr verschiedener Schwingungsdauer, z. B.  $T$  oder  $T_{max}$  oder  $T_{min}$ . Als Zeitspanne  $T_m$  kann man sich die Dauer einer Modulationsperiode vorstellen. Die Schwingungsdauer schwankt innerhalb der Grenzen  $T_{max}$  und  $T_{min}$  um einen Mittelwert  $T_0$ , der auch bei Abschalten der Modulationsspannung vorhanden ist. Der in Abb. 1, rechts oben gezeichnete Verlauf wird durch das Gesetz  $A \sin \varphi$  nur dann wiedergegeben, wenn  $\varphi$  außer einem zeitlinearen Bestandteil  $\omega_0 t$  noch einen periodisch wechselnden Anteil  $\varphi_w$  enthält:

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_w. \quad (1)$$

Dieser Ausdruck ist in Abb. 1, Mitte, zu dem Zweck dargestellt, den allgemeinen Zusammenhang zwischen Phase, Periodendauer und Frequenz abzuleiten. Die Periodendauer  $T$  ist allgemein der Zeitunterschied zwischen zwei Punkten der Phasenkurve, für die  $\varphi$  um  $2\pi$  zunimmt. Also ist  $2\pi/T$  mit dem Anstieg  $\Delta\varphi/\Delta t$  verknüpft:

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (2)$$

Da die Periodendauer  $T$  im allgemeinen sehr kurz bleibt im Vergleich zur Periodendauer  $T_m$ , stimmt praktisch der Differenzenquotient  $\Delta\varphi/\Delta t$  mit der Steigung  $d\varphi/dt$  der Phasenkurve überein. Daher ist unter dieser Voraussetzung ( $T < T_m$ )

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (2a)$$

d. h. zwischen der jeweiligen Periodendauer  $T$  und der Steigung der Phasenkurve besteht ein fester Zusammenhang, der nach der Definition

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

auch für die momentane Frequenz Gültigkeit hat. Es ist

$$\omega = 2\pi f = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2b)$$

Die Frequenz entspricht der Geschwindigkeit der Phasenänderung<sup>1)</sup>. Die Beziehung (2b) führt auch dazu, daß die zeitliche Veränderung des frequenzmodulierten Vorgangs  $A \sin \varphi$ , die ja  $A \cos \varphi \cdot d\varphi/dt$  entspricht, genau wie im Fall der unmodulierten Schwingung in der Form  $A \cdot \omega \cdot \cos \varphi$  erscheint.

Nach Gl. (1) und (2b) ist

$$\omega - \omega_0 = \frac{d\varphi_w}{dt} \quad \text{bzw.} \quad f - f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi_w}{dt}. \quad (3)$$

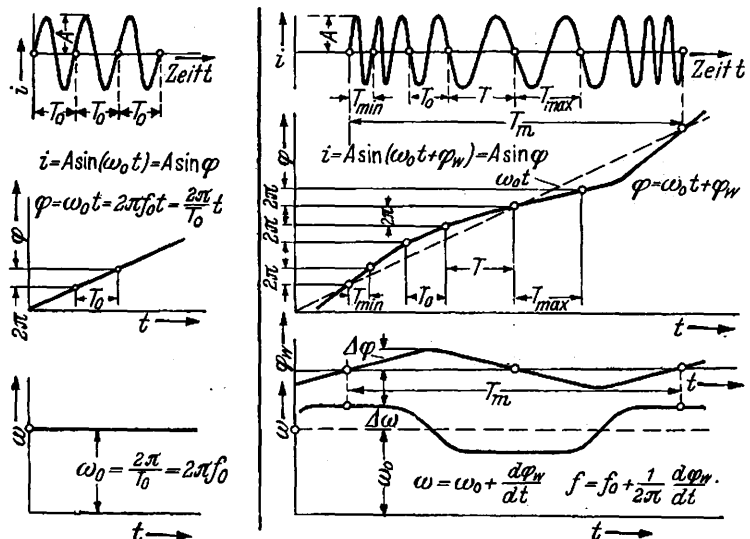


Abb. 1. Beziehungen zwischen Frequenz und Phase: links unmodulierte, rechts frequenzmodulierte Schwingung.

An der Stelle des steilsten Anstiegs von  $\varphi_w$  erreicht die Frequenzabweichung ihr Maximum. Frequenzänderung und Phasenschwankung  $\varphi_w$  sind jedenfalls nach Gl. (3) zwangsläufig verbunden.

<sup>1)</sup> Dieses Gesetz wurde als Definition schon 1856 von Helmholtz eingeführt. Da aber auch in neuester Zeit immer wieder Unsicherheiten über die Definition der Frequenz zu beobachten sind [s. Metschl, Wesen der Frequenz- und Amplitudenmodulation, ETZ 60, 1357 bis 1395 (1939)], wurde zur Klärung die einfache graphische Darstellung der Abb. 1 herangezogen.

**II. Frequenzmodulation und Phasenmodulation.**

Unter Frequenzmodulation im technischen Sinne versteht man nun den Vorgang, daß die niederfrequente Modulationsspannung  $u_m$  die Frequenz derart beeinflußt, daß die Frequenzänderung  $f - f_0$  ein getreues Bild der Modulationsspannung darstellt:

$$f - f_0 \sim u_m.$$

Die auftretende Phasenschwankung  $\varphi_w$  ist nach Gl. (3) proportional

$$\int_0^t (f - f_0) dt \quad \text{bzw.} \quad \int_0^t u_m dt.$$

Umgekehrt stellt die Phasenmodulation eine Modulationsart dar, bei der die Modulationsspannung  $u_m$  unmittelbar die Phasenänderung  $\varphi_w$  aussteuert:

$$\varphi_w \sim u_m.$$

Hier ist dann die damit verbundene Frequenzänderung die sekundäre Größe:

$$f - f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi_w}{dt} \sim \frac{du_m}{dt}.$$

Ob Frequenz- oder Phasenmodulation vorliegt, läßt sich also am Modulationsvorgang erkennen.

Ein weiteres einfaches Unterscheidungsmerkmal ist durch den Frequenzgang von Phasenhub und Frequenzhub mit veränderter Modulationsfrequenz  $f_m$  gegeben, wenn die Modulation mit einer rein sinusförmigen Spannung  $u_m$  konstanter Amplitude erfolgt:

1. Bleibt bei Erhöhung von  $f_m$  der Frequenzhub konstant, so liegt Frequenzmodulation vor. Der Phasenhub nimmt dabei mit  $1/f_m$  ab.

2. Bei Phasenmodulation wird der Phasenhub von der Höhe der Modulationsfrequenz  $f_m$  nicht beeinflußt, während der Frequenzhub proportional  $f_m$  anwächst.

Die größere technische Bedeutung hat die Frequenzmodulation erlangt<sup>2)</sup>. Es sollen daher im folgenden nur die Modulationseigenschaften bei der Frequenzmodulation verfolgt werden. Dabei soll aber nicht nur eine rein sinusförmige Modulationsspannung, sondern als Grenzfall auch eine rechteckig modulierte Niederfrequenzkurve vorliegen.

Da die Modulationsspannung den Verlauf der Frequenz prägt, hat bei der Frequenzmodulation die Kurve für  $f$  in Abhängigkeit von der Zeit die gleiche Bedeutung wie die Hüllkurve des zeitlichen Ablaufs einer amplitudenmodulierten Schwingung.

**III. Frequenzhub, Phasenhub und Modulationsindex bei Sinus- und Rechteckmodulation.**

Abb. 2, rechts Mitte, stellt den Frequenzverlauf für eine sinusförmige frequenzmodulierte Schwingung dar. Die Niederfrequenz-Periodendauer  $T_m$  ist in Richtung

<sup>2)</sup> Hölzler hat nachgewiesen, daß die größte Störverminderung nur bei der Frequenzmodulation im engeren Sinne auftritt.

der Zeitachse eingetragen, die Modulationsfrequenz  $f_m = 1/T_m$  zum Vergleich mit der Frequenz  $f_0$  der unmodulierten Schwingung auf der Frequenzachse gekennzeichnet, ferner der Frequenzhub  $\Delta f$ , um den die Frequenz durch die niederfrequente Spannung  $U_m$  angesteuert wird.

Folgt  $f - f_0$  damit dem Gesetz  $\Delta f \cdot \sin \omega_m t$ , so ist nach Gl. (3) die gleichzeitig auftretende Phasenänderung

$$\varphi_w = 2\pi \int_0^t (f - f_0) dt = -2\pi \Delta f \frac{1}{\omega_m} \cos \omega_m t \quad (4)$$

$$= -\Delta \varphi \cos \omega_m t.$$

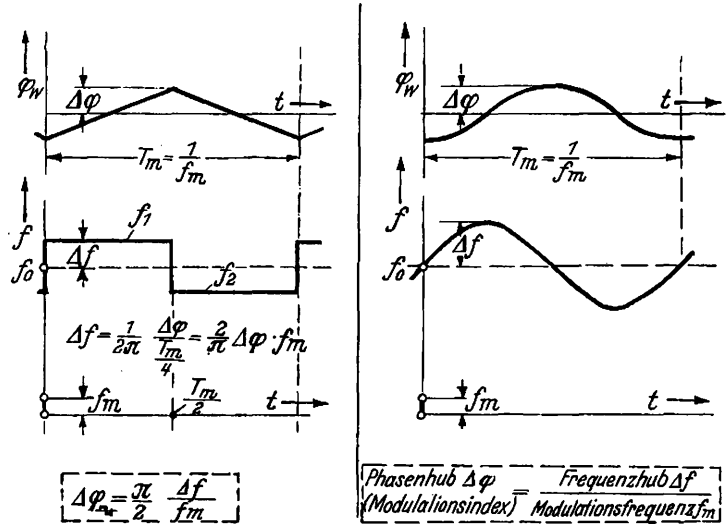


Abb. 2. Phasenhub, Frequenzhub und Modulationsfrequenz: links rechteckige, rechts sinusförmige Frequenzmodulation.

Die größte Phasenschwankung, der Phasenhub  $\Delta \varphi$ , hat nach Gl. (4) den Wert

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta f}{f_m}. \quad (5)$$

Dieser Zusammenhang zwischen Phasenhub, Frequenzhub und Modulationsfrequenz gilt in der Form von Gl. (5) nur für sinusförmige Modulation.

Abb. 2, links, zeigt den Zusammenhang für Rechteckmodulation. Die rechteckige Modulation bedeutet, daß während einer halben Modulationsperiode  $T_m/2$  die Frequenz mit  $f_1 = f_0 + \Delta f$  konstant ist, um in der zweiten Hälfte  $T_m/2$  auf  $f_2 = f_0 - \Delta f$  abzusinken. Dem entspricht der geradlinige Phasenverlauf für  $\varphi_w$  mit dem Phasenhub  $\Delta \varphi$ . Es ist nach Gl. (3)

$$2\Delta \varphi = 2\pi \int_0^{T_m/2} (f - f_0) dt = 2\pi \int_0^{T_m/2} f dt = 2\pi \Delta f \frac{T_m}{2} = \frac{\pi \Delta f}{f_m},$$

$$\Delta \varphi = \frac{\pi}{2} \frac{\Delta f}{f_m} = 1,57 \frac{\Delta f}{f_m}. \quad (5a)$$

Es hat sich gezeigt, daß  $\Delta f/f_m$ , der auf die Modulationsfrequenz bezogene Frequenzhub, für die Störverminderung ausschlaggebend ist. Man nennt  $\Delta f/f_m$  als Kennzeichen der Modulationstiefe den „Modulationsindex“:

$$\text{Modulationsindex} = \frac{\text{Frequenzhub}}{\text{Modulationsfrequenz}}.$$

Bei sinusförmiger Modulationsspannung ist nach Gl. (5) der Modulationsindex mit dem Phasenhub identisch und bekommt so seine anschauliche Bedeutung. Die rechteckige Modulationskurve führt nach Gl. (5a) zu dem Ergebnis, daß der Phasenhub dem 1,57fachen Modulationsindex entspricht.

**IV. Pendelzeigerdiagramm der frequenzmodulierten Schwingung.**

Eine sinusförmig amplitudenmodulierte Schwingung läßt sich durch ein einfaches Zeigerdiagramm mit

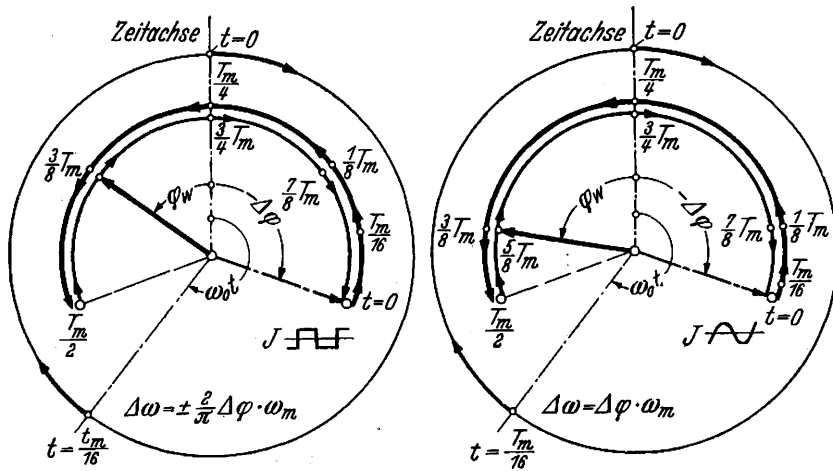


Abb. 3. Pendelzeigerdiagramm bei einem Phasenhub  $\Delta\varphi = 2$ : links Rechteck-, rechts Sinusmodulation.

3 Schwingungen konstanter Amplitude darstellen und auf diese Weise graphisch das Frequenzspektrum gewinnen. Es liegt nahe, auch die frequenzmodulierte Schwingung durch das in der Elektrotechnik übliche Zeigerdiagramm darzustellen. Hierbei erkennt man auch mit einem Blick die Größe des Phasenhubes. In Abb. 3 rotiert, wie üblich, die Zeitachse im Uhrzeigersinn mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$ . Die Frequenzmodulation läßt nun den Zeiger, der ohne Modulation stillstände, im Rhythmus der Modulationsperiode  $T_m$  pendeln, und zwar gegenüber der Mittellage um einen maximalen Winkel gleich dem Phasenhub  $\Delta\varphi$  nach links und nach rechts. Die Geschwindigkeit, mit welcher der Zeiger hin- und herpendelt, entspricht dem zeitlichen Ablauf von  $d\varphi_w/dt$  bzw. der Frequenzänderung  $f - f_0$  innerhalb der Modulationsperiode.

In Abb. 3 ist als Startpunkt  $t = 0$  für die Verfolgung einer Modulationsperiode die maximale Auspendelung nach rechts gewählt. Der Phasenhub (s. Abb. 3)  $\Delta\varphi = 2$  entspricht einem Winkel von  $115^\circ$ . Bei sinusförmiger Modulationskurve muß in der Nähe des Umkehrpunktes ( $t = 0$ ) die Pendelgeschwindigkeit sehr klein sein. Da man an dem Kreisbogen, den die Zeigerspitze zurücklegt, die Geschwindigkeit nicht unmittelbar erkennen kann, sind die Punkte, an denen die Zeigerspitze nach  $T_m/16, T_m/8, T_m/4$  usw. steht,

herausgehoben. Der Hinlauf ist stark, der Rücklauf schwach ausgezogen. Man erkennt in Abb. 3 links deutlich an den gleichmäßigen Abständen die konstante Geschwindigkeit der Phasendrehung bei rechteckförmiger Frequenzmodulation. Hier geht der Zeiger bei  $t = 0$  und  $T_m/2$  ruckartig vom Vorlauf zum Rücklauf über. Man sieht auch deutlich in Abb. 3 links und rechts den Unterschied an der Lage des Zeitpunktes  $T_m/16$ .

Zur Kennzeichnung, wie lange eine Modulationsperiode im Verhältnis zur Zeitdauer der hochfrequenten Schwingung dauert, ist in Abb. 3 noch angedeutet, wie sich während dieses Vorgangs der Pendelung die Zeitachse weiterdreht. Während diese zur Zeit 0 mit der senkrechten Mittellage des Zeigers übereinstimmt, hat sie nach  $T_m/16$  mehr als eine halbe Umdrehung zurückgelegt.

**V. Zusammenhang zwischen Pendelzeigerdiagramm und Frequenzspektrum.**

Das Frequenzspektrum gewinnt man nach Abb. 4 durch Zerlegung des pendelnden Zeigers konstanter Amplitude in zwei feststehende Zeiger konstanter Frequenz  $\omega_0$ , deren Amplitude aber moduliert ist. Dieses Ver-

fahren ist nicht auf kleine Phasenhübe beschränkt, sondern

1. auch bei großen Hüben,

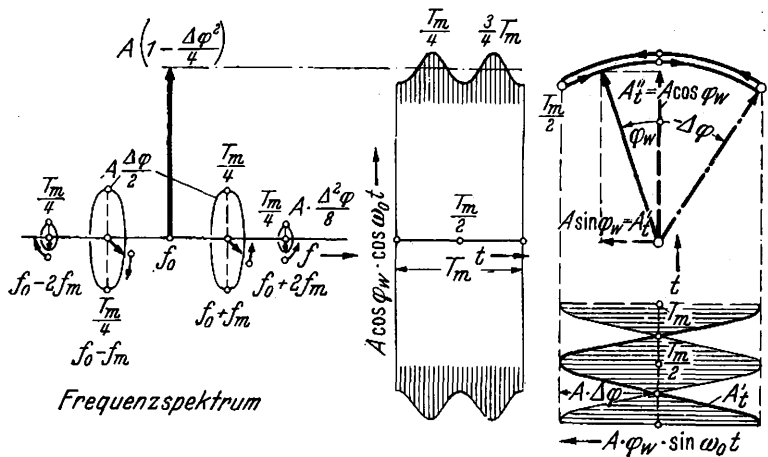


Abb. 4. Zerlegung der Frequenzmodulation in zwei amplitudenmodulierte Schwingungen fester Frequenz mit  $90^\circ$  Phasenverschiebung. Entstehung des Frequenzspektrums bei kleinem Hub (Modulation sinusförmig).

2. bei beliebiger, auch nicht sinusförmiger Modulation anwendbar.

Abb. 4 zeigt, daß der mit dem Phasenwinkel  $\varphi_w$  pendelnde Zeiger der festen Amplitude  $A$  zerlegt ist in  $A'_t = A \cos \varphi_w$  in Richtung der Mittellage und  $A''_t = A \sin \varphi_w$  senkrecht zur Mittellage. Beide Zeiger  $A'_t$  und  $A''_t$  behalten fest ihre Lage zur Zeitachse bzw. zueinander und verändern ihre Winkellage nicht, wenn  $A$  auch mit erheblichem Hub ( $\Delta\varphi \gg 1$ ) hin-

und herpendelt. Das bedeutet aber, daß  $A'_i$  und  $A''_i$  als zwei amplitudenmodulierte Schwingungen der Frequenz  $\omega_0$  zusammen die frequenzmodulierte Schwingung wiedergeben. Sobald nun  $A'_i$  und  $A''_i$  nach Fourier zerlegt sind, ist das Frequenzspektrum aufgebaut. Das ist besonders leicht bei kleinem Hub durchzuführen.

**VI. Frequenzspektrum bei kleinem Hub.**

Um die Zerlegung besonders übersichtlich zu machen, ist nun  $A'_i = A \sin \varphi_w$  nach unten projiziert und für sinusförmige Schwankung von  $\varphi_w$  in Abb. 4 in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  innerhalb einer Modulationsperiode  $T_m$  aufgetragen, und  $A''_i = A \cdot \cos \varphi_w$  nach links projiziert und ebenso über  $t$  aufgezeichnet.

Bei kleinem Hub ( $\Delta \varphi < 57^\circ$ ) kann mit guter Näherung  $A \sin \varphi_w$  durch  $A \varphi_w$  ersetzt werden. Da  $\varphi_w$  mit  $-\cos \frac{2\pi t}{T_m}$  schwankt, bedeutet dies, daß die Hüllkurve für die Hochfrequenz  $\omega_0$  einen sinusförmigen Verlauf hat (übermodulierte Schwingung). Diese Schwingung von der Form  $A'_i \sin \omega_0 t = -\Delta \varphi \cdot \cos \omega_m t \sin \omega_0 t$  ist bekanntlich mit der Schwebung von zwei reinen Sinusschwingungen der Frequenzen  $f_0 - f_m$  und  $f_0 + f_m$  identisch. Die Analyse von  $A'_i$  liefert benachbart zur Frequenz  $f_0$  also die ersten beiden Seitenfrequenzen mit der Amplitude  $A \Delta \varphi / 2$ .

Die Projektion der Schwingung  $A''_i = A \cos \varphi_w$  ist in Abb. 4 Mitte durchgeführt.  $A''_i \cos \omega_0 t$  ergibt, wie man erkennt, das Bild einer mit  $2f_m$  schwach amplitudenmodulierten Schwingung, deren Träger die Höhe  $A(1 - \Delta \varphi^2/4)$  hat, während die Seitenschwingungen mit der Höhe  $A \Delta \varphi^2/8$  im Abstand  $2f_m$  links und rechts vom Träger  $f_0$  erscheinen. Die weiteren Oberschwingungen von der Größenordnung  $A \Delta \varphi^4/n$  usw. sind wegen ihrer Geringfügigkeit vernachlässigt. Sie treten im Abstand  $4f_m, 6f_m$  auf. Allgemein gilt unabhängig von der Art der Modulation:

Die Zerlegung von  $A''_i = A \cos \varphi_w$  in das Spektrum der einzelnen Frequenzen liefert die „Trägerschwingung“ der Frequenz  $f_0$  und sämtliche geradzahigen Seitenfrequenzen im Abstand  $2f_m, 4f_m$  usw. Ferner führt  $A'_i = A \sin \varphi_w$  auf sämtliche ungeradzahigen Seitenfrequenzen im Abstand  $f_m, 3f_m, 5f_m$  usw. Die Einzelspektren von  $A'_i$  und  $A''_i$  ergeben damit das vollständige Gesamtspektrum der frequenzmodulierten Schwingung.

Das Spektrum ist für kleinen Hub bei Sinusmodulation in Abb. 4 links dargestellt. Es weicht etwas von der üblichen Strichdarstellung ab und ist aus dem Grunde gewählt, weil ein Strichspektrum ohne Kennzeichnung der Phasenlage sehr unvollständig ist. Die Seitenfrequenzen sind hier in ihrer gegenseitigen

Phasenlage zum Startzeitpunkt ( $t = 0$ ) dargestellt. Die Zeigerspitzen aller Seitenfrequenzen rotieren auf perspektivisch dargestellten Kreisen, und zwar oberhalb  $f_0$  entgegen dem Uhrzeiger, unterhalb von  $f_0$  rechts herum, wenn man in Richtung der Frequenzachse blickt. Nach  $T_m/4$  hat sich bei der ersten Seitenfrequenz die Spitze um einen Viertelkreis weitergedreht. Die Rotationsgeschwindigkeit nimmt mit dem Abstand von  $f_0$  linear zu, so daß bei der zweiten Seitenfrequenz nach  $T_m/4$  bereits ein halber Kreis beschrieben ist (s. Abb. 4).

Ohne die Kennzeichnung der Phasenlage könnte das Bild des Frequenzspektrums von Abb. 4 beim Vergleich mit sinusförmiger Amplitudenmodulation zu der Ansicht verführen, daß sich die Spektren bei den beiden Modulationsarten für kleinen Hub ( $\Delta \varphi < 1$ ) nicht unterscheiden, da links und rechts vom Träger eine kräftige Seitenschwingung auftaucht. Es sind aber doch zwei wesentliche Unterschiede vorhanden:

1. Es treten grundsätzlich weitere Seitenfrequenzen auf, besonders stark  $f_0 \pm 2f_m$ ,
  2. steht die Phasenlage der Seitenfrequenzen  $f_0 \pm f_m$  zum Träger ( $90^\circ$ ) im Gegensatz zur Phasenlage bei Amplitudenmodulation.
- Punkt 2. ist der wesentliche.

**Einfluß nicht sinusförmiger Modulation.**

In Abb. 5 sind  $A'_i$  und  $A''_i$  und das Frequenzspektrum bei rechteckiger Modulation dargestellt. Im Vergleich zu Abb. 4 erkennt man, daß bei  $A'_i$  die Hüllkurve als geknickte Gerade verläuft. Außer den Sei-

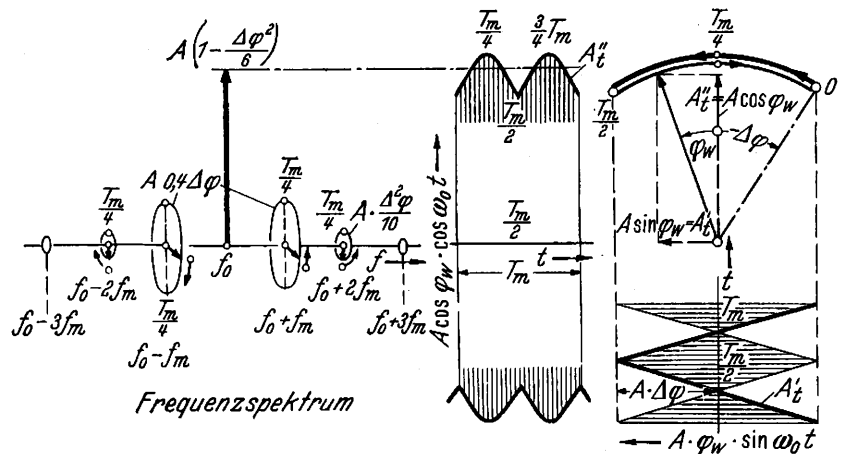


Abb. 5. Frequenzspektrum bei Rechteckmodulation mit kleinem Phasenhub.

tenfrequenzen  $f_0 \pm f_m$  treten daher hier noch stärkere 3. Seitenfrequenzen  $f_0 \pm 3f_m$  auf. Auch bei  $A'_i$  (Parabelbögen statt Sinuskurve) ist der Oberwellengehalt reicher. Die Phasenlage unterscheidet sich bei den ersten, wichtigen Seitenfrequenzen nicht von der Sinusmodulation.

Als Ergebnis ist festzustellen, daß die rechteckige Modulation gegenüber der Sinusmodulation mehr Bandbreite beansprucht, daß aber bei kleinem Hub die Frequenzspektren recht ähnlich sind.

**VII. Frequenzspektrum bei großem Hub und Sinusmodulation.**

Interessant wird die Veränderung des Spektrums bei großem Hub. Das Verfahren zur Ermittlung des Spektrums bleibt das gleiche. Abb. 6 zeigt ein Bei-

hält. Dementsprechend sind bei  $\Delta\varphi = 2$  die  $f_0$  benachbarten ersten Seitenfrequenzen gegenüber den anderen ungeraden Seitenfrequenzen sehr stark.

Den Träger und die geraden Seitenfrequenzen ergibt nach Kapitel VI die Zerlegung von  $A_t''$  in Einzelschwingungen nach Fourier. Nun ist

$$A_t'' = A \cos(-\Delta\varphi \cos \omega_m t)$$

identisch mit

$$A_t'' = A J_0(\Delta\varphi) - 2A J_2(\Delta\varphi) \cos 2\omega_m t + 2A J_4(\Delta\varphi) \cos 4\omega_m t \dots$$

$A_t'' \cos \omega_0 t$  stellt demnach dar:

1. den „Träger“ mit der Frequenz  $f_0$  und der Stärke  $A J_0(\Delta\varphi)$ ,
2. alle geradzahigen Seitenfrequenzen, deren Stärke durch die Besselfunktion gleicher Ordnungszahl gegeben ist.

In Abb. 6 ist das Gesamtspektrum aus  $A_t'$  und  $A_t''$  gezeichnet. Es sind ferner für den Startzeitpunkt ( $t=0$ ) die einzelnen Zeiger des Spektrums der Reihe nach wieder amplituden-

und phasenrichtig zusammengesetzt. Es ergibt sich, worauf Stäblein zuerst hingewiesen hat, eine Art Spiraldiagramm, bei dem die einzelnen Besselfunktionen, jeweils um  $90^\circ$  im gleichen Sinne gedreht, einander folgen. Der resultierende Zeiger stimmt ersichtlich nach Betrag und Richtung mit der Ausgangslage von  $A$  im Zeigerdiagramm (Abb. 6 rechts oben) überein.

Am Spektrum sieht man, daß für  $\Delta\varphi = 2$  die Trägerschwingung sehr klein ist im Verhältnis zur ersten Seitenschwingung. Das liegt daran, daß in Abb. 6 Mitte  $A_t''$  unter die Zeitachse herunterschwingt. Man wird ohne weiteres erwarten, daß bei Steigen des Phasenhubes über 2 hinaus bis zu einem bestimmten Wert der Träger ganz verschwindet. Offenbar ist dies der Fall, wenn die Fläche unter der Kurve von  $A_t''$  verschwindet (s. Abb. 7). Man findet graphisch dafür  $\Delta\varphi = 2,4$ . Rechnerisch folgt

das Verschwinden des Trägers  $A J_0(\Delta\varphi)$  aus den Wurzeln der Besselfunktion 0-ter Ordnung.

Die Tafel 1 zeigt die ersten Wurzeln.

Tafel 1.

Nr. der Wurzel von $J_0$ .	1	2	3	4	5
$\Delta\varphi$ . . . . .	2,40	5,52	8,65	11,79	14,93

Das Verschwinden des Trägers ist aus zwei Gründen interessant.

Einmal erinnert es an die Trägerfrequenztechnik, bei der man mit Absicht den-Träger schwächt bzw. unter-

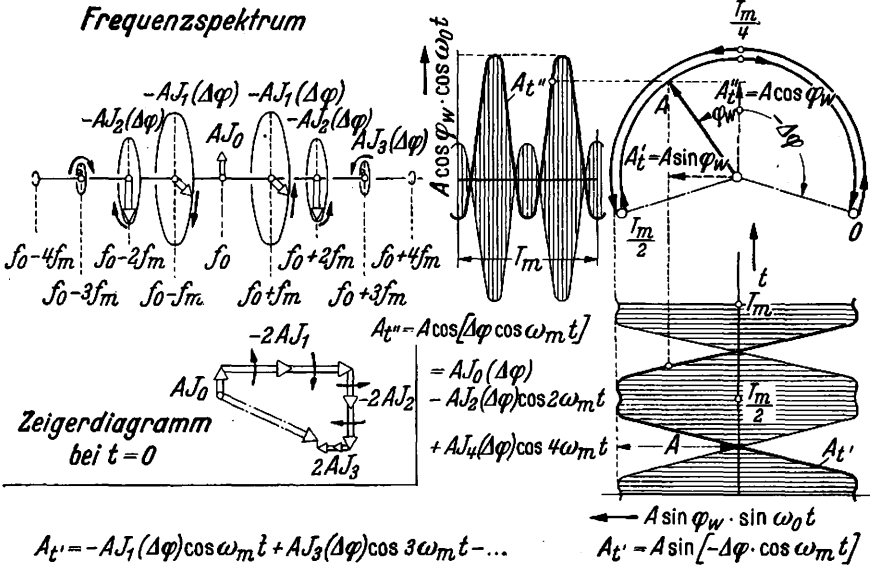
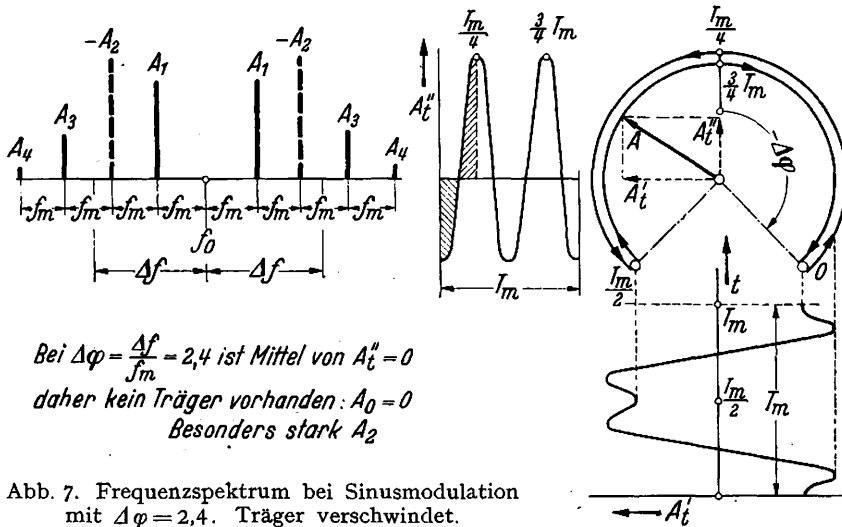


Abb. 6. Frequenzspektrum bei Sinusmodulation mit Phasenhub  $\Delta\varphi = 2$ .

spiel bei Sinusmodulation für  $\Delta\varphi = 2$  entsprechend  $115^\circ$ . Bei großem Phasenhub ist es natürlich nicht mehr möglich,  $\sin\varphi_w$  durch  $\varphi_w$  selbst zu ersetzen. Die Hüllkurve von  $A_t'$  hat die Form

$$A_t' = A \sin \varphi_w = A \sin(-\Delta\varphi \cos \omega_m t).$$



Bei  $\Delta\varphi = \frac{\Delta f}{f_m} = 2,4$  ist Mittel von  $A_t'' = 0$  daher kein Träger vorhanden:  $A_0 = 0$  Besonders stark  $A_2$

Abb. 7. Frequenzspektrum bei Sinusmodulation mit  $\Delta\varphi = 2,4$ . Träger verschwindet.

Die Fourieranalyse liefert hierfür

$$A_t' = -2A J_1(\Delta\varphi) \cos \omega_m t + 2A J_3(\Delta\varphi) \cos 3\omega_m t - \dots + \dots$$

Die Koeffizienten der cos-Glieder und damit die Stärke der Seitenschwingungen ungerader Ordnung, die nach Kapitel VI aus  $A_t' \sin \omega_0 t$  entstehen, sind durch Besselfunktionen  $J_1, J_3, J_5$  usw. mit dem Argument  $\Delta\varphi$  gegeben und damit bekannt.

Für das Beispiel  $\Delta\varphi = 2$  erkennt man in Abb. 6 rechts unten unmittelbar, daß  $A_t'$  besonders stark das Glied  $\cos \omega_m t$  und wesentlich schwächer  $\cos 3\omega_m t$  ent-

drückt, um die Energie der Nachricht voll für die Seitenbänder zur Verfügung zu haben.

Eine weitere Anwendung finden wir in der Meßtechnik. Die Einstellung eines Empfängers für Frequenzmodulation auf verschwindenden Träger ist sehr scharf und daher als Eichmethode für Hubmesser geeignet. Wenn man den Phasenhub bzw. Frequenzhub entsprechend Tafel 1 so einstellt, daß der Träger verschwindet, weiß man, daß der Frequenzhub bestimmte Werte durchläuft, die als Eichpunkte zu verwenden sind.

In Abb. 7 läßt der Verlauf von  $A_t''$  ferner erkennen, daß die Schwingung mit  $2f_m$  stark ausgeprägt ist, d. h. die Seitenfrequenzen  $f_0 \pm 2f_m$  überwiegen jetzt im Spektrum. Allgemein besteht zwischen dem Verschwinden des Trägers und der jeweiligen Lage der stärksten Seitenschwingungen ein fester Zusammenhang. Er ist besonders einleuchtend bei rechteckiger Modulation.

**VIII. Rechteckmodulation bei großem Phasenhub.**

Es besteht die Möglichkeit, die Rechteckmodulation in üblicher Weise als Summe von Sinusfunktionen auszudrücken und das Spektrum mit Hilfe von Besselfunktionen darzustellen. Dieser Weg ist umständlich und die numerische Lösung zeitraubend. Sehr schnell führt dagegen die Analyse von  $A_t'$  und  $A_t''$ , die für die wichtigsten Spezialfälle nicht einmal die übliche Integration der Fourieranalyse erfordert, zum Ziel. Außer dieser einfachen Ableitung wird noch eine zweite Darstellung, die als „Tastspektrum“ bezeichnet sei, wegen ihrer Anschaulichkeit gebracht.

**1. Spektrum von  $A_t'$  und  $A_t''$ .**

Besonders einfach ist die Ableitung des Spektrums, wenn der Phasenhub  $\Delta\varphi$  ganze Vielfache von  $\pi/2$  ausmacht. Da  $\Delta\varphi = \pi/2 \Delta f/f_m$  ist, bedeutet dies, daß  $\Delta f/f_m = 1, 2, 3 \dots$  ist, also ganzzahlig bleibt.

Für  $\Delta f = f_m$  bzw.  $\Delta\varphi = \pi/2$  ist in Abb. 8a, rechts, das Pendelzeigerdiagramm mit  $A_t'$  und  $A_t''$  angedeutet. Wie man sieht, ist  $A_t'$  besonders einfach, eine Zerlegung also nicht notwendig.  $A_t'$  ergibt als Beitrag für das Spektrum unmittelbar die ersten Seitenfrequenzen  $f_0 \pm f_m$  mit der Amplitude  $A/2$ . Weitere ungerade Seitenfrequenzen sind nicht vorhanden.

Für  $A_t''$  zeigt sich das Bild einer Sinusschwingung, die nach  $T_m/2$  einen Phasensprung von  $180^\circ$  erfährt. Anstatt diese Kurve nach Fourier zu analysieren, kann man sie aus einer reinen Sinusschwingung der Form  $-A \sin \omega_m t$  durch eine Rechteckkurve kommutiert denken. Also ist

$$A_t'' = A \sin \omega_m t \frac{4}{\pi} \left( \sin \omega_m t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega_m t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega_m t + \dots \right) \\ = A \frac{2}{\pi} - A \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{1.3} \cos 2 \omega_m t + \frac{1}{3.5} \cos 4 \omega_m t + \frac{1}{5.7} \cos 6 \omega_m t + \dots \right).$$

Man kennt damit den Träger und alle geraden Seitenfrequenzen in ihrer Stärke (Abb. 8a). Es ist zu beachten, daß wegen der Zusammensetzung von  $A_t' \sin \omega_0 t$  und  $A_t'' \cos \omega_0 t$  zum gesamten Spektrum die stärkste Seitenfrequenz  $f_0 \pm f_m$  gegenüber den anderen Schwingungen um  $90^\circ$  phasenverschoben ist.

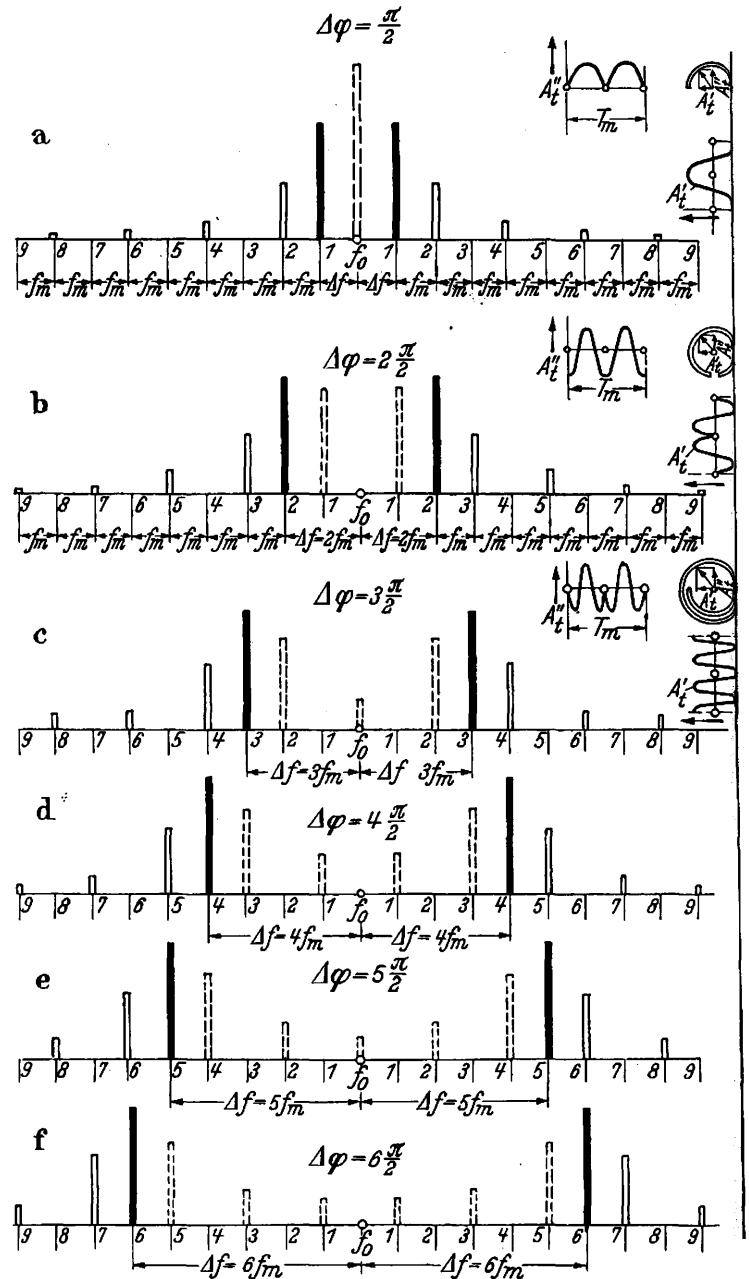


Abb. 8. Frequenzspektrn bei Rechteckmodulation für kleinen und großen Phasenhub.

Für  $\Delta f = 2f_m$  bzw.  $\Delta\varphi = \pi$  zeigt Abb. 8b rechts, daß nunmehr  $A_t'' = -A \cos 2 \omega_m t$  besonders einfach erscheint. Im Spektrum treten außer  $f_0 \pm 2f_m$  mit der Amplitude  $A/2$  keine weiteren geradzahligem Seitenschwingungen auf. Auch ist kein Träger vorhanden (entsprechend der Sinusmodulation für  $\Delta\varphi = 2, 4$ ).

Für  $A_t'$  zeigt sich das Bild einer Sinusschwingung, die nach  $T_m/2$  einen Phasensprung um  $180^\circ$  erfährt.

So ist

$$A'_i = -A \sin 2\omega_m t \frac{4}{\pi} \left( \sin \omega_m t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_m t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_m t + \dots \right)$$

$$= A \frac{4}{\pi} \left[ \frac{2}{-1.3} \cos \omega_m t + \frac{2}{1.5} \cos 3\omega_m t + \frac{2}{3.7} \cos 5\omega_m t + \frac{2}{5.9} \cos 7\omega_m t \right]$$

Damit ist die Fourierzerlegung von  $A'_i$  durchgeführt und in ihrem gesetzmäßigen Aufbau erkannt. Man kennt damit alle ungeraden Seitenfrequenzen, die  $A'_i$  liefert, in ihrer Stärke. Abb. 8b zeigt das Gesamtspektrum durch Vereinigung von  $A'_i$  und  $A''_i$ . Auch hier ist die stärkste Seitenfrequenz bei  $f_0 \pm 2f_m$  um  $90^\circ$  in der Phase gegenüber den anderen Frequenzen verschoben.

In Abb. 8c rechts oben sieht man, daß für  $\Delta f = 3f_m$  jetzt  $A'_i$  die besonders einfache Form  $+A \cos 3\omega_m t$  annimmt. Andere ungerade Seitenfrequenzen als  $f_0 \pm 3f_m$  können also nicht im Spektrum auftreten. — Man sieht in Abb. 8c rechts oben weiter, daß  $A''_i$  wieder als kommutierte Sinuskurve leicht zu analysieren ist. Es ergibt sich

$$A''_i = A \frac{2}{\pi} \frac{1}{3} + A \frac{4}{\pi} \times \left[ \frac{3}{-1.5} \cos 2\omega_m t + \frac{3}{1.7} \cos 4\omega_m t + \frac{3}{3.9} \cos 6\omega_m t + \dots \right]$$

Jetzt ist also zusammen mit einer Reihe von geraden Seitenfrequenzen  $f_0 \pm 2f_m, f_0 \pm 4f_m$  usw. wieder ein „Träger“ bei  $f_0$  vorhanden. Er ist aber verhältnismäßig klein (21% von  $A$ ). Es fällt im Spektrum Abb. 8c auf, daß hier für  $\Delta f/f_m = 3$  auch die 3. Seitenfrequenz die stärkste ist.

Dieses Gesetz gilt für Rechteckmodulation allgemein. Man kann an Hand Abb. 8a...f folgende Regeln ableiten:

1. Ist der Modulationsindex  $\Delta f/f_m = m$ , so tritt im Spektrum  $f_0 \pm m f_m = f_0 \pm \Delta f$  als stärkste Seitenfrequenz mit der Amplitude  $A/2$  auf.
2. Ist der Modulationsindex  $m = \Delta f/f_m$  geradzahlig, so fehlt der „Träger“.
3. Bei ungeradem  $m$  ist der Träger um so kleiner, je höher  $m$  wird. Er beträgt dann nur wenige Prozent der stärksten Seitenschwingung.

Die Ergebnisse 2. und 3. zeigen, daß dem Träger bei rechteckiger Frequenzmodulation keine große Bedeutung zukommt. Diese Auffassung wird gestützt durch die im nächsten Abschnitt beschriebene Theorie des Tastspektrums. Vorher soll noch die für Rechteckmodulation abgeleitete Regel 1 und 2 in Tafel 2 der Sinusmodulation gegenübergestellt werden.

Es war schon bei der Sinusmodulation mit großem Hub angedeutet, daß bei verschwindendem Träger

Tafel 2. Aussteuerung und Lage der stärksten Seitenschwingung. Verschwinden des Trägers.

Sinusmodulation			Rechteckmodulation		
Träger verschwindet bei $\Delta f$ bzw. $f$	Stärkere Seitenschwingung bei etwa		Träger verschwindet bei $\Delta f$ bzw. $f$	Stärkste Seitenschwingung bei etwa	
2,4	2,4 $f_m$	$f_0 \pm 2 f_m$	$\pi$	2 $f_m$	$f_0 \pm 2 f_m$
5,5	5,5 $f_m$	$f_0 \pm 4 f_m$	$2 \pi$	4 $f_m$	$f_0 \pm 4 f_m$
8,65	8,65 $f_m$	$f_0 \pm 7 f_m$	$3 \pi$	6 $f_m$	$f_0 \pm 6 f_m$
11,8	11,8 $f_m$	$f_0 \pm 10 f_m$	$4 \pi$	8 $f_m$	$f_0 \pm 8 f_m$

eine bestimmte Seitenschwingung besonders stark auftritt. Tafel 2 zeigt, wie bei Rechteckmodulation der Träger für geradzahligem Frequenzhub verschwindet und z. B. bei  $f = 6f_m$  auch  $f_0 \pm 6f_m$  die Spitze des Frequenzspektrums bildet. Bei Sinusmodulation ist nach Tafel 2 ein größerer Frequenzhub bzw. kleinerer Phasenhub notwendig, um den Träger zum Verschwinden zu bringen. Die stärkste Seitenfrequenz wandert auch bei Sinusmodulation mit dem Frequenzhub aus, bleibt aber um 0,5 bis  $1f_m$  hinter  $\Delta f$  zurück. Das übersichtliche Verhalten bei Rechteckmodulation, wo die stärkste Seitenschwingung unmittelbar vom Frequenzhub  $\Delta f$  mitgezogen wird, ist nach der folgenden Theorie des „Tastspektrums“ ohne weiteres verständlich.

### 2. Das Tastspektrum.

Die Theorie des Tastspektrums soll an Abb. 9 entwickelt werden. Hier ist in Abb. 9a in Wiederholung von Abb. 2 die Frequenz mit dem Frequenzhub  $\Delta f$  abhängig von der Zeit  $t$  aufgetragen. Dem entspricht

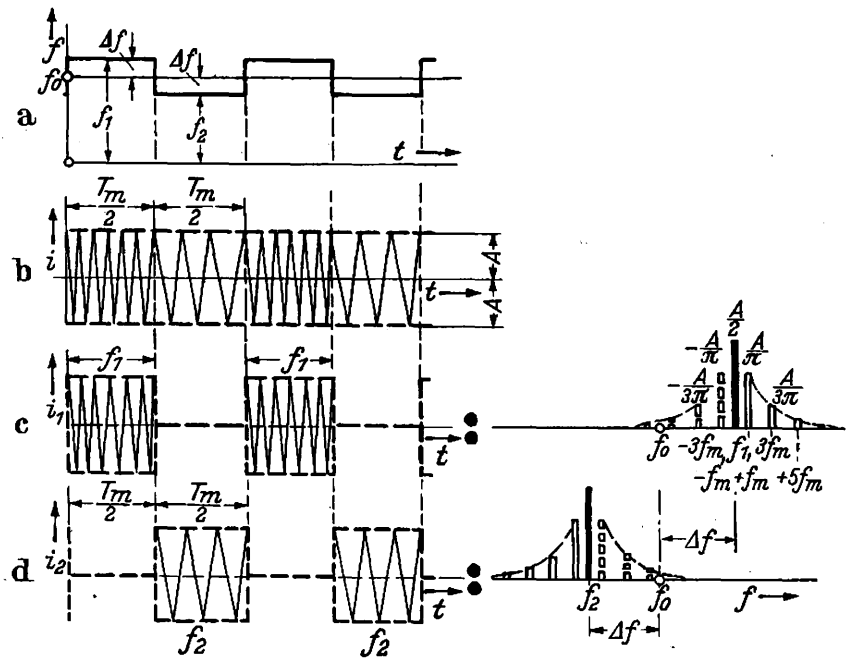


Abb. 9. Entstehung des Frequenzspektrums bei Rechteckmodulation aus dem Tastspektrum.

in Abb. 9b die einfache Darstellung der Schwingung selbst. Die Schwingungszüge mit der Amplitude  $A$  folgen während der ersten Halbperiode dicht aufeinander, während der zweiten weniger dicht.

Es liegt nun nahe, sich vorzustellen, daß die frequenzmodulierte Schwingung aus zwei wechselzeitig



„hart“ getasteten Schwingungen der Frequenzen  $f_1 = f_0 + \Delta f$  und  $f_2 = f_0 - \Delta f$  besteht. Abb. 9c gibt die Tastung von  $f_1$  und Abb. 9d links die Tastung von  $f_2$  wieder.

Der Vorteil dieser Auffassung besteht darin, daß das Spektrum dieser hart getasteten Zeichen altbekannt ist. Ferner ist nach dieser Betrachtung klar, daß bei Tastung von  $f_1$  vorwiegend  $f_1$  vorhanden sein muß und ebenso bei Tastung von  $f_2$  eben  $f_2$  als Frequenz der stärksten Schwingung auftritt. Die „Träger-

die Zeitachse gerichtet, so daß es nun möglich ist, in einer Darstellung die Modulationskurve (Frequenz  $f$  als Funktion der Zeit) und das Spektrum zu vereinen. Wie man sieht, ist es lediglich notwendig, von der Modulationskurve ausgehend, bei  $f_1$  und  $f_2$  die Spektren einzuzichnen und phasenrichtig zu überlagern.

Besonders gut erkennt man die bei dem Frequenzhub benötigte Bandbreite. Das Spektrum erstreckt sich weit über  $2\Delta f$  nach links und rechts. Einigt man sich zur praktischen Definition der Bandbreite darauf, die Seitenschwingung noch mitzuzählen, die 10% der Amplitude  $A$  ausmacht<sup>3)</sup>, so ist die Bandbreite

$$B_{sp} = 2(\Delta f + 3f_m) = 2\Delta f + 6f_m.$$

Um zu beweisen, daß dieses Verfahren des Tastspektrums auch bei kleinem Hub keine widersprechenden Ergebnisse liefert, ist in Abb. 10 rechts für  $\Delta f = f_m$  das Spektrum durch Überlagerung wie in Abb. 10 links gewonnen. Auch hier erkennt man, daß eigentlich  $f_1$  und  $f_2$  die Hauptfrequenzen sind und der „Träger“ nur durch Addition der beiden starken ersten Seitenfrequenzen zu größerer Höhe anwächst. So entsteht wieder das bei kleinem Frequenzhub bekannte Bild des von  $f_0$  aus nach beiden Seiten abklingenden Spektrums.

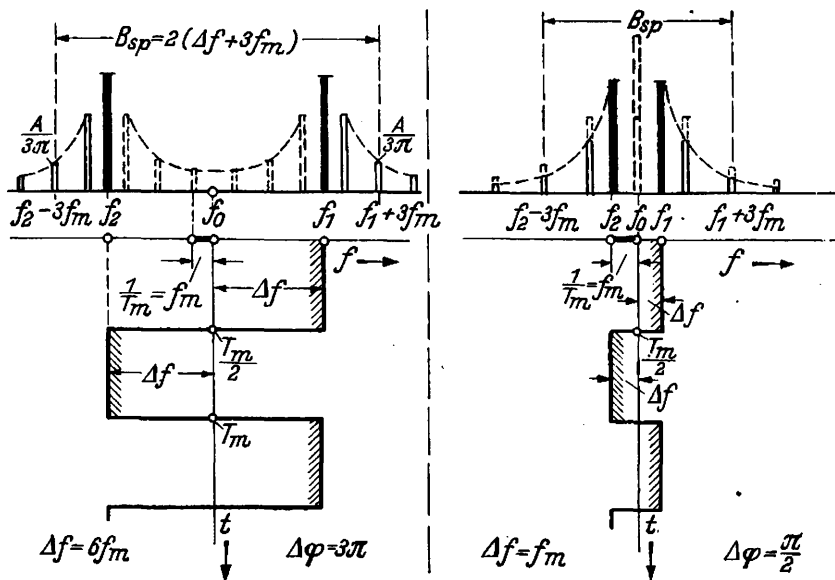


Abb. 10. Tastspektrum bei großem und kleinem Frequenzhub.

frequenz“  $f_0$  hat danach nur die Bedeutung eines Mittelwertes von  $f_1$  und  $f_2$ . Ob bei  $f_0$  eine Amplitude auftritt, hängt davon ab, ob Seitenfrequenzen von  $f_1$  und  $f_2$  zufällig auf  $f_0$  fallen. So kann man die Behauptung aufstellen:

Die „Trägeramplitude“ entsteht als Überlagerung der Seitenfrequenzen von  $f_1$  und  $f_2$ . Haben  $f_1$  und  $f_2$  keine Seitenfrequenz bei  $f_0$ , so ist auch kein „Träger“ vorhanden.

Das Spektrum, das zu  $f_1$  gehört, ist in Abb. 9c rechts eingezeichnet. Es klingt wie die Hyperbel  $1/a \cdot f_m$  ab, wenn man sich um  $a \cdot f_m$  von  $f_1$  nach links und rechts entfernt. Das Spektrum enthält um  $f_1$  herum grundsätzlich nur ungerade Seitenfrequenzen. Wie man durch Vergleich mit Abb. 8 leicht feststellen kann, liefert für ganzzahlige Werte  $\Delta f/f_m$  das aus  $A'_i$  und  $A''_i$  gebildete Spektrum das gleiche Ergebnis.

Auch die Phasenlage ist in Abb. 9 die gleiche wie in Abb. 8. Die rechts von  $f_1$  liegenden Frequenzen sind ausgezogen gezeichnet, sie haben das gleiche positive Vorzeichen. Links von  $f_1$  sind die Seitenfrequenzen alle negativ und deshalb gestrichelt dargestellt.

Um das Gesamtspektrum zu gewinnen, braucht man nur noch das  $f_2$  benachbarte Spektrum (Abb. 9 unten rechts) mit dem Spektrum von  $f_1$  zusammen zu schieben.

Das ist in Abb. 10 links geschehen. In dieser Darstellung ist senkrecht zur Frequenzachse nach unten

Es ist jetzt nur noch die eine Frage zu klären, ob das Tastspektrum richtig bleibt, wenn der Modulationsindex  $\Delta f/f_m$  keine ganze Zahl ausmacht. Dann würden nach der Anschauung der ineinandergeschobenen Tastspektren (bei Rechteckmodulation) die einzelnen Frequenzen nicht im Abstand der Modulationsfrequenz  $f_m$  aufeinander folgen. Das ist natürlich nicht möglich, wie auch die Analyse von  $A'_i$  und  $A''_i$  zeigt.

Die Lösung dieses Widerspruchs liegt darin, daß die Tastspektren im allgemeinen die Hüllkurven für das Spektrum liefern. Die Seitenfrequenzen verteilen sich um  $f_0$  entsprechend  $f_0 \pm a \cdot f_m$ , auch wenn  $\Delta f/f_m$  keine ganze Zahl ist.

### IX. Bandbreite des Spektrums bei Rechteck- und Sinusmodulation.

In Abb. 11 ist für einen Modulationsindex 6 das Spektrum für Sinusmodulation eingezeichnet, wie es die Besselfunktionen  $J_0(6)$ ,  $J_1(6)$ ,  $J_2(6)$  usw. ergeben. Die im vorigen Abschnitt entwickelte Theorie des Tastspektrums würde für Sinusmodulation eine Aufspaltung in eine größere Zahl von Einzelimpulsen und die Überlagerung der zugehörigen Tastspektren erfordern. Das wäre sehr umständlich.

Das Tastspektrum liefert aber eine anschauliche Ableitung der Bandbreite auch für Sinusmodulation.

<sup>3)</sup> Nicht ganz zutreffend wird  $A$  auch als „unmodulierter Träger“ bezeichnet.

Ersetzt man, wie in Abb. 11 gezeichnet, den Sinusbogen durch die strichpunktierte Trapezkurve, so ist leicht abzuleiten, daß die erste außerhalb des durch  $\Delta f$  ausgesteuerten Frequenzbereichs liegende Seitenschwingung (bei  $f_0 + \Delta f + f_m$ ) die Stärke  $A \cdot T_1/T_m = 0,12 A$  hat. Es fällt auf, daß dieser Wert nicht vom

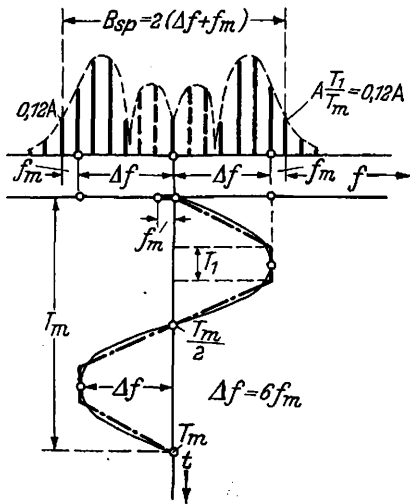


Abb. 11. Spektrum und Frequenzhub bei Sinusmodulation.

Modulationsindex abhängt. Prüft man nun den Zahlenwert der Besselfunktion  $J_{p+1}(p)$  bei verschiedenem  $p$  nach, so erhält man tatsächlich Werte, die nur zwischen 0,11 und 0,13 schwanken, wenn  $p$  zwischen 1 und 20 verändert wird. Damit ist nachgewiesen, daß die Bandbreite bei Sinusmodulation

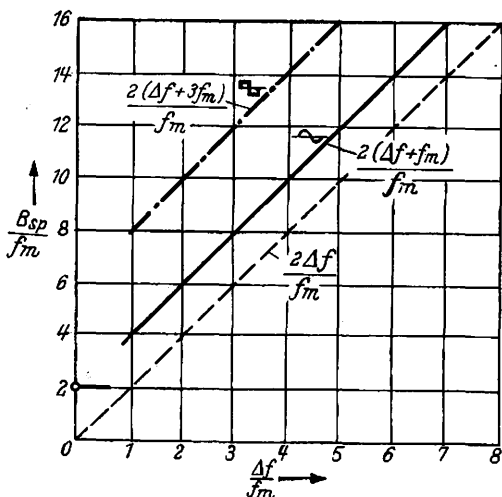


Abb. 12. Bandbreite bei Rechteck- und Sinusmodulation.

durch Frequenzhub  $\Delta f +$  Modulationsfrequenz  $f_m$  bestimmt ist.  $B_{\sin} = 2(\Delta f + f_m)$ .

Die Ergebnisse für Rechteck- und Sinusmodulation sind in Abb. 12 vergleichsweise aufgetragen.

### X. Unsymmetrisches Spektrum bei unsymmetrischer Modulationskurve.

Zum Schluß soll noch eine Frage gestreift werden, die von Vellat<sup>4)</sup> rein mathematisch behandelt wurde.

<sup>4)</sup> T. Vellat, ENT 18, 149 (1941), „Beitrag zur Theorie der Seitenbänder bei Frequenzmodulation“.

Es handelt sich um die merkwürdige Tatsache, daß bei Frequenzmodulation ein zu  $f_0$  unsymmetrisches Spektrum vorkommen kann. Bei Amplitudenmodulation ist dies nicht möglich, auch wenn die Modulationskurve einen noch so unregelmäßigen Verlauf hat. Vellat vermißt einen anschaulichen Nachweis für die Bedingung, unter der das Spektrum unsymmetrisch wird. Dieser kann mittels des Tastspektrums leicht gegeben werden. In Abb. 13 ist eine Modulationskurve gezeichnet, die zur Zeitachse unsymmetrisch verläuft. Innerhalb einer Modulationsperiode  $T_m$  hat die Frequenz zunächst den Wert  $f_1$ , dann den Wert  $f_2$ , danach  $f_0 - f_m$  und zum Schluß wieder  $f_2$ . Über der Frequenzkurve kann man sofort näherungsweise das Frequenzspektrum auftragen. Es ist stark unsymmetrisch, wie man sieht.

Die Bedingung, die erfüllt sein muß, um ein symmetrisches Spektrum zu erhalten, hat Vellat „Radial-

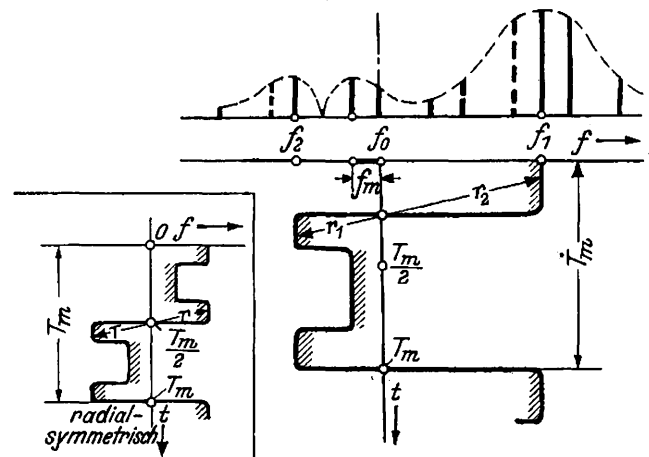


Abb. 13. Unsymmetrie des Spektrums bei unsymmetrischer Modulationskurve.

symmetrie“ genannt. Es muß innerhalb der Modulationsperiode ein Punkt auf der Zeitachse existieren, von dem aus man nach beiden Seiten mit gleichen Radien  $r$  die Modulationskurve erreicht, wie es in Abb. 13 links zu sehen ist. Man kann auch sagen, daß die Modulationskurve im Punkte  $T_m/2$  zu Zeit- und Frequenzachse symmetrisch sein muß, wenn das Frequenzspektrum symmetrisches Aussehen haben soll. Diese Bedingung geht aus Abb. 13 unmittelbar anschaulich hervor.

### XI. Zusammenfassung.

Nachdem die Beziehungen zwischen Phasenänderung und Frequenzänderung in allgemeiner Form und für die Sonderfälle der sinusförmigen und rechteckigen Modulationskurve gezeigt sind, wird der technische Unterschied zwischen „Frequenzmodulation“ und „Phasenmodulation“ erläutert. Bei der Frequenzmodulation in technischem Sinne hat der Verlauf der Frequenz in Abhängigkeit von der Zeit die gleiche Bedeutung wie die Hüllkurve bei der Amplitudenmodulation.

Pendelzeigerdiagramme für kleinen und großen Phasenhub gestatten es, durch Zerlegung in zwei

amplitudenmodulierte Schwingungen  $A'_t$  und  $A''_t$  das Frequenzspektrum bei beliebiger Modulationskurve aufzustellen. Die Frequenzspektren der Sinusmodulation und Rechteckmodulation werden untersucht, wobei sich für Rechteckmodulation besonders übersichtliche Beziehungen zwischen der Lage der stärksten Seitenschwingung in Abhängigkeit vom Frequenzhub ergeben. Die Bedingungen für das Verschwinden der Trägerschwingung  $f_0$  werden anschaulich abgeleitet.

Für Rechteckmodulation wird außerdem nach der Vorstellung wechselzeitiger Tastung der höchsten und niedrigsten Frequenz das Frequenzspektrum aus der Überlagerung von zwei bekannten Tastspektren hergeleitet und daraus als Folgerung die Bandbreite für Rechteck- und Sinusmodulation gewonnen. Eine anschauliche Darstellung, wie ein zu  $f_0$  unsymmetrisches Spektrum zustande kommt, beschließt die Einführung in die Frequenzmodulation.

(Eingegangen am 23. Dezember 1942.)